

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT BA ĐÌNH**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**RÈN LUYỆN CHO HỌC SINH KỸ NĂNG GIẢI MỘT SỐ BÀI
TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ**

Người thực hiện: Hoàng Thị Uyên

Chức vụ: Phó Hiệu trưởng

SKKN thuộc môn: Toán

THANH HÓA NĂM 2016

KÝ HIỆU CÁC CHỮ VIẾT TẮT

GV:	Giáo viên
HS:	Học sinh
HH:	Hình học
PPVT:	Phương pháp véc tơ
SGK, SBT:	Sách giáo khoa, sách bài tập
THPT:	Trung học phổ thông
PT:	Phương trình
HPT:	Hệ phương trình

1.1. Lý do chọn đề tài.....	2
1.2. Mục đích nghiên cứu.....	3
1.3. Đối tượng nghiên cứu.....	3
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	3
2. NỘI DUNG.....	4
2.1. Cơ sở lý luận.....	4
Cơ sở khoa học.....	5
2.2. Thực trạng vấn đề của sáng kiến kinh nghiệm.....	6
2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.....	7
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.....	24
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	25

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lý do chọn đề tài

Theo đường lối đổi mới giáo dục của Đảng là đổi mới căn bản, toàn diện trong giáo dục; ngành giáo dục nước ta đang đổi mới phương pháp giáo dục đào tạo, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện thành nếp tư duy sáng tạo của người học. Từng bước áp dụng phương pháp tiên tiến và phương tiện hiện đại vào quá trình dạy học, đảm bảo điều kiện và thời gian tự học, tự nghiên cứu cho học sinh.

Việc đổi mới phương pháp dạy học môn toán ở trường THPT là làm cho học sinh học tập tích cực, chủ động, chống lại thói quen học tập thụ động. Làm cho học sinh nắm được một cách chính xác, vững chắc và có hệ thống những kiến thức và kỹ năng toán học phổ thông cơ bản, hiện đại, phù hợp với thực tiễn và có năng lực vận dụng những tri thức đó vào những tình huống cụ thể, vào đời sống, vào lao động sản xuất, vào việc học tập các bộ môn khoa học khác.

Việc giải bài tập toán là hình thức tốt nhất để củng cố, hệ thống hóa kiến thức và rèn luyện kỹ năng, là một hình thức vận dụng kiến thức đã học vào những vấn đề cụ thể, vào thực tế, vào những vấn đề mới, là hình thức tốt nhất để giáo viên kiểm tra về năng lực, về mức độ tiếp thu và khả năng vận dụng kiến thức đã học của học sinh.

Thực tiễn dạy học cho thấy: Việc sử dụng phương pháp véc tơ trong việc giải các bài toán, học sinh có thêm những công cụ mới để diễn đạt, suy luận để giải toán, tránh được ảnh hưởng không có lợi của trực giác, từ đó cho thấy bất kỳ một vấn đề gì đều được xem xét và giải quyết trên quan điểm khoa học, với những cách tiếp cận vấn đề khác nhau sẽ đưa ra các phương pháp khác nhau đều đúng đắn. Đây cũng là dịp tốt để học sinh làm quen với ngôn ngữ toán học cao cấp, từ đó giáo dục học sinh cách nhìn cởi mở khoa học đối với mọi môn học liên quan. Đồng thời cũng thấy rằng việc sử dụng không thành thạo phương pháp trên, lúng túng và giải sai bài tập (đặc biệt những bài tập liên quan đến véc tơ, các pt, hệ pt chứa căn giải thông thường không thuận lợi) đã làm học sinh gặp nhiều khó khăn, hạn chế tới kết quả học tập trong phạm vi chuyên đề sử dụng “phương pháp véc tơ” để giải toán.

Với những lí do trên, tôi chọn đề tài nghiên cứu ***“Rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải một số bài toán bằng phương pháp VÉC TƠ”***.

1.2. Mục đích nghiên cứu:

Nghiên cứu phương pháp véc tơ giải bài tập toán theo hướng hình thành và rèn luyện cho học sinh kỹ năng vận dụng kiến thức véc tơ để giải toán.

Dựa theo chuẩn kiến thức kỹ năng hình học 10 của Bộ GD-ĐT và xuất phát từ thực tiễn giảng dạy nghiên cứu phương pháp dạy học bài tập hình học lớp 10 và một số bài tập đại số lớp 10 theo phương pháp dùng véc tơ, nhằm rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Kỹ năng giải bài tập hình học lớp 10 và các bài tập giải pt, hệ pt bằng phương pháp véc tơ.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Từ bài toán cụ thể khái quát thành dạng, có cách giải tương ứng cho từng dạng bài tập đó. Hoặc ngược lại từ cách giải chung của dạng toán áp dụng vào làm ví dụ minh họa và có hệ thống bài tập áp dụng.

Cụ thể là giải một số bài tập hình học phẳng bằng phương pháp véc tơ trong chương I+II SGK hình học 10 (theo chương trình cơ bản và nâng cao), giải một số phương trình, hệ phương trình bằng cách sử dụng các tính chất, phép toán về véc tơ để giải.

Phương pháp điều tra khảo sát thực tế, thu thập thông tin về việc vận dụng véc tơ trong giải bài toán của học sinh lớp 10 ở mức độ nào, để có cách xử lý các số liệu đó.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý luận

Theo phương pháp dạy học toán mỗi bài tập toán đặt ra ở một thời điểm nào đó của quá trình dạy học đều chứa đựng một cách tường minh hay ẩn chứa những chức năng khác nhau. Các chức năng đó là:

Chức năng dạy học; Chức năng giáo dục;

Chức năng phát triển; Chức năng kiểm tra.

Các chức năng đều hướng tới việc thực hiện các mục đích dạy học, cụ thể:

- Chức năng dạy học: Bài tập toán nhằm hình thành củng cố cho học sinh những tri thức, kỹ năng, kỹ xảo ở các giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học.

- Chức năng giáo dục: Bài tập toán nhằm hình thành cho học sinh thế giới quan duy vật biện chứng, hứng thú học tập, sáng tạo, có niềm tin và phẩm chất đạo đức của người lao động mới.

- Chức năng phát triển: Bài tập toán nhằm phát triển năng lực tư duy cho học sinh, đặc biệt là rèn luyện những thao tác trí tuệ hình thành những phẩm chất của tư duy khoa học.

- Chức năng kiểm tra: Bài tập toán nhằm đánh giá mức độ kết quả dạy và học, đánh giá khả năng độc lập học toán, khả năng tiếp thu, vận dụng kiến thức và trình độ phát triển của học sinh.

Hiệu quả của việc dạy toán phần lớn phụ thuộc vào việc khai thác và thực hiện một cách đầy đủ các chức năng có thể có của các tác giả viết sách giáo khoa đã có dụng ý đưa vào chương trình. Người giáo viên phải có nhiệm vụ khám phá và thực hiện dụng ý của tác giả bằng năng lực sư phạm của mình.

Trong các bài toán có nhiều bài toán chưa có hoặc không có thuật giải và cũng không có một thuật giải tổng quát nào để giải tất cả các bài toán. Chúng ta chỉ có thể thông qua việc dạy học giải một số bài toán cụ thể mà dần dần truyền thụ cho học sinh cách thức, kinh nghiệm trong việc suy nghĩ, tìm tòi lời giải cho mỗi bài toán. Rèn luyện cho học sinh giải bài tập toán không có nghĩa là giáo viên cung cấp cho học sinh lời giải bài toán. Biết lời giải của bài toán không quan trọng bằng làm thế nào để giải được bài toán. Để làm tăng hứng thú học tập của học sinh, phát triển tư duy, thầy giáo phải hình thành cho học sinh một quy trình chung, phương pháp tìm tòi lời giải cho một

bài toán.

Chúng ta thường hướng dẫn các em tìm lời giải cho một bài toán được tiến hành theo 4 bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán

Để giải được một bài toán, trước hết phải hiểu bài toán đó và có hứng thú với việc giải bài toán đó. Vì thế người giáo viên phải chú ý gợi động cơ, kích thích trí tò mò, tính sáng tạo cho học sinh và giúp các em tìm hiểu bài toán một cách tổng quát. Tiếp theo phải phân tích bài toán đã cho:

- Đây là ẩn số, đây là dữ kiện.
- Vẽ hình, sử dụng các kí hiệu thích hợp (nếu cần).
- Phân biệt các thành phần khác nhau của điều kiện, có thể diễn đạt các điều kiện đó dưới dạng công thức toán học được không?

Bước 2: Xây dựng chương trình giải.

Phải phân tích bài toán đã cho thành nhiều bài toán đơn giản hơn. Phải huy động những kiến thức đã học (định nghĩa, định lí, quy tắc...) có liên quan đến những điều kiện, những quan hệ trong đề toán rồi lựa chọn trong số đó những kiến thức gần gũi hơn cả với dữ kiện của bài toán rồi mò mẫm, dự đoán kết quả. Xét vài khả năng có thể xảy ra, kể cả trường hợp đặc biệt. Sau đó, xét một bài toán tương tự hoặc khái quát hóa bài toán đã cho.

Bước 3: Thực hiện chương trình giải.

Bước 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.

- Kiểm tra lại kết quả, xem lại các lập luận trong quá trình giải.
- Nhìn lại toàn bộ các bước giải, rút ra tri thức phương pháp để giải một loại bài toán nào đó.
- Tìm thêm các cách giải khác (nếu có thể).
- Khai thác kết quả có thể có của bài toán.
- Đề xuất bài toán tương tự, bài toán đặc biệt hoặc khái quát hóa bài toán tổng quát.

Công việc kiểm tra lời giải của một bài toán có ý nghĩa quan trọng. Trong nhiều trường hợp, sự kết thúc của bài toán này lại mở đầu cho một bài toán khác. Vì vậy "Cần phải luyện tập cho học sinh có một thói quen kiểm tra lại bài toán, xét xem có sai lầm hay thiếu sót gì không, nhất là những bài toán có đặt điều kiện hoặc bài toán đòi hỏi phải biện luận. Việc kiểm tra lại lời giải yêu cầu học sinh thực hiện một cách thường xuyên".

Cơ sở khoa học

Xuất phát từ các yêu cầu đối với học sinh về kiến thức cơ bản và kỹ năng cơ bản trong chương I, II- SGK HH cơ bản và nâng cao là:

- Về kiến thức cơ bản: nắm được khái niệm vectơ, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, vectơ không, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc trung điểm, định nghĩa và tính chất của phép cộng, phép trừ, phép nhân vectơ với số thực, tích vô hướng của hai vectơ.

- Về kỹ năng cơ bản: biết dựng một vectơ bằng vectơ cho trước, biết lập luận hai vectơ bằng nhau, vận dụng quy tắc hình bình hành, quy tắc ba điểm để dựng vectơ tổng và giải một số bài toán, biết xác định số thực k đối với hai vectơ cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$, vận dụng tính chất cơ bản của tích vô hướng, đặc biệt để xác định điều kiện cần và đủ của hai vectơ (khác vectơ-không) vuông góc với nhau, vận dụng tổng hợp kiến thức về vectơ để nghiên cứu một số quan hệ hình học như: tính thẳng hàng của ba điểm, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, giao điểm hai đường chéo của hình bình hành, bất đẳng thức vectơ,...

2.2. Thực trạng vấn đề của sáng kiến kinh nghiệm

Trong thực tế giảng dạy các khóa học sinh cho thấy: lớp 10G, 10E khóa 2012-2015 có 50 đến 60% học sinh và lớp 10G khóa 2015-2018 trường THPT Ba Đình- Nga Sơn có tới 80% học sinh thường gặp khó khăn khi vận dụng kiến thức vectơ vào giải quyết các bài tập, cụ thể là do: học sinh không biết vận dụng kiến thức các khái niệm, định lý, qui tắc về vectơ, không trở thành cơ sở của kỹ năng. Khi gặp các bài toán có liên quan đến vectơ thì hầu hết các em học sinh ngại giải, có những học sinh nản, không chịu suy nghĩ, tìm tòi cách giải quyết bài toán hoặc có những pt, hệ pt nếu dùng pp giải thông thường rất phức tạp nhưng nếu biết sử dụng phương pháp vectơ giải thì rất gọn.

Trong chương trình hình học lớp 10 học sinh được học về vectơ, các phép toán trên vectơ, các tính chất cơ bản của tích vô hướng và những ứng dụng của chúng, đặc biệt là những hệ thức quan trọng trong tam giác: Định lý Côsin, định lý Sin, công thức trung tuyến, các công thức tính diện tích tam giác...học sinh phải biết tận dụng các kiến thức cơ bản nói trên để giải một số bài toán hình học và bài toán thực tế. PPVT có nhiều tiện lợi trong việc giải các bài tập hình học cũng như đại số. Tuy vậy, khi sử dụng phương pháp này học sinh vẫn gặp phải một số khó khăn và không tránh khỏi những sai lầm trong khi giải.

Khó khăn thứ nhất mà học sinh gặp phải đó là lần đầu tiên làm quen với đối tượng mới là vectơ, các phép toán trên các vectơ. Các phép toán trên các vectơ lại có một số tính chất tương tự như đối với các số mà học sinh đã học

trước đó, do đó học sinh chưa hiểu rõ bản chất của các khái niệm và các phép toán nên dễ ngộ nhận, mắc sai lầm trong khi sử dụng PPVT.

Khó khăn thứ hai khi sử dụng PPVT là do thoát ly khỏi hình ảnh trực quan, hình vẽ nên khó tưởng tượng, hiểu bài toán một cách hình thức, không hiểu hết ý nghĩa hình học của bài toán. Vì học sinh có thói quen giải bài toán hình học là phải vẽ hình nên khi sử dụng PPVT để giải một số bài tập không sử dụng hình vẽ, học sinh gặp nhiều khó khăn hơn.

Khó khăn trong giải pt, hệ pt có chứa căn thức là việc qui về độ dài của véc tơ, chọn tọa độ của véc tơ sao cho hợp lý với các vế của pt hay hệ pt.

Học sinh thường gặp khó khăn khi chuyển bài toán từ ngôn ngữ hình học thông thường sang “ngôn ngữ véc tơ” và ngược lại. Vì vậy cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng chuyển tương đương những quan hệ hình học từ cách nói thông thường sang dạng véc tơ để có thể vận dụng công cụ véc tơ trong giải toán.

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề:

Đối với học sinh lớp 10, các em được học về véc tơ, các phép toán trên véc tơ (phép cộng, phép trừ, phép nhân véc tơ với số thực, tích vô hướng của hai véc tơ), sau đó là trục, hệ trục tọa độ, tọa độ của điểm, tọa độ của véc tơ và một vài ứng dụng đơn giản của phương pháp tọa độ. Tuy học sinh được học cả hai phương pháp: Véc tơ và tọa độ, phương pháp chủ yếu vẫn là phương pháp véc tơ. Bởi vì, các hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn được xây dựng nhờ véc tơ cùng các phép toán, đặc biệt là tích vô hướng của hai véc tơ được định nghĩa theo một đẳng thức véc tơ... Để giúp học sinh sử dụng thành thạo PPVT để giải các bài toán, tôi đã tiến hành giải pháp sau:

a. Áp dụng quy trình 4 bước trong dạy giải bài tập toán vào giải một số dạng bài toán hình học lớp 10 và pt, hpt chứa căn thức bằng phương pháp véc tơ:

Trước hết giáo viên cần rèn luyện cho học sinh nắm vững quy trình bốn bước giải bài toán bằng PPVT.

Bước 1: Chọn các véc tơ cơ sở.

Bước 2: Dùng phương pháp phân tích véc tơ và các phép toán véc tơ để biểu diễn, chuyển ngôn ngữ từ hình học thông thường (hoặc từ đại số) sang ngôn ngữ véc tơ.

Bước 3: Giải bài toán véc tơ.

Bước 4: Kết luận, đánh giá kết quả.

Giáo viên cần tận dụng các cơ hội để rèn luyện cho học sinh khả năng thực hiện bốn bước giải bài toán hình học bằng PPVT thông qua các bài tập, có thể minh họa quy trình bốn bước trên bằng ví dụ sau:

Bài toán: Cho góc xOy và hai điểm di chuyển trên hai cạnh của góc. M thuộc Ox , N thuộc Oy , luôn luôn thoả mãn $OM = 2ON$. Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn thuộc đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải:

Bước 1: Lấy điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho $OA = OB$, và chọn hai véc tơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ làm hai véc tơ cơ sở. Mọi véc tơ trong bài toán đều phân tích được (hoặc biểu thị được) qua hai véc tơ này.

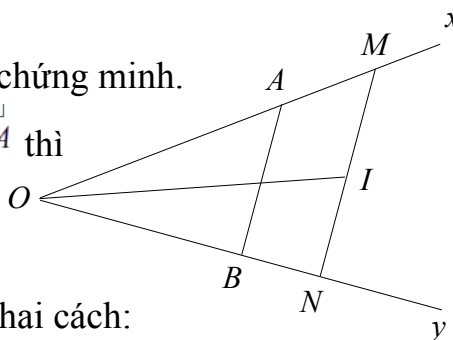
Bước 2: Giả thiết cho $OM = 2ON$, nên nếu $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OB}$, thì $\overrightarrow{OM} = 2k\overrightarrow{OA}$. Điều phải chứng minh là I thuộc một đường thẳng cố định (để thấy đường thẳng này đi qua O) tương đương $\overrightarrow{OI} = p\mathbf{v}$, với $\mathbf{v}$ là một véc tơ cố định nào đó.

Bước 3: Do I là trung điểm của MN , nên ta có

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}k(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Đặt $\frac{1}{2}k = p, 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \mathbf{v}$, ta được điều phải chứng minh.

Bước 4: Nhận xét: Nếu lấy $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ thì $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow$ đường thẳng cố định đó đi qua trung điểm $A'B$.



* Có thể tổng quát hoá bài toán theo hai cách:

- Thay cho giả thiết $OM = 2ON$ bằng $OM = m.ON$ (m là một hằng số).
- Thay cho kết luận: Trung điểm I của MN thuộc một đường thẳng cố

định bằng kết luận: Mỗi điểm chia MN theo tỷ số $\frac{IM}{IN} = \frac{p}{q}$ (p, q là hằng số dương) đều thuộc một đường thẳng cố định.

Trong quá trình hướng dẫn học sinh giải toán bằng PPVT, giáo viên cần chú ý đến những tri thức phương pháp:

Ở bước 1: Nên chọn các véc tơ cơ sở sao cho các véc tơ trong bài toán phân tích theo chúng thuận lợi nhất. Qua mỗi bài toán học sinh sẽ thấy việc chọn các véc tơ cơ sở như thế nào.

Ở bước 2: Cần rèn luyện cho học sinh chuyển đổi ngôn ngữ một cách thành thạo. Cách chuyển đổi như thế nào ta có thể thấy qua từng nhóm bài toán sẽ được trình bày dưới đây.

Ở bước 3: Cần nắm vững các phép toán véc tơ. Đồng thời, thông qua các bài tập cụ thể, giáo viên cần làm cho học sinh hiểu rõ được tính ưu việt của PPVT. Đặc biệt các bài tập về tìm tập hợp điểm, các bài tập về chứng minh 3 điểm thẳng hàng, chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc,... là những dạng toán có nhiều cơ hội để làm rõ vấn đề này.

b. Trước khi giải các bài tập theo hệ thống, tôi đã nhấn mạnh cho học sinh các kiến thức và bài tập cơ bản sau (vì đây là các tri thức phương pháp để giải các bài tập sau này).

A - Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ không cùng phương

Bài toán 1: (Bài 12-trang 17-SBT-HH10-nâng cao)

Chứng minh rằng hai véc tơ a và b cùng phương khi và chỉ khi có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $ma + nb = 0$. Suy ra điều kiện cần và đủ để a và b cùng phương là có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $ma + nb = 0$.

B-Tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ứng với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ($n \geq 2$).

Bài toán 2: Cho hai điểm A, B phân biệt và hai số α, β không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha + \beta = 0$ thì không tồn tại điểm M sao cho $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = 0$.

b) Nếu $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = 0$.

Bài toán 3: Cho hai điểm A, B và hai số thực α, β . Chứng minh:

Nếu $\alpha + \beta = 0$ thì véc tơ $\overline{v} = \alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB}$ không đổi, không phụ thuộc vào vị trí điểm M

Bằng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh được kết quả tổng quát:

- Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và n số thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm I sao cho: $\alpha_1 \overline{IA_1} + \alpha_2 \overline{IA_2} + \dots + \alpha_n \overline{IA_n} = 0$ (1).

Điểm I gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ứng với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ($n \geq 2$).

Từ (1), với điểm M tùy ý ta có:

$$\alpha_1 \overline{MA_1} + \alpha_2 \overline{MA_2} + \dots + \alpha_n \overline{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overline{MI}$$

Công thức này thường xuyên được sử dụng trong những bài toán có liên quan tới tâm tỉ cự. Ta gọi nó là công thức thu gọn.

Với $n = 3$ và $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, ta thấy đây là tính chất trọng tâm của tam giác được trình bày dưới đây.

Bài toán 4: Cho tam giác ABC và 3 số α, β, γ không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

- a. Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB} + \gamma \vec{IC} = \vec{0}$.
- b. Nếu $\alpha + \beta + \gamma = 0$ thì không tồn tại điểm M sao cho $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \vec{0}$.

C- Tính chất trung điểm.

Bài toán 5: M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$ Hoặc với điểm M bất kỳ ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

D- Tính chất trọng tâm tam giác.

Bài toán 6: Cho tam giác ABC. CMR điểm G là trọng tâm tam giác khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ hoặc với điểm M bất kỳ ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{MG}$.

E- Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng.

Bài toán 7: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi thoả mãn một trong các điều kiện sau:

1. Tồn tại một số k khác 0 sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$
2. Cho một điểm I và một số t nào đó sao cho $\vec{IA} = t\vec{IB} + (1-t)\vec{IC}$ là điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng.

F- Công thức điểm chia.

Bài toán 8: Cho đoạn thẳng AB, số thực k khác 0 và 1. Ta nói điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k nếu $\vec{MA} = k\vec{MB}$. CMR với điểm C bất kỳ ta có:

$$\vec{CM} = \frac{1}{1-k}\vec{CA} - \frac{k}{1-k}\vec{CB} \quad (*)$$

Ta gọi (*) là công thức điểm chia

G- Công thức hình chiếu.

Cho hai véc tơ $\vec{OA}, \vec{OB}$. Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA khi đó: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$.

Véc tơ $\vec{OB'}$ gọi là hình chiếu của $\vec{OB}$ trên đường thẳng OA; Công thức $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$ gọi là công thức hình chiếu.

H- Bất đẳng thức véc tơ

Định lí: Trong hệ trục tọa độ Đề-Các vuông góc Oxy, cho hai véc-tơ

$$u = (x_1; y_1) \quad v = (x_2; y_2) \quad . \text{ Khi đó } u, v \text{ thoả mãn các bất đẳng thức:}$$

$$|u| + |v| \geq |u + v|$$

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Các đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

c. Hệ thống bài tập và phương pháp giải:

Trong thực tế giải các bài toán, không phải lúc nào cũng làm theo 4 bước như trên, không phải lúc nào cũng phân tích các véc tơ theo hai véc tơ cơ sở cho trước, mà có thể giải quyết bài toán một cách linh hoạt.

Việc rèn luyện cho học sinh thông qua một hệ thống bài tập đã được phân loại sẽ đem lại hiệu quả cao trong dạy học.

Việc đưa ra hệ thống bài tập đã được phân loại nhằm giúp học sinh có kinh nghiệm giải toán và rèn luyện các kỹ năng:

- Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véc tơ.
- Phân tích một véc tơ thành một tổ hợp véc tơ.
- Kỹ năng biết cách ghép một số véc tơ trong một tổ hợp véc tơ.
- Biết khái quát hoá một số những kết quả để vận dụng vào bài toán tổng quát hơn.

Đặc biệt biết vận dụng quy trình bốn bước giải bài toán hình học bằng PPVT vào giải các bài tập hình học.

* Bản thân tôi đã dùng hai hệ thống bài tập: Phần 1 là Các bài toán hình học lớp 10 (đã phân 4 dạng) và phần 2 là các pt, hệ pt giải bằng PPVT trong các tình huống dạy học khác nhau như: Làm bài tập về nhà, bài tập phân hoá, dùng để bồi dưỡng HS khá giỏi, dùng để kiểm tra,... góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh (chủ yếu là bồi dưỡng học sinh khá giỏi).

PHẦN 1: Dùng PPVT giải các bài toán hình học lớp 10: Phân làm 4 dạng

Dạng 1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Đối với dạng toán này ta có thể dùng điều kiện cùng phương của hai véc tơ để giải toán.

Véc tơ $\vec{b}$ cùng phương với véc tơ $\vec{a} (a \neq 0)$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$. Từ đó ứng dụng vào dạng toán:

Cho 3 điểm A, B, C thoả mãn một điều kiện xác định. Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

Phương pháp:

- Hãy xác định véc tơ $\vec{AB}, \vec{AC}$
- Chỉ ra rằng hai véc tơ đó cùng phương, nghĩa là hãy chỉ ra số thực k sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

Ví dụ: (Bài 19-tr8-SBT HH10 nâng cao)

Rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải một số bài toán bằng phương pháp VÉC TƠ

Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỷ số lần lượt là m, n, p (đều khác 1).

Chứng minh rằng: M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (Định lý Mê-nê-laút).

Hướng dẫn giải: (Theo quy trình 4 bước giải bài toán HH bằng PPVT)

Bước 1: GV chọn véc tơ cơ sở.

HS: Chọn hai véc tơ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ làm hai véc tơ cơ sở. Mọi véc tơ xuất hiện trong bài toán đều phân tích được theo hai véc tơ này.

Bước 2:

GV: Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỷ số lần lượt là m, n, p (đều khác 1) tương đương với các đẳng thức véc tơ nào?

HS: $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC}; \overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$.

GV: Điều phải chứng minh M, N, P thẳng hàng tương đương với đẳng thức véc tơ nào phải xảy ra?

HS: - Chỉ ra số thực k sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN}$ hoặc

- Với điểm O bất kỳ và một số thực ta có $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{ON} + (1-t)\overrightarrow{OP}$.

Bước 3: Lấy điểm O nào đó, ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB}}{1-m}; \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC}}{1-n}; \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OA}}{1-p}$$

Để đơn giản tính toán, ta chọn điểm O trùng với điểm C khi đó ta có:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}; \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1-n}; \overrightarrow{CP} = \frac{p\overrightarrow{CA}}{1-p} \quad (1)$$

Từ hai đẳng thức cuối của (1) ta có:

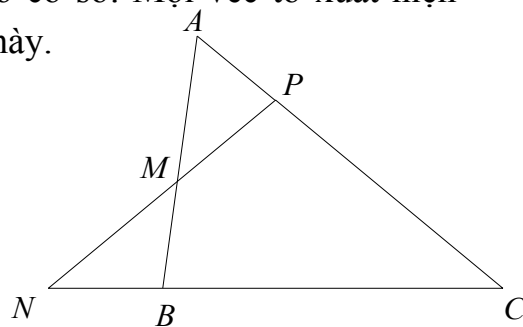
$$\overrightarrow{CB} = (1-n)\overrightarrow{CN}; \overrightarrow{CA} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

Và thay vào đẳng thức đầu của (1) ta được:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP} - \frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}$$

Từ Bài toán 7: Điều kiện cần và đủ để 3 điểm M, N, P thẳng hàng là:

$$\frac{p-1}{p(1-m)} - \frac{m(1-n)}{1-n} = 1 \Leftrightarrow p-1 - pm(1-n) = p(1-m) \Leftrightarrow mnp = 1$$



Bước 4: Vậy cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo tỷ số m, n, p thì M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi: $mnp=1$.

Lưu ý: Học sinh có thể vận dụng cách chứng minh bài toán trên vào giải các bài toán sau:

1/ *Bài 38-tr11-SBT- HH10-nâng cao.*

Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn trên ngoại tiếp O. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

b/ $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OH}$

2/ *Bài 39 - tr11 - SBT - HH10 - nâng cao.*

Cho 3 dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của hình tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của 3 tam giác ABC_1, BCA_1 và ACB_1 nằm trên một đường thẳng.

3/ *Bài toán:* Cho tam giác ABC đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh 3 điểm M, N, I thẳng hàng.

Chứng minh trên có sử dụng kết quả bài tập sau:

4/ *Bài 37b - tr11- SBT HH10 - nâng cao*

Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

*** Bài tập**

Bài 1: *Bài 26 - SBT HH10 - nâng cao*

Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB.

Bài 2: Trên các cạnh của tam giác ABC, lấy các điểm M, N, P sao cho: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AN}$ qua $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AP}$, từ đó suy ra M, N, P thẳng hàng.

Bài 3: Cho tam giác ABC, gọi D, I, N là các điểm xác định bởi hệ thức: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}, \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CN}$. Chứng minh A, I, D thẳng hàng.

Bài 4: *Bài 20a-tr8-SBT HH10-nâng cao*

Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) Nếu 3 điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì 3 điểm A_2, B_2, C_2 cũng thế.

b) Trọng tâm của 3 tam giác ABC, $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ thẳng hàng.

Bài 5: Cho tam giác ABC đều, tâm O. M bất kỳ ở trong tam giác ABC và có hình chiếu xuống 3 cạnh BC, CA, AB tương ứng là P, Q, R. Gọi K là trọng tâm tam giác PQR.

a) Chứng minh: M, O, K thẳng hàng.

b) Cho N là một điểm tùy ý trên BC. Hạ NE, NF tương ứng vuông góc với AC, AB. Chứng minh N, J, O thẳng hàng, với J là trung điểm của EF.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Vận dụng các kiến thức và PPVT để giải quyết các bài toán về quan hệ vuông góc sẽ cho lời giải khá rõ ràng, ngắn gọn, ta có thể quy về bài toán chứng minh hai đường thẳng vuông góc, hay từ định nghĩa tích vô hướng của hai véc tơ ta có thể suy ra: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai véc tơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ nằm trên đường thẳng a, $\vec{b}$ nằm trên đường thẳng b thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A; M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AC, E là trung điểm của MH. Chứng minh rằng $AE \perp BH$.

Hướng dẫn giải:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán.

Trước hết học sinh phải tìm hiểu bài toán một cách tổng thể: Đây là dạng toán chứng minh hai đường thẳng vuông góc. Tiếp theo phải phân tích bài toán đã cho.

- Bài toán cho biết gì? (Cho tam giác ABC cân tại A, H là hình chiếu của M trên AC, E là trung điểm của MH).

- Bài toán hỏi gì? (Chứng minh $AE \perp BH$).

- Tìm mối liên hệ giữa cái phải tìm với cái đã cho.

Bước 2: Xây dựng chương trình giải:

Để chứng minh $AE \perp BH$, ta phải chứng minh những gì? (phải chứng minh đẳng thức véc tơ $\vec{AE} \cdot \vec{BH} = 0$)

Để sử dụng giả thiết $AM \perp BC$ (Hay $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$)

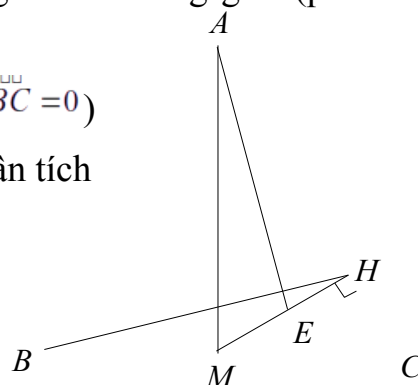
và $MH \perp AC$ (Hay $\vec{MH} \cdot \vec{AC} = 0$) ta phải phân tích

véc tơ $\vec{AE}, \vec{BH}$ theo những véc tơ nào?

Khi đó $\vec{AE} \cdot \vec{BH} = ?$

Bước 3: Thực hiện chương trình giải

$$\begin{aligned} 2\vec{AE} \cdot \vec{BH} &= (\vec{AM} + \vec{AH}) \cdot (\vec{BM} + \vec{MH}) \\ &= \vec{AM} \cdot \vec{MH} + \vec{AH} \cdot \vec{BM} \\ &= \vec{AM} \cdot \vec{MH} + (\vec{AM} + \vec{MH}) \cdot \vec{BM} = \vec{AM} \cdot \vec{MH} + \vec{MH} \cdot \vec{MC} \\ &= (\vec{AM} + \vec{MC}) \cdot \vec{MH} = \vec{AC} \cdot \vec{MH} = 0 \Rightarrow \vec{AE} \perp \vec{BH} \end{aligned}$$



- Bước 4:
- Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.
 - Kiểm tra lại các bước giải của bài toán.

*** Bài tập**

Bài 1: (Bài 8-tr5-SGK-HH10-nâng cao)

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông tại A là $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2$.

Bài 2: Bài 11-tr40-SGK-HH10-nâng cao

Tam giác MNP có $MN=4$, $MP=8$, $\widehat{M} = 60^\circ$. Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k \overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

Bài 3: Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC và H là điểm nằm trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MH}$ là điều kiện cần và đủ để $AH \perp BC$.

Bài 4: Cho ΔABC vuông cân tại đỉnh A, trên các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt lấy các điểm M, N, E sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CE}{EA}$ Chứng minh rằng: $AN \perp ME$

Bài 5: Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ gọi I là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng góc $\widehat{BIC} = 90^\circ$

Bài 6: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O; R). Chứng minh rằng $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = 4R^2$.

Bài 7: Bài 32-tr43-SBT-HH10-nâng cao

Bài 8: Bài 35-tr43-SBT-HH10-nâng cao

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức véc tơ.

Đẳng thức véc tơ là một đẳng thức mà cả hai vế là các biểu thức véc tơ. Mỗi biểu thức chứa các hạng tử là véc tơ và chúng được nối với nhau bởi các dấu của các phép toán véc tơ hoặc một trong hai vế của đẳng thức đó là 0 .

Để chứng minh các bài tập dạng này, chủ yếu ta sử dụng các quy tắc 3 điểm, quy tắc hình bình hành để dựng các véc tơ được cho ở hai vế của đẳng thức, sử dụng công thức trọng tâm của tam giác, trung điểm của đoạn thẳng, tính chất của các phép toán, các tính chất của tích vô hướng của hai véc tơ để rút gọn hai vế...

Ví dụ: Chứng minh rằng với 4 điểm A, B, C, D ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (*)$$

Hướng dẫn giải:

Bước 1: Chọn véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ làm các véc tơ cơ sở. Mọi véc tơ xuất hiện trong bài toán đều phân tích được qua véc tơ này.

Bước 2: Bài toán đã cho dưới dạng ngôn ngữ véc tơ.

Bước 3:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0 \end{aligned}$$

Bước 4: Nhận xét:

1. Đẳng thức véc tơ (*) được gọi là hệ thức Ôle. Có thể dùng hệ thức Ôle để chứng minh: Trong tam giác 3 đường cao đồng quy.

Thật vậy, giả sử các đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC cắt nhau tại H. Áp dụng hệ thức Ôle cho 4 điểm H, A, B, C ta có:

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Do $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ từ đó $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ tức $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$.

2. Kết quả vừa chứng minh là sự mở rộng đẳng thức

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ khi A, B, C, D nằm trên một đường thẳng.}$$

* Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Chứng minh rằng

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
2. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$
3. $GA^2 + GB^2 + GC^2 = a^2 + b^2 + c^2$, với a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác ABC.
4. Nếu tam giác ABC nội tiếp (O; R) thì $OG^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.
5. Nếu trọng tâm G của tam giác ABC thoả mãn điều kiện $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = 0$ thì tam giác ABC đều.

Bài 2: Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm, I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh:

1. $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$ (a, b, c là độ dài các cạnh tam giác ABC).
2. $\tan \overrightarrow{AHA} + \tan \overrightarrow{BHB} + \tan \overrightarrow{CHC} = 0$
3. $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, trong đó M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC, S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích của tam giác MBC, MCA, MAB.
4. $a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$.

Bài 3: cho tam giác đều ABC tâm O, M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hạ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$$

Bài 4: Cho tứ giác ABCD, gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

Dạng 4: Các bài toán tìm tập hợp điểm.

Trong hình học phẳng thường chỉ đề cập đến bài toán quỹ tích của điểm M chuyển động trong mặt phẳng thoả mãn điều kiện nào đó.

Bằng phương pháp tổng hợp chỉ nghiên cứu bài toán quỹ tích trên các bài toán quỹ tích cơ bản. Bằng phương pháp véc tơ nghiên cứu quỹ tích của điểm M chuyển động trong mặt phẳng thoả mãn điều kiện nào đó (ta gọi tính chất α) theo nguyên tắc chung là phải thiết lập được tính tương ứng giữa tính chất α với các điều kiện của các véc tơ có liên quan đến điểm M và từ đó mô tả hình $H = \{M/M \text{ có tính chất } \alpha\}$. Do đó phạm vi nghiên cứu được mở rộng hơn và nhiều bài cho lời giải khá dễ dàng.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k (k \in \mathbb{R})$

b) $2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = a^2$

(a là độ dài cạnh BC)

Hướng dẫn giải:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}^2 = \frac{AB^2}{4} + k$$

* Nếu $\frac{AB^2}{4} + k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$ Tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\frac{AB^2}{4} + k}$

* Nếu $k = -\frac{AB^2}{4} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow$ Tập hợp M là điểm I.

* Nếu $\frac{AB^2}{4} + k < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow$ tập hợp điểm M là tập rỗng.

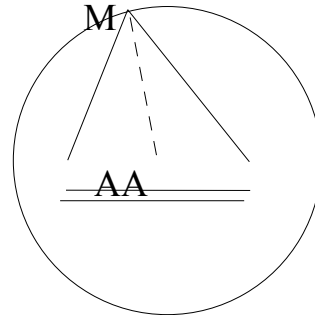
* Nếu $k = 0$ ta có ngay $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$ tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB.

b) $2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot (2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = a^2 \quad (1)$

Chọn điểm K thoả mãn: $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 0$. K cố định $\Rightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MK}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MK} = \frac{a^2}{3} \quad (1)$$

Gọi I là trung điểm của BK, và biến đổi như câu a) ta được:



$$(1) \Leftrightarrow MI^2 = \frac{BK^2}{4} + \frac{a^2}{3} \text{ có thể thấy } BK = \frac{a}{3}$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow IM^2 = \frac{13a^2}{36} \Rightarrow IM = \frac{a\sqrt{13}}{6}$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\frac{a\sqrt{13}}{6}$

Ví dụ 2: Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = k$.

Hướng dẫn giải:

Ta tiến hành biến đổi bài toán về dạng quen thuộc. Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB ta có: $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = k \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot (\overline{AH} + \overline{HM}) = k$

$\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AH} = k$ điều này chứng tỏ H là điểm cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với AH tại H.

Chú ý rằng trong quá trình lí luận, ta đã sử dụng phép biến đổi tương đương, vì vậy các phần thuận và đảo được chứng minh song song. Giới hạn quỹ tích chính là phần đảo. Bài toán này được xem là một bài toán cơ bản, Phần lớn các bài toán phức tạp đều được đưa về bài toán này qua một số phép biến đổi tương đương.

*** Bài tập:**

Bài 1: Cho hai điểm phân biệt A, B và số dương $k \neq 1$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn: $\frac{MA}{MB} = k$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a) $2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = |\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC}|$

b) $(\overline{MB} + \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC}) = 0$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \frac{1}{2}(\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)$$

c)

d) Cho tam giác ABC đều cạnh a tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} = \frac{5a^2}{2}$$

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MA}^2 = 0$$

Bài 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 3\overline{MD}^2 = -\frac{4}{3}a^2$

b) $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot (\overline{MC} - \overline{MB}) = 3a^2$

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Hai điểm M, N thay đổi trên các cạnh AB, CD

sao cho: $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$

Hệ thống bài tập trên cùng với những kỹ năng giải toán cần thiết như: `

Chuyển bài toán sang ngôn ngữ véc tơ, phân tích một véc tơ thành một tổ hợp véc tơ, kỹ năng biết cách ghép một số véc tơ trong một tổ hợp véc tơ... đã giúp học sinh dễ nhận dạng và tìm được cách giải cho mỗi bài toán cụ thể, giúp học sinh có hứng thú học tập môn toán, góp phần phát triển năng lực giải toán

Sự phân dạng các bài tập trên đã tạo điều kiện cho học sinh tùy theo năng lực, trình độ của mình có thể chủ động, sáng tạo hơn khi học tập, nghiên cứu về chủ đề véc tơ trong chương trình HH 10 (Cả sách cơ bản và nâng cao).

PHẦN 2: Dùng phương pháp véc tơ để giải phương trình, hệ phương trình chứa căn thức:

Trước hết tôi cho học sinh nhắc lại các bất đẳng thức véc tơ: Trong hệ trục tọa độ Đề-Các vuông góc Oxy, cho hai véc-tơ $u = (x_1; y_1)$ $v = (x_2; y_2)$. Khi đó

$$|u| + |v| \geq |u + v| \quad \text{và} \quad |u| \cdot |v| \geq u \cdot v$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi 2 véc tơ u, v cùng hướng

Đặc biệt lưu ý học sinh cách đưa pt, hpt về dạng độ dài các véc tơ, sau đó là kỹ năng chọn tọa độ của các véc tơ sao cho phù hợp với đề bài toán.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}$ (1)

Giải: Sử dụng phương pháp véc-tơ:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x+1)^2 + 3^2} = \sqrt{2^2 + 5^2}$$

$$u = (x-1; 2)$$

$$v = (x+1; 3)$$

$$u + v = (2x; 5)$$

Nếu chọn 2 véc tơ:

và

thì

không thỏa

$$|u| + |v| \geq |u + v|$$

$$u = (x-1; 2)$$

$$v = (-x-1; 3)$$

mãn BĐT:

nên phải chọn

và

thì

$$u + v = (-2; 5)$$

$$|u| + |v| \geq |u + v|$$

khi đó áp dụng bất đẳng thức

, ta có dấu đẳng thức xảy

$$\Leftrightarrow u = kv$$

ra khi và chỉ khi hai véc tơ cùng hướng

($k > 0$ do cả 2 véc tơ cùng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = k(-1 - x) \\ 2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

khác)

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x =$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

Giải: Điều kiện: $-1 \leq x \leq 3$

Đặt $u = (x; 1)$ $v = (\sqrt{x+1}; \sqrt{3-x})$,

Theo BĐT véc-tơ: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq \vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \leq 2\sqrt{x^2+1}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ cùng hướng $\Leftrightarrow u = kv$ ($k > 0$ do

cả hai véc tơ cùng khác 0)

$$\begin{cases} x = k\sqrt{x+1} \\ 1 = k\sqrt{3-x} \\ k > 0 \end{cases} \quad (*) \quad \text{Để thấy } x = -1 \text{ không thỏa mãn hệ } (*)$$

Với $x \neq -1$, rút k từ phương trình đầu $k = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$, thay vào phương trình thứ hai

của (*) ta được: $\frac{x\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} = 1$ (**)

Với $x \in (-1; 0]$ không là nghiệm của (**)(vì VP=1>0),

Với $x \in (0; 3]$ khi đó hai vế của (**) không âm, bình phương hai vế ta được phương trình tương đương: $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt: $x = 1; x = 1 \pm \sqrt{2}$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{3y} = 6 \\ \sqrt{3x+7} + \sqrt{3y+7} = 8 \end{cases} \quad (I)$$

Giải: Điều kiện: $x, y \geq 0$ Đặt $u = (\sqrt{3x}; \sqrt{7})$ $v = (\sqrt{3y}; \sqrt{7})$,

Theo BĐT véc-tơ: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

$$\Rightarrow \sqrt{3x+7} + \sqrt{3y+7} \geq \sqrt{(\sqrt{3x} + \sqrt{3y})^2 + (2\sqrt{7})^2} = 8 \quad (\text{Do } \sqrt{3x} + \sqrt{3y} = 6)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ cùng hướng $\Leftrightarrow u = kv$ ($k > 0$ do cả 2 véc tơ cùng khác 0)

Suy ra $x=y$, thế vào phương trình đầu của hệ ta được $x=y=3$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: (3;3).

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} = 6 \end{cases} \quad (I)$$

Giải: Điều kiện: $x \geq -1; y \geq 1$ Đặt: $u = (\sqrt{x+1}; \sqrt{5}) \quad v = (\sqrt{y-1}; \sqrt{5})$,

Theo BĐT véc-tơ: $|u| + |v| \geq |u+v|$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} \geq \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{y-1})^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} \geq 6$$

$$\text{Do } \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ cùng hướng $\Leftrightarrow u = kv$ ($k > 0$ do cả 2 véc tơ cùng khác 0) tức là: $\sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow y = x+2$, Thế vào phương trình

đầu của hệ ta được: $2\sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$ thỏa mãn ĐK

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: (3;5)

RÚT RA CHÚ Ý: Thông qua một số ví dụ ở trên có thể thấy rằng việc sử dụng phương pháp véc-tơ để giải phương trình-Hệ phương trình cho ta lời giải "sáng", "đẹp", giảm nhẹ việc biến đổi và tính toán, nhanh chóng cho ra kết quả, thể hiện sự linh hoạt-sáng tạo trong tư duy toán. Đặc biệt đối với bài toán giải phương trình-hệ phương trình vô tỉ thì phương pháp này là một công cụ mạnh, do đó ta cần chú ý sử dụng "phương pháp véc-tơ" khi gặp dạng toán giải phương trình và hệ pt chứa căn thức.

***Bài tập:** Giải phương trình và hệ:

1) $\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4\sqrt{2}$

2) $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

3) $\sqrt{5x^2 - 6x + 2} + \sqrt{5x^2 + 8x + 4} = \frac{\sqrt{290}}{5}$

4)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{x+24} + \sqrt{y+24} = 14 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1} = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

(I) (Đại học An Ninh-Khối A-2000)

Đáp số: 1) $x=1$;
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + \sqrt{y^2+x+y+1} = 10 \\ x+y=8 \end{cases}$$

d. Chỉ ra những khó khăn sai lầm của học sinh gặp phải khi giải toán hình học phẳng bằng PPVT:

PPVT có nhiều tiện lợi trong việc giải các bài tập hình học. Tuy vậy, khi sử dụng phương pháp này học sinh vẫn gặp phải một số khó khăn, và không tránh khỏi những sai lầm và lúng túng trong khi giải toán HH lớp 10 và giải pt, hệ pt chứa căn thức.

Các em nhầm lẫn giữa véc tơ và đoạn thẳng, góc giữa hai véc tơ và góc giữa hai đường thẳng,...

Ví dụ 1: Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. Với bài toán trên, nhiều học sinh đã bị học sinh đã hiểu bài toán này như sau: Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng: $AB + CD = AD + CB$. Vì hiểu sai bài toán, dẫn đến khó khăn trong quá trình tìm lời giải bài toán.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC với $AB=3, AC=5, BC=7$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, tính góc A, và góc giữa hai đường thẳng AB và AC.

Có học sinh giải bài toán này như sau:

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = 1$ nên số đo của góc A là 0° , góc giữa hai đường thẳng AB, AC là 0° .

Lời giải 2: Ta có
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{-15}{2} \quad \text{ nên } \cos A = \frac{-15}{15} = -\frac{1}{2}$$

Do đó : góc A có số đo 120° . Góc giữa hai đường thẳng AB, AC là 120° .

Bài trên học sinh giải sai do chưa nắm vững các kiến thức về véc tơ, có nhầm lẫn giữa véc tơ với đoạn thẳng, đặc biệt việc xác định góc giữa hai véc tơ với góc giữa hai đường thẳng (không hiểu, không học kỹ định nghĩa).

Lời giải đúng như sau: Ta có
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{-15}{2} \quad \text{ nên}$$

$$\cos A = \frac{-15}{15} = -\frac{1}{2} \quad \text{ Góc } \hat{A} = 120^\circ, \text{ góc giữa hai đường thẳng AB, AC là}$$
$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Khó khăn thứ hai khi sử dụng véc tơ để giải toán hình học lớp 10 là học sinh phải gần như thoát ly khỏi hình ảnh trực quan, hình vẽ, (ít vẽ hình minh họa nếu không cần thiết), nên khó tưởng tượng, hiểu bài toán một cách hình thức,

không hiểu hết ý nghĩa hình học của bài toán. Vì học sinh có thói quen giải bài toán hình học là phải vẽ hình nên khi sử dụng PPVT để giải một số bài tập không sử dụng hình vẽ, học sinh gặp nhiều khó khăn lúng túng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{CA} = a, \vec{CB} = b$. Lấy các điểm A', B' sao cho $\vec{CA'} = ma, \vec{CB'} = nb$. Gọi I là giao điểm của A'B và B'A. Hãy biểu thị véc tơ $\vec{CI}$ theo hai véc tơ a, b .

Học sinh đã giải bài toán như sau:

Ta có $\vec{CA'} = ma, \vec{CB'} = nb$ nên $\frac{\vec{CA'}}{\vec{CA}} = m \Rightarrow \frac{\vec{CA'} + \vec{A'A}}{\vec{CA'}} = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{\vec{CA'}}{\vec{A'A}} = \frac{m}{1-m}$.

Tương tự: $\frac{\vec{BB'}}{\vec{CB}} = 1-n$. Gọi I chia đoạn AB' theo tỷ số x,

do B, I, A' thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus ta có

$$\begin{aligned} (1+n) \frac{m}{1-m} x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{1-m}{m(1-n)} \cdot \frac{AI}{IB'} \quad \text{hay} \quad \vec{CI} = \frac{\vec{CA} - \frac{m-1}{m(1-n)} \vec{CB'}}{1 - \frac{m-1}{m(1-n)}} = \\ &= \frac{m(n-1)}{1-mn} \vec{CA} + \frac{n(1-m)}{1-mn} \vec{CB'} \end{aligned}$$

Nhìn kết quả và quá trình làm bài có vẻ lôgic và hoàn hảo.

Phân tích sai lầm: Trong quá trình giải, do thoát ly khỏi hình vẽ nên HS đã xác định “nhầm” vị trí điểm I: điểm I nằm trong tam giác ABC. Mặc dù kết quả đúng cuối cùng đúng, nhưng lời giải này vẫn chưa chính xác, vì đã “thu hẹp” điều kiện của m, n là: $m > 0, n > 0$. Mặt khác, HS đã xác “định” nhầm: từ tỷ số $\frac{\vec{BB'}}{\vec{BC}} = 1-n$, đã suy ra ngay điểm B chia đoạn thẳng B'C theo tỷ số $1-n$, và cũng làm tương tự như thế với điểm A'.

- Lời giải đúng của bài toán này như sau:

Vì I thuộc A'B và AB' nên có các số x và y thỏa mãn: $\vec{CI} = x \cdot \vec{CA'} + (1-x) \cdot \vec{CB} = y \cdot \vec{CA} + (1-y) \vec{CB'}$ hay $xma + (1-x)b = ya + (1-y)nb$.

Vì hai véc tơ a, b không cùng phương nên: $\begin{cases} mx = y \\ 1-x = (1-y)n \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-n}{1-mn}$

và kết quả như đã biết $\vec{CI} = \frac{m(n-1)}{1-mn} \vec{CA} + \frac{n(1-m)}{1-mn} \vec{CB'}$.

Học sinh thường gặp khó khăn chuyển bài toán từ ngôn ngữ hình học thông thường sang ngôn ngữ hình học véc tơ và ngược lại. Vì vậy cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng chuyển tương đương những quan hệ hình học từ cách nói thông thường sang dạng véc tơ để có thể vận dụng công cụ

véc tơ trong giải toán.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Điểm K chia trung tuyến AD theo tỉ số $\frac{AK}{KD} = \frac{3}{1}$. Đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỉ số nào?

Nhận xét: Trong đề ra không có “bóng dáng” của khái niệm véc tơ, học sinh sẽ lúng túng khi phải có tư duy chuyển bài toán sang dạng véc tơ và khó xác định được cách giải bài tập này là gì. Vì vậy giáo viên cần phải gợi ý cho các em biết suy nghĩ và lựa chọn cách chuyển bài toán trên sang ngôn ngữ véc tơ (Ví dụ: để biết đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỉ số nào thì cần phải tìm xem điểm F chia đoạn thẳng AC theo tỉ số nào, với F là giao điểm của BK và AC)

Phương pháp dùng véc tơ để giải toán hình học lớp 10 có nhiều tiện lợi trong việc giải các bài tập. Tuy vậy, khi sử dụng phương pháp này học sinh vẫn gặp phải một số khó khăn, và không tránh khỏi những sai lầm trong khi giải toán: lần đầu tiên làm quen với đối tượng mới là véc tơ, các phép toán trên các véc tơ. Các phép toán trên các véc tơ lại có nhiều tính chất tương tự như đối với các số mà học sinh đã học trước đó, do đó vì học sinh chưa hiểu rõ bản chất của các khái niệm và các phép toán nên dễ ngộ nhận, mắc sai lầm trong khi sử dụng PPVT.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Sáng kiến này được áp dụng trong quá trình giảng dạy của bản thân tôi trong chuyên đề “Sử dụng phương pháp véc tơ để giải các bài toán” cho các khóa học sinh 2009-2012; 2012-2015 và 2015-2018 mà tôi trực tiếp giảng dạy; đồng thời tôi và đồng nghiệp của tôi cũng dùng vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi cấp tỉnh những năm gần đây cho học sinh trường THPT Ba Đình. Qua thực tế giảng dạy với việc sử dụng phương pháp đã nghiên cứu tôi thấy kỹ năng giải toán hình học và giải pt, hệ pt bằng phương pháp véc tơ của các em được nâng lên rõ rệt (lớp 12E, 12G khóa 2012-2015 và lớp 10G khóa 2015-2018 đã có 50% vận dụng thành thạo PPVT, 30% học sinh biết vận dụng, chỉ còn 20% các em lúng túng khi gặp dạng này, SKKN này đã góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn Toán nói riêng và chất lượng giáo dục nói chung cho nhà trường.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ:

Qua những vấn đề trình bày ở trên tôi rút ra một số kết luận sau:

1. Để rèn luyện kỹ năng giải toán, góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh cần đưa ra một hệ thống bài tập đa dạng, hợp lí, được sắp xếp từ dễ đến khó nhằm giúp học sinh củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng phát triển tư duy và biết áp dụng toán học vào thực tiễn.

2. Sáng kiến đã hướng dẫn cho học sinh phương pháp tìm lời giải của bài toán theo bốn bước trong lược đồ của Pôlya.

3. Sáng kiến đã đề xuất được một số biện pháp sư phạm phù hợp, thông qua hệ thống bài tập nhằm rèn luyện kỹ năng giải bài tập bằng PPVT với nội dung phong phú đã đề cập được tới hầu hết các tình huống điển hình mà học sinh hay gặp khi giải toán HH phẳng và giải pt, hpt bằng PPVT. Đáp ứng được nhu cầu tự học, tự nghiên cứu của học sinh, có tác dụng rèn luyện năng lực giải toán cho hs THPT.

4. Kết quả thu được qua thử nghiệm đã chứng tỏ cho tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp mà sáng kiến đề cập tới. SKKN này sẽ tiếp tục được áp dụng trong quá trình giảng dạy của các đồng nghiệp tổ Toán- Tin trường PT Ba Đình những năm tiếp theo. Sáng kiến đã góp được phần nào trong việc nâng cao chất lượng dạy và học ở trường THPT Ba Đình.

Với kinh nghiệm còn ít của mình chắc chắn sáng kiến này còn nhiều thiếu sót, tôi rất mong được sự đóng góp ý kiến của các đồng nghiệp để bản sáng kiến được đầy đủ và có ý nghĩa thiết thực hơn. Đồng thời đây cũng là vấn đề mà tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu mở rộng thêm.

Kiến nghị: Đề nghị với Sở GD&ĐT Thanh Hóa tăng thêm mức thưởng cho những SKKN đạt giải cấp tỉnh để kịp thời động viên khích lệ cán bộ giáo viên tiếp tục phát huy tính sáng tạo, đưa ra nhiều kinh nghiệm để ngày càng nâng cao chất lượng giáo dục tỉnh nhà.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Toán bồi dưỡng học sinh Hình Học 10*, NXB Hà Nội: Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Đào Ngọc Nam, Lê Tất Tôn, Đặng Quan Viễn (1996).
2. *Phương pháp dạy học môn toán ở trường THPT*, NXB Giáo Dục của Hoàng Chúng (1997),.
3. *Rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh bằng phương pháp véc tơ chương trình hình học 10, chương I+II nâng cao*, Luận văn thạc sỹ của Lê Thị Thu Hà (2007).
4. *Kiểm tra đánh giá thường xuyên và định kỳ môn toán lớp 10* (2008), NXB Giáo Dục của Nguyễn hải Châu, Nguyễn Thế Thạch.
5. Nguyễn Phương Anh, Hoàng Xuân Vinh (2006), *Luyện tập trắc nghiệm Hình Học 10*, NXB Giáo Dục .
6. *Sai lầm phổ biến khi giải toán*, NXB Giáo Dục của Nguyễn Vĩnh Cận, Lê Thống Nhất, Phan Thanh Quang (1997),
7. *Rèn luyện năng lực giải toán của học sinh THPT* của Bùi Mai Anh (2002).

Rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải một số bài toán bằng phương pháp VẾC TƠ

Luận Văn thạc sĩ khoa học giáo dục, Đại Học Sư Phạm I Hà Nội, Hà Nội.

8. *Sáng tạo toán học* - G.Polya , NXB Giáo Dục – 1997

9. *Tuyển chọn 400 bài toán Hình Học 10*, Hà Văn Chương (2006), NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

10. *Tài liệu chuyên đề về giải pt, hệ pt chứa căn thức, bài báo trên internet, Tạp chí Toán học tuổi trẻ, Tạp trí Giáo dục và thời đại, SKKN của đồng nghiệp.*

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 25 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Hoàng Thị Uyên
--------------------------------	--