PHÒNG GD&ĐT HUYỆN THỌ XUÂN ĐỀ CHÍNH THỨC	KỲ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN NĂM HỌC : 2017 – 2018 Môn: Toán – Lớp 8 Ngày thi: 08 tháng 4 năm 2018

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho biểu thức : $$P=\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{x^2-4y^2}{x+2y}\right):\left(\frac{2}{y^2x}-\frac{3}{x^2y}\right)$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị biểu thức P khi x,y thỏa mãn ; $|x|+|y|=6; x^2+y^2=26$\

c) Nếu $x;y$ là các số thực dương làm cho P xác định và thỏa mãn: $x+y=2.$ Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Lúc 7 giờ sáng một xe buýt đi từ vị trí A đến vị trí B với độ dài là 60 km. Khi đi tới vị trí C cách vị trí A $39km$ thì xe bị hỏng. Xe phải dừng lại và sửa chữa mất 15 phút, sau đó xe tiếp tục đi từ C đến B với vận tốc giảm hơn so với vận tốc đi từ A tới C là $3km/h.$ Tổng thời gian xe đi từ A đến B hết $\frac{11}{6}$ giờ (tính cả thời gian dừng lại sửa xe). Hỏi xe buýt bị hỏng lúc mấy giờ ?

b) Giải phương trình
$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $4n^3+n+3$ chia hết cho $2n^2+n+1$

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho: $3x^2-y^2-2xy-2x-2y+40=0$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M bất kỳ, sao cho M khác A và $C.$ Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE=CM$

a) Gọi O là trung điểm của cạnh $BC.$ Chứng minh ΔOEM vuông cân

b) Đường thẳng qua A và song song với $ME,$ cắt tia BM tại N. Chứng minh : $CN\perp AC$

c) Gọi H là giao điểm của OM và $AN.$ Chứng minh rằng tích $AH.AN$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh AC.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1a)

$$P = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^2 - (2y)^2}{x + 2y} \right) : \left(\frac{2x - 3y}{x^2y^2} \right)$$

$$= \left[\frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} + \frac{(x - 2y)(x + 2y)}{x + 2y} \right] : \frac{2x - 3y}{x^2y^2}$$

$$= (x - y + x - 2y).\frac{x^2y^2}{2x - 3y}$$

$$= (2x - 3y).\frac{x^2y^2}{2x - 3y} = x^2y^2$$

1b)

Điều kiện : $x \ne 0; y \ne 0; x \ne \frac{3}{2}y; x \ne -2y$

Ta có:

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 \Leftrightarrow 6^2 = 26 + 2|x||y| \Leftrightarrow |x||y| = 5$$

Vậy $P = 5^2 = 25$

1c)

Với x, y dương và thỏa mãn điều kiện $x \ne 0; y \ne 0; x \ne \frac{3}{2}; x \ne -2y$ ta có:

$xy \le \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 = 1$ (vì $x + y = 2$). Dấu $" = "$ xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy GTLN của P bằng 1 $\Leftrightarrow x = y = 1$

Câu 2.

a) Gọi vận tốc của xe buýt khi đi từ A đến C là $x(km/h; x > 3)$ thì vận tốc của xe buýt khi đi từ C đến B là $(x - 3)(km/h)$

Thời gian để xe buýt đi hết quãng đường AC là $\frac{39}{x}(h),$ thời gian để xe buýt đi hết quãng đường CB là $\frac{21}{x-3}(h)$. Thời gian dừng lại sửa xe là 15 phút $=\frac{1}{4}(h)$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{39}{x}+\frac{21}{x-3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{6}$

Giải ra được $\left[\begin{array}{l} x=39(tm) \\ x=\frac{36}{19}(ktm) \end{array}\right.$

Vậy khi đi từ A tới C xe buýt đi với vận tốc $39km/h$, suy ra thời gian để xe buýt đo đi hết quãng đường AC là : $39:39=1$(giờ)

Do đó đúng 8 giờ sáng thì xe buýt bị hỏng.

b) Giải phương trình

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3} \qquad (x\neq -1;-2;-3;-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4}=\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4+4x+4}{x^2+5x+4}=\frac{2x+6+3x+6}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow (5x+8)\left(x^2+5x+6\right)=(5x+12)\left(x^2+5x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 5x^3+33x^2+70x+48=5x^3+37x^2+80x+48$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+10x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(tm) \\ x=\frac{-5}{2}(tm) \end{array}\right.$$

Câu 3.

3a)

Ta có: $\dfrac{4n^3+n+3}{2n^2+n+1}=2n-1+\dfrac{4}{2n^2+n+1}$

Vì n là số nguyên nên $2n-1$ là số nguyên. Do đó để $4n^3+n+3$ chia hết cho $2n^2+n+1$ thì $2n^2+n+1$ phải là ước số của 4

Mặt khác: $$2n^2+n+1=2\left[n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right]=2\left[\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]>0$$

Do đó: $2n^2+n+1=1$ hoặc $2n^2+n+1=2$ hoặc $2n^2+n+1=4$

Giải từng trường hợp suy ra: $\left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=-1 \\ n=1 \end{array}\right.$

3b) Ta có:

$3x^2-y^2-2xy-2x-2y+40=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-\left(x^2+y^2+2xy+2x+2y+1\right)=-41$

$\Leftrightarrow (x+y+1)^2-(2x)^2=41$

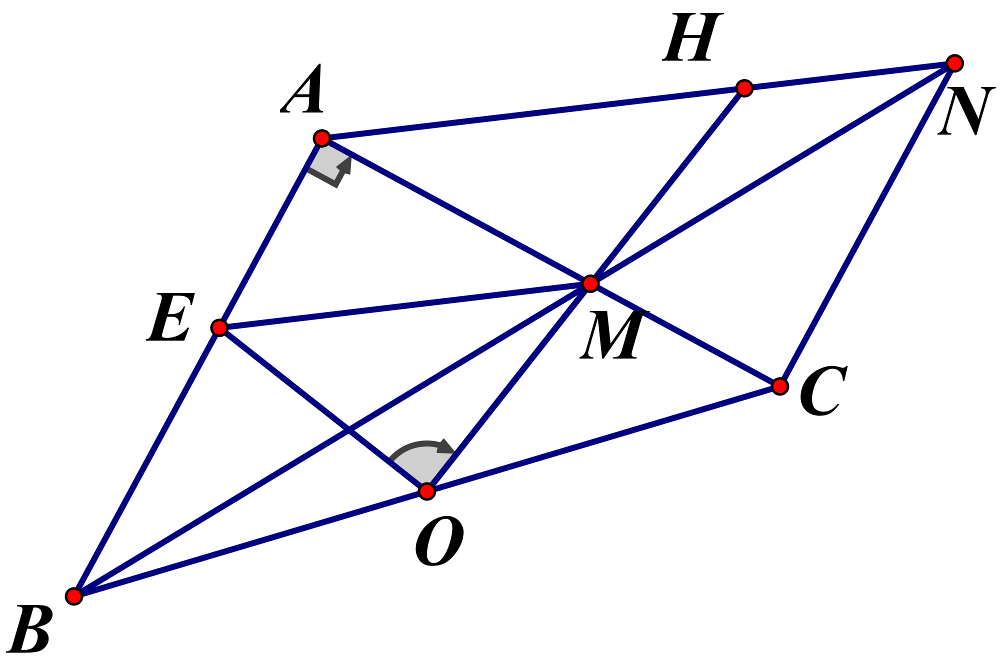
$\Leftrightarrow (3x+y+1)(y-x+1)=41$

Đặt : $3x+y+1=a$ và $y-x+1=b.$ Suy ra a và b là các ước của $41,$ có tích bằng $41.$ Nhận thấy 41 là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

a	-41	-1	1	41
b	-1	-41	41	1
$x=\dfrac{a-b}{4}$	-10	10	-10	10
$y=\dfrac{a+3b-4}{4}$	-12	-32	30	10

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(-10;-12);(10;-32);(-10;30);(10;10)$

Câu 4



4a. Vì tam giác ABC vuông cân tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC. Suy ra $OA = OC = OB$ và $\widehat{OAB} = \widehat{ACO} = 45^0$

Xét ΔOEA và ΔOMC có: $OA = OC; \widehat{OAB} = \widehat{ACO} = 45^0; AE = CM\,(gt)$

$\Rightarrow \Delta OEA = \Delta OMC\,(c.g.c) \Rightarrow OE = OM \;\&\; \widehat{EOA} = \widehat{MOC}$ (1)

Vì AO là đường trung tuyến của tam giác cân ABC nên AO cũng là đường cao

$\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{MOC} = \widehat{AOC} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{AOM} + \widehat{AOE} = \widehat{EOM} = 90^0$

Vì $OE = OM \;\&\; \widehat{EOM} = 90^0$ nên ΔOEM vuông cân tại O

4b.

Vì $ME // AN$ nên theo định lý Ta – let ta có: $\dfrac{BM}{MN} = \dfrac{BE}{EA}$ (3)

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC,$ mà $AE = CM$ nên $BE = AM$

Do đó, ở (3) ta thay BE bởi AM, thay EA bởi MC ta được:

$\dfrac{BM}{MN} = \dfrac{AM}{MC}$ (4) $\Rightarrow AB // CN$ (Theo định lý Ta let đảo)

Mà $AB \perp AC \Rightarrow CN \perp AC$

4c.

Từ $ME//AN \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OHA}$ (cặp góc đồng vị)

Mà $\widehat{OME} = 45^0$ (vì ΔOEM vuông cân tại O) suy ra $\widehat{OHA} = 45^0 = \widehat{ACB}$

Hay $\widehat{MHA} = \widehat{ACB}$. Kết hợp với $\widehat{OMC} = \widehat{AHM}$ (đối đỉnh) (1)

$\Rightarrow \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{MC}{MH}$, kết hợp $\widehat{OMA} = \widehat{CMH}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta OMA \sim \Delta CMH \, (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{MHC} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHC} = \widehat{MHA} + \widehat{MHC} = 90^0$, suy ra $CH \perp AN$

Xét tam giác AHC và tam giác CAN sẽ đồng dạng theo trường hợp góc góc

$\Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{AC}{AN} \Rightarrow AH.AN = AC.HC$ không đổi

Câu 5

Chứng minh $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2} \quad (1)$

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Đặt : $x = b+c; y = c+a; z = a+b$. Suy ra $x, y, z > 0$ và ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[9 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right)\right] - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[9 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz}\right] - 3 \geq \frac{1}{2}.9 - 3 = \frac{3}{2}$$

(Vì $\dfrac{(x-y)^2}{xy} + \dfrac{(x-z)^2}{xz} + \dfrac{(y-z)^2}{yz} \geq 0$)

Vậy $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$. Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Chứng minh : $$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\quad(2)$$

Thật vậy, do vai trò của a,b,c như nhau nên không mất tính tổng quát , ta có thể giả sử : $a\ge b\ge c$

Xét hiệu :

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=\frac{\left(a^2b-ab^2\right)+\left(a^2c-ac^2\right)}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}+\frac{\left(b^2a-ba^2\right)+\left(b^2c-bc^2\right)}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}+\frac{\left(c^2a-ca^2\right)+\left(c^2b-cb^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}$$

$$=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}+\frac{-ab(a-b)+bc(b-c)}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}+\frac{-ac(a-c)-bc(b-c)}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}$$

$$=ab(a-b)\left(\frac{1}{\left(b^2+c^2\right)(b+c)}-\frac{1}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}\right)$$

$$+bc(b-c)\left(\frac{1}{\left(c^2+a^2\right)(c+a)}-\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)}\right)$$

Vì giá trị của các biểu thức trong ngoặc đều không âm

Vậy $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm . Dấu " =" xảy ra khi $a=b=c$