

Lời giải

$$9^{1945} = 9^{1444} \cdot 9 = (9^2)^{972} \cdot 9 = 81^{972} \cdot 9 = \dots 1 \cdot 9 = \dots 9$$

Ta có:

$$2^{1930} = 2^{1928} \cdot 2^2 = (2^4)^{482} \cdot 4 = 16^{482} \cdot 4 = \dots 6 \cdot 4 = \dots 4$$

Vậy: $9^{1945} - 2^{1930} = \dots 9 - \dots 4 = \dots 5$ nên chia hết cho 5 .

Câu 2. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a : 12$.

Lời giải

Ta có $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương

$$\text{Đặt } a+1 = m^2; \quad 2a+1 = n^2 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

Mà $2a+1$ là số lẻ $\Rightarrow n$ lẻ

$$\Rightarrow 2a = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

Vì n lẻ nên $n+1, n-1$ là hai số chẵn liên tiếp.

$$(n-1)(n+1) : 8 \Rightarrow 2a : 8 \Rightarrow a : 4 \quad (1)$$

Mặt khác $a+1+2a+1 = 3a+2 = n^2+m^2$ là số chia cho 3 dư 2

Do vậy cả hai số n^2 và m^2 chia cho 3 dư 1

$$\text{Khi đó } m^2 - k^2 = 2a+1 - a - 1 = a : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a : 12$

Vậy $a : 12$

Câu 3. (HSG 7 huyện Bình Xuyên – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Lời giải

$$9 \cdot 10^n + 18 = 9 \cdot (10^n + 2) : 9 \quad (1)$$

Ta có:

Mặt khác 10^n là số có tổng các chữ số là 1

Nên $10^n + 2$ là số có tổng các chữ số là 3

$$(10^n + 2) : 3 \quad (2)$$

Suy ra

$$\text{Từ } \begin{matrix} (1) & (2) \\ \text{và} & \text{suy ra} \end{matrix} \quad 9 \cdot (10^n + 2) : 27 \quad \text{hay} \quad (9 \cdot 10^n + 18) : 27$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023; huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300 .

Lời giải

$$\text{Ta có } 4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$$

$$=4^n \cdot (4^3 + 4^2 - 4 - 1) = 4^n \cdot 75$$

$$=4^{n-1} \cdot 4 \cdot 75 = 300 \cdot 4^{n-1}$$

Mà $300 \cdot 4^{n-1}$ chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300

Câu 5. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 , biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6 .

Lời giải

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 , biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6 .

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn
 $\Rightarrow (p+1):2$ (1)

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=3(k+1):3$

$\Rightarrow p+2$ không là số nguyên tố nên $p=3k+1$ không xảy ra.

Do đó $p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3=3(k+1):3$ (2)

Vì $(2):3=1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1):6$

Câu 6. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2022 – 2023; huyện Như Thanh 2021 - 2022)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a+b+c+d$ chia hết cho 3 .

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$

$$a^3 + b^3 = 2c^3 - 16d^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3 = 3(c^3 - 5d^3):3$$
 (1)

Xét hiệu $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - (a+b+c+d)$

$$=(a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$$

$$=(a-1).a.(a+1) + (b-1).b.(b+1) + (c-1).c.(c+1) + (d-1).d.(d+1)$$

Mà tổng các tích 3 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 3

$$\Rightarrow [(a-1).a.(a+1) + (b-1).b.(b+1) + (c-1).c.(c+1) + (d-1).d.(d+1)] : 3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - (a+b+c+d) : 3$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ chia hết cho 3 .

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu $\overline{abcd} : 29$ thì $a+3b+9c+27d$ chia hết cho 29

Lời giải

Ta có:

$$\overline{abcd} : 29$$

$$\Rightarrow (1000a + 100b + 10c + d) : 29$$

$$\Rightarrow (2000a + 200b + 20c + 2d) : 29$$

$$\Rightarrow [(2001a - a) + (203b - 3b) + (29c - 9c) + (29d - 27d)] : 29$$

$$\Rightarrow [(2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d)] : 29$$

$$\Rightarrow [(69 \cdot 29a + 7 \cdot 29b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d)] : 29$$

$$(69 \cdot 29a + 7 \cdot 29b + 29c + 29d) = 29 \cdot (69a + 7b + c + d) : 29$$

Mà

$$\Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) : 29$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5 . Chứng minh rằng $p^2 + 2039q^2$ chia hết cho 24

Lời giải

Ta có
$$p^2 + 2039q^2 = p^2 - q^2 + 2040q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) + 2040q^2$$

Ta thấy $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ và p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p lẻ suy ra $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\text{suy ra } (p - 1)(p + 1) : 8$$

Lại có $(p - 1) \cdot p \cdot (p + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp

$$\text{suy ra } (p - 1) \cdot p \cdot (p + 1) : 3$$

$$\text{Mà } p \not: 3 \Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 3$$

$$\text{Vì } (3; 8) = 1 \text{ nên } p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) : 24$$

$$(q^2 - 1) : 24 \quad (2040q^2) : 24$$

Tương tự ta có và

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 9. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn: $(x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng: x và y đều chia hết cho 2.

Lời giải

$(x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4 $\Rightarrow (x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 2

Mà $2xy$ chia hết cho 2 nên $(x - y)^2$ chia hết cho 2

$\Rightarrow x - y$ chia hết cho 2 $\Rightarrow (x - y)^2$ chia hết cho 4

Mặt khác $(x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4

$\Rightarrow 2xy$ chia hết cho 4 $\Rightarrow xy$ chia hết cho 2

$\Rightarrow x$ hoặc y chia hết cho 2

Lại có $x - y$ chia hết cho 2

Vậy x và y đều chia hết cho 2.

Câu 10. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p^2 - 1) : 24$

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 3$. Thật vậy, vì p không chia hết cho 3 nên có hai trường hợp:

Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$

Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 8$. Thật vậy, vì p là số lẻ nên có các trường hợp :

Nếu $p \equiv 1 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$

Nếu $p \equiv 3 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 9 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$

Nếu $p \equiv 5 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 25 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$

Nếu $p \equiv 7 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 49 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$

+) Như vậy: vì 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $(p^2 - 1) : (3 \cdot 8)$ hay $(p^2 - 1) : 24$

Câu 11. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho x, y, z, t là các số nguyên thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 7 \cdot (2z^3 - 13t^3)$

Chứng minh rằng: $(x + y + z + t) \vdots 14$

Lời giải

* Chứng minh bài toán phụ: $(n^3 - n) \mathbb{M}$ với mọi $n \in \mathbb{Q}$.

Cách 1:

Thật vậy: + Nếu n chia hết cho 3 thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

+ Nếu n chia 3 dư 1 thì n^3 chia 3 dư 1 $\Rightarrow n^3 - n$ chia hết cho 3.

+ Nếu n chia 3 dư 2 thì n^3 chia 3 dư 2 $\Rightarrow n^3 - n$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow [(n-1)n(n+1)] \mathbb{M} \Rightarrow (n^3 - n) \mathbb{M}$ với mọi $n \in \mathbb{Q}$. (Đpcm)

Cách 2:

$$n^3 - n = n.(n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + 1.(n-1)] = (n-1)n(n+1)$$

Ta có

Do $n \in \mathbb{Q}$ nên $(n-1), n, (n+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp

\Rightarrow luôn có một số chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n-1)n(n+1) \mathbb{M} \Rightarrow (n^3 - n) \mathbb{M}$ với mọi $n \in \mathbb{Q}$. (Đpcm)

* Quay trở lại bài toán ban đầu. Điều kiện: $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$

$$x^3 + y^3 = 7(2z^3 - 13t^3)$$

Ta có:

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 14z^3 - 91t^3 + z^3 + t^3 = 15z^3 - 90t^3 = 3(5z^3 - 30t^3) \mathbb{M}$$

Xét hiệu $(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) + (t^3 - t)$

$\Rightarrow (x^3 - x) \mathbb{M}, (y^3 - y) \mathbb{M}, (z^3 - z) \mathbb{M}, (t^3 - t) \mathbb{M}$

Áp dụng bài toán phụ

$$\Rightarrow [(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t)] \mathbb{M}$$

Mà $(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \mathbb{M} \Rightarrow (x + y + z + t) \mathbb{M}$. Đpcm.

Câu 12. (HSG 7 huyện Bát Xát, Lào Cai 2021 - 2022)

Chứng minh rằng số có dạng \overline{abcabc} luôn chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcabc} = a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + a.10^2 + b.10 + c$

$$= a.10^2(10^3 + 1) + b.10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$$

$$= (10^3 + 1)(a.10^2 + b.10 + c)$$

$$= (10000 + 1)(a.10^2 + b.10 + c)$$

$$= 1001.(a.10^2 + b.10 + c)$$

$$= 11.91.(a.10^2 + b.10 + c); 11$$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 13. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40

Lời giải

Vì x^2 chia cho 8 dư 0, 1, 4 nên $3x^2$ chia cho 8 dư 0, 3, 4

Vì y^2 chia cho 8 dư 0, 1, 4 nên $2y^2$ chia cho 8 dư 0, 2, 4

Từ giả thiết $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$ nên $3x^2 - 2y^2$ chia cho 8 dư 1

Do đó x^2 chia cho 8 dư 1 và y^2 chia cho 8 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 5 (1)

Vì x^2 chia hết cho 5 dư 0, 1, 4 nên $3x^2$ chia cho 5 dư 0, 3, 2

Vì y^2 chia hết cho 5 dư 0, 1, 4 nên $2y^2$ chia cho 5 dư 0, 2, 3.

Mặt khác từ $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên $3x^2 - 2y^2$ chia cho 5 dư 1

Do đó x^2 chia cho 5 dư 1 và y^2 chia cho 5 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 40 (đpcm)

Câu 14. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022; huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh abc chia hết cho 4

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow bc = a(b+c)$ (1)

* Nếu a là số nguyên chẵn:

$$a(b+c):2 \quad (2)$$

Suy ra

Từ (1) và (2) suy ra: $bc : 2$, do đó abc chia hết cho 4.

* Nếu a là số nguyên lẻ:

Nếu b và c cùng lẻ: suy ra $(b+c):2$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra: $bc : 2$ mâu thuẫn vì b và c cùng lẻ.

Vậy trong hai số b và c có một số chẵn và một số lẻ.

Vì b và c có vai trò như nhau nên ta giả sử b là số nguyên chẵn và c là số nguyên lẻ.

Suy ra: $bc : 2$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $a(b+c):2$

Mà $(b+c)$ không chia hết cho 2 (vì b là số nguyên chẵn và c là số nguyên lẻ) nên $a:2$.

Từ (4) và (5) suy ra: abc chia hết cho 4.

Vậy abc chia hết cho 4.

Câu 15. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

Ta có: $7.5^{2n} + 12.6^n$

$$= 7.25^n + (19-7) \cdot 6^n$$

$$= 19.6^n + 7(25^n - 6^n);19$$

$$(25^n - 6^n);(25-6)$$

vì

nên $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Câu 16. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Cách 1:

$$J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n = 9(111...1 + 2n) = 9.L \quad (\text{số } 111...1 \text{ có } n \text{ chữ số } 1).$$

$$L = 111...1 + 2n = (111...1) - n + 3n$$

Xét biểu thức

Ta đã biết một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 3.

Số $111...1$ (có n chữ số 1) có tổng các chữ số là $1+1+1+\dots+1=n$ (vì có n chữ số 1).

$$(111...1 - n);3$$

Do đó

$$L = [(111...1 - n) + 3n] ;3$$

suy ra

$$\text{do đó } 9L :27 \text{ hay } J :27$$

$$J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n ;27.$$

Vậy

Cách 2:

$$+) \text{ Với } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ Đặt } A = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) - 9n + 27n.$$

$$+) \text{ Xét } (10^n - 1) - 9n = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1) - 9n$$

+) Xét

$$= 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1 - n).$$

$$= 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + (10^{n-3} - 1) + \dots + (10^2 - 1) + (10 - 1) + (1 - 1)].$$

$$(10^{n-1} - 1) = 9.(10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 9k_1 \quad (k_1 \in \mathbb{N})$$

+) Ta lại có:

$$(10^{n-2} - 1) = 9 \cdot (10^{n-3} + 10^{n-4} + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 9k_2 \quad (k_2 \in \mathbb{N})$$

...

$$10^2 - 1 = 9 \cdot 11$$

$$10 - 1 = 9 \cdot 1$$

$$(10^n - 1) - 9n = 9 \cdot 9(k_1 + k_2 + \dots + 11 + 1) = 81k : 27$$

+) Vậy

$$A = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) - 9n + 27n = 81k + 27n : 27 \quad (n \in \mathbb{N})$$

+) Do đó

Câu 17. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn: $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) : 7$

Chứng minh rằng $(29a + 18b + 36) : 7$

Lời giải

Do $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) : 7$

vì $(7a - 14b + 5)$ không chia hết cho 7 mà 7 là số nguyên tố nên $(a - 3b + 1) : 7$

Mà $(28a + 21b + 35) : 7$

$$\Rightarrow (28a + 21b + 35) + (a - 3b + 1) : 7$$

$$\Rightarrow 29a + 18b + 36 : 7 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tương Dương, Nghệ An 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn; huyện Thăng Bình 2018 - 2019; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Lời giải

$$M = 75 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$= 25 \cdot (4 - 1) \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$= 25 \cdot [4 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 1]$$

$$= 25 \cdot [(4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 1]$$

$$= 25 \cdot (4^{2019} - 1 + 1)$$

$$= 25 \cdot 4^{2019}$$

$$= 25 \cdot 4 \cdot 4^{2018}$$

$$= 10^2 \cdot 4^{2018}$$

Ta thấy $(10^2 \cdot 4^{2018}) : 10^2$

Vậy $M = 75 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Câu 19. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho các số tự nhiên x, y thỏa mãn $(2x+3y):17$. Chứng minh $(9x+5y):17$.

Lời giải

Ta có $(2x+3y):17 \Rightarrow 4(2x+3y):17 \Rightarrow (8x+12y):17$

Ta lại có: $9x+5y+8x+12y=17x+17y=17(x+y):17$

Mà $(2x+3y):17$ nên $(9x+5y):17$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $M=(9a+11b)(5b+11a)$ chia hết cho 19 . Chứng minh rằng $M:361$.

Lời giải

Ta có: $M=(9a+11b)(5b+11a):19$ mà 19 là số nguyên tố nên $(9a+11b):19$ hoặc $(5b+11a):19$

Lại có: $3(9a+11b):19+(5b+11a)=38a+38b=19(2a+2b):19$ (*)

+ Nếu $(9a+11b):19$ kết hợp với (*) suy ra: $(5b+11a):19$

+ Nếu: $(5b+11a):19$ kết hợp với (*) suy ra $(9a+11b):19$

$\Rightarrow M=(9a+11b)(5b+11a):19.19$

$\Rightarrow M:361$

Câu 21. (HSG 7 TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho m, n, t là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m-n=n-t=a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có

$$m-n=n-t=a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra $n=t+a$, $m=n+a=t+2a$

Do đó ta có $t, t+a, t+2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3

Xét số dư của ba số nguyên tố $t, t+a, t+2a$ đã cho khi chia cho 3 , số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2 . Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3 .

Mặt khác $(t+a)-t=a$; $(t+2a)-t=2a$; $(t+2a)-(t+a)=a$

Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3 . Mà $(2,3)=1$ nên $a:3$ (1)

Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ

$\Rightarrow m - n$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(2,3) = 1$ ta có $a : 6$

Câu 22. (HSG 7 thị xã Bim Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh: $ab : (a + b + c)$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (a + b)^2 - c^2 = 2ab \Rightarrow (a + b + c)(a + b - c) = 2ab$

Suy ra $2ab : (a + b + c)$ (1)

mà $(a + b + c) - (a + b - c) = 2c$ chẵn nên $(a + b + c); (a + b - c)$ cùng tính chẵn lẻ.

Nếu $(a + b + c)$ lẻ thì từ (1) suy ra $ab : (a + b + c)$

Nếu $(a + b + c)$ chẵn thì $(a + b - c)$ chẵn. Đặt $(a + b - c) = 2k$ thì

$(a + b + c)2k = 2ab \Rightarrow (a + b + c)k = ab$ suy ra $ab : (a + b + c)$

Vậy

Câu 23. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $d < c < b < a$.

Chứng minh rằng: $P = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) : 12$

Lời giải

Xét P chia hết cho 3 :

Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư \Rightarrow hiệu hai số bị chia đó chia hết cho $3 \Rightarrow$ tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3

Do vậy P chia hết cho 3 (1)

Xét P chia hết cho 4 :

Trường hợp 1: Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4

Trường hợp 2: Khi chia bốn số đó cho 4 có đủ các trường hợp về số dư $1; 2;$ suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn, hai số lẻ. Giả sử a, c chẵn và b, d lẻ $\Rightarrow (a - c) : 2$ và $(b - d) : 2$

Do vậy P chia hết cho 4

Suy ra P luôn chia hết cho 4 (2)

Từ (1) và (2) và suy ra $P : (3.4)$ hay $P : 12$

Câu 24. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ $\Rightarrow 5p$ là số lẻ $\Rightarrow 5p+1$ là số chẵn $\Rightarrow (5p+1):2$ (1)

Xét ba số chẵn liên tiếp: $10p; 10p+1; 10p+2$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $10p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow (10p+1) \not\vdots 3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p \not\vdots 3$ và $UCLN(10;3)=1 \Rightarrow 10p \not\vdots 3$

Do đó $10p+2 \vdots 3 \Rightarrow 2(5p+1) \vdots 3$ mà $UCLN(2;3)=1 \Rightarrow 5p+1 \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $UCLN(2;3)=1$ nên $5p+1 \vdots 6$

Câu 25. (HSG 7 huyện Gia Viễn, Ninh Bình 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Lời giải

Gọi hai số nguyên lẻ liên tiếp là $2a+1$ và $2a-1$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 bằng:

$$(2a+1)(2a-1)+9$$

$$=4a^2 - 2a + 2a - 1 + 9$$

$$=4a^2 + 8$$

$$=4.(a^2 + 2):4$$

Vậy tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Câu 26. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $B = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Ta có $B = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^n \cdot 121 + 144^n \cdot 12 = 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ (1)

Mặt khác ta có $(144^n - 11^n) : (144 - 11) \Rightarrow (144^n - 11^n) : 133$ (2)

Mặt khác ta có

Từ (1) và (2) suy ra $B \text{ M } 133$.

Câu 27. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $A = \frac{(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $2014 : 2 \Rightarrow 2014^{2016} : 2^{2016}$

$\Rightarrow 2014^{2016} : 4 \Rightarrow 2014^{2016} = 4k (k \in \mathbb{N}^*)$

Vì 17^4 có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 17^{2014^{2016}} = 17^{4k} = (17^4)^k$ có chữ số tận cùng là 1

Tương tự $3^{96^{97}} = 3^{4l} = (3^4)^l = (81)^l$ có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}}$ có chữ số tận cùng là 0

Nên A là một số tự nhiên, vì $A > 0$

$\Rightarrow A : 2$

$\Rightarrow A$ là một số tự nhiên có tận cùng là 0

$\Rightarrow A : 5$

Câu 28. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) \equiv 0 \pmod{7}$. Chứng minh rằng: $(11b + 15 + 43a) \equiv 0 \pmod{7}$.

Lời giải

Từ $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) \equiv 0 \pmod{7}$

suy ra $(7a - 21b + 5)(a - 3b + 1) \equiv 0 \pmod{7}$

$\Rightarrow (a - 3b + 1) \equiv 0 \pmod{7}$ vì $(7a - 21b + 5)$ không chia hết cho 7 và 7 là số nguyên tố.

Từ $(a - 3b + 1) \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 42a + 14b + 14 \equiv 0 \pmod{7}$

Vì $(42a + 14b + 14) \equiv 0 \pmod{7}$

$\Rightarrow (11b + 15 + 43a) \equiv 0 \pmod{7}$

Câu 29. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lí Fermat ta có:

$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

suy ra $p^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ và $q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ mặt khác $p^{q-1} \equiv 0 \pmod{p}$ và $q^{p-1} \equiv 0 \pmod{q}$

nên ta có: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$; $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ mà $(p, q) = 1$

nên: $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p \cdot q}$

Câu 30. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với $2; 3; 4$.

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c

Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $0 < a < b < c \leq 9$

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 .

Ta có số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 nên nó chia hết cho 9 và 8

Số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 9

Suy ra $(a+b+c):9$ (dấu hiệu chia hết cho 9) mà $0 < a+b+c < 27$ (Do a, b, c là các chữ số)

nên $a+b+c \in \{9; 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

+) Nếu $a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow a=2.1=2; b=3.1=3; c=4.1=4$

Ta được các số $234, 324, 342, 243, 423, 432$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 chia hết cho 72 (1)

+) Nếu $a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow a=4.2=4; b=3.2=6; c=4.2=8$

Ta được các số $468, 486, 648, 684, 864, 846$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số $648; 864$ chia hết cho 72 (2)

Từ (1) và (2) ta được các số cần tìm là: $432; 648; 864$

Câu 31. (HSG 7 huyện Mỹ Đức Hà Nội năm 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 5 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5 .

Lời giải

Vì $Q(x):5$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Với $x=0$, ta có $Q(0)=d:5$

Với $x=1$, ta có $Q(1)=(a+b+c+d):5$ mà $d:5 \Rightarrow (a+b+c):5$ (1)

Với $x=-1$, ta có $Q(-1)=(-a+b-c+d):5$

$$\text{mà } d \div 5 \Rightarrow (-a + b - c) \div 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$Q(1) + Q(-1) = (2b + 2d) \div 5 \quad \text{lại có } d \div 5 \Rightarrow 2d \div 5 \quad \text{mà } 5 \text{ và } 2 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau nên } b \div 5$$

$$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \div 5 \quad \text{mà } 5 \text{ và } 2 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau nên } (a + c) \div 5 \quad (3)$$

$$\text{Với } x = 2, \text{ ta có } Q(2) = (8a + 4b + 2c + d) \div 5 \quad \text{hay } [6a + 2(a + c) + 4b + d] \div 5$$

$$\text{Mà } d \div 5, (a + c) \div 5, b \div 5 \text{ nên } 6a \div 5 \quad \text{mà } 5 \text{ và } 6 \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau nên } a \div 5$$

Từ (3) suy ra $c \div 5$.

$$\text{Vậy } a \div 5; b \div 5; c \div 5; d \div 5$$

Câu 32. (HSG 7 huyện Nông Công, 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư $0; 1$ hoặc 4 .

$$+ \text{ Nếu } n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 1 \text{ thì } n^2 = 5k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = (5k + 5) \div 5$$

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

$$+ \text{ Nếu } n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 4 \text{ thì } n^2 = 5k + 4 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 16 = (5k + 20) \div 5$$

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

$$\text{Vậy } n^2 \div 5 \text{ suy ra } n \div 5$$

Câu 33. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

Lời giải

Ta có: $192 = 16 \cdot 12$

Do m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên ta có:

$$m = (2k - 1)^2 \quad \text{và} \quad n = (2k + 1)^2 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Khi đó: } mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$$

$$= [(2k - 1)^2 - 1][(2k + 1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k)$$

$$= 16k^2(k - 1)(k + 1) \div 16 \quad (1)$$

Ta có: $k(k-1)(k+1):3$ và $k(k-1)k(k+1):4$

Mà $(3,4)=1$ nên $k^2(k-1)(k+1):12$

$$\Rightarrow mn - m - n + 1 = 16k^2(k-1)(k+1):12$$

Từ (1) và (2) suy ra: $mn - m - n + 1 : 192$ (đpcm)

Câu 34. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 – 2023 lần 2)

Tìm số nguyên a để $a^2 + a + 3$ chia hết cho $a + 1$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + a + 3$ chia hết cho $a + 1 \Rightarrow [a(a+1)+3] : (a+1)$ (1)

Vì a là số nguyên nên $a(a+1) : (a+1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3 : (a+1)$ hay $a+1$ là các ước của 3

Do đó $a+1 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow a \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Vậy $a \in \{-4; -2; 0; 2\}$ là các giá trị nguyên cần tìm.

Câu 35. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Cho $A = 16(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}) + 4$. Chứng minh: $A : 100$.

Lời giải

Đặt $B = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}$

$$\Rightarrow 5B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2021}$$

$$\Rightarrow 5B - B = 5^{2021} - 1$$

$$\Rightarrow B = \frac{5^{2021} - 1}{4}$$

$$\Rightarrow 16B + 4 = 4 \cdot 5^{2021}$$

$$\Rightarrow 16B = 4 \cdot 5^{2021} - 4$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot 5^{2021} = 100 \cdot 5^{2019} : 100$$

Vậy $A : 100$

Câu 36. (HSG 7 huyện Kim Sơn, tỉnh Ninh Bình, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 3^1 .

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$D = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

(có 2^0 nhóm)

$$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31 = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96})$$

chia hết cho 31 .

Câu 37. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh Ninh Bình, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Lời giải

Ta có:
$$\frac{10^{2021} + 539}{9} = \frac{100\dots00000 + 539}{9} = \frac{100\dots00539}{9}$$

Trong đó số $100\dots00539$ là số có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên số đó chia hết cho 9 .

Vậy $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Câu 38. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n : 24$

Lời giải

Đặt $n+1 = k^2$; $2n+1 = m^2$, $k, m \in \mathbb{N}$

Vì $2n+1$ là số lẻ nên m là số lẻ. Đặt $m = 2t+1 (t \in \mathbb{N})$ ta có:

$$2n+1 = (2t+1)^2 \Rightarrow n = 2t(t+1)$$

$\Rightarrow n$ là số chẵn $\Rightarrow k$ là số lẻ.

$\Rightarrow n = k^2 - 1 = (k-1) \cdot (k+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp

$\Rightarrow n : 8$

Mặt khác: $(n+1) + (2n+1) = 3n+2 = k^2 + m^2$ là số chia 3 dư 2

Mà số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1

$\Rightarrow k^2$ và m^2 chia 3 dư $1 \Rightarrow m^2 - k^2 = (2n+1) - (n+1) = n : 3$

Vì $(3, 8) = 1$ nên $n : 24$ (đpcm).

Câu 39. (HSG 7 huyện Thị xã An Nhơn, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 .

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \\ &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n(9+1) - 2^n(4+1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \end{aligned}$$

$$=10.(3^n - 2^{n-1});10$$

Câu 40. (HSG 7 trường THCS Quang Trung Cát Tiên 2018 - 2019)

Chứng minh rằng:

- a) $10^6 - 5^7$ chia hết cho 5^9 .
 b) $313^5.229 - 313^6.36$ chia hết cho 7 .

Lời giải

a) $10^6 - 5^7 = (2.5)^6 - 5^7 = 2^6.5^6 - 5^7 = 5^6.(2^6 - 5) = 5^6.59;59$

b) $313^5.229 - 313^6.36 = 313^5.229 - 313^6.(1+35)$

$= 313^5.229 - 313^6 - 313^6.35$

$= 313^5.(229 - 313) - 313^6.35$

$= 313^5.(-84) - 313^6.35$

$= 7.(-2.313^5 - 313^6.5);7$

Câu 41. (HSG 7 trường Hiền Quang, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 5^5

Lời giải

$$7^6 + 7^5 - 7^4 = 7^4.(7^2 + 7 - 1) = 7^4.55;55$$

Câu 42. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2018 - 2019)

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307 .

Lời giải

$$S = 17.(1+17+17^2) + 17^4.(1+17+17^2) + \dots + 17^{16}.(1+17+17^2)$$

$$= 17.307 + 17^4.307 + \dots + 17^{16}.307$$

$$= 307.(17 + 17^4 + \dots + 17^{16});307$$

Câu 43. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2018 - 2019)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Chứng minh rằng: $(p + q);12$

Lời giải

Vì q nguyên tố, $q > 3$ nên q có dạng $6k + 1$ hoặc $6k + 5 (k \in \mathbb{N})$

Nếu $q = 6k + 1$ thì $p = q + 2 = (6k + 3);3$ mà $p > 3$ nên p là hợp số (loại)

Nếu $q = 6k + 5 \Rightarrow p = q + 2 = 6k + 5 + 2 = 6k + 7$

Suy ra $p + q = (6k + 7) + (6k + 5) = (12k + 12);12$

Câu 44. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất a để khi ghép nó vào bên phải số $\overline{2019}$ thì được một số tự nhiên chia hết cho 2018 .

Lời giải

Đặt $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, a_1, a_2, \dots, a_n là các chữ số, $a_1 \neq 0$)

Số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{2019 a_1 a_2 \dots a_n}$

Theo giả thiết, ta có: $\overline{2019 a_1 a_2 \dots a_n} : 2018$

$$(\overline{2019 \cdot 10^n + a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$$

$$(\overline{2018 \cdot 10^n + 10^n + a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$$

$$(\overline{10^n + a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$$

Xét các trường hợp:

Với $n=1$, ta được: $(10 + a_1) : 2018$ nên không tìm được a_1 vì $10 < 10 + a_1 < 20$

Với $n=2$, ta được $(100 + \overline{a_1 a_2}) : 2018$ nên không tìm được $\overline{a_1 a_2}$ vì $100 < 100 + \overline{a_1 a_2} < 200$

Với $n=3$, ta được $(1000 + \overline{a_1 a_2 a_3}) : 2018$, không tìm được $\overline{a_1 a_2 a_3}$ vì $1000 < 1000 + \overline{a_1 a_2 a_3} < 2000$

Với $n=4$, ta được $(10000 + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}) : 2018$

$$(\overline{10000 + a_1 a_2 a_3 a_4} - 5 \cdot 2018) : 2018$$

$$\text{Hay } \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} - 90 = 2018 \Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 2108$$

Vậy số tự nhiên a nhỏ nhất cần tìm là $a = 2108$

Câu 45. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng, 2018 - 2019)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7 . Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7 .

Lời giải

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow f(x) = f(0) = c : 7$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow f(x) = f(1) = (a + b + c) : 7 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow f(x) = f(-1) = (a - b + c) : 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ và } \Rightarrow f(1) - f(-1) = a + b + c - a + b - c = 2b : 7 \Rightarrow b : 7$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (a+b+c):7 \\ b:7 \\ c:7 \end{cases} \Rightarrow a:7$$

Vậy $a:7; b:7; c:7$.

Câu 46. (HSG 7 Phòng GD&ĐT KRÔNG ANA 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+996}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+996} &= 3^x \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{996}) \\ &= 3^x \cdot [(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \dots + (3^{993} + 3^{994} + 3^{995} + 3^{996})] \\ &= 3^x \cdot (120 + 120 \cdot 3^4 + 120 \cdot 3^8 \dots + 120 \cdot 3^{992}) \\ &= 3^x \cdot 120 \cdot (1 + 3^4 + 3^8 \dots + 3^{992}) : 120 \end{aligned}$$

(với $x \in \mathbb{N}$)

Câu 47. (HSG 7 Phòng GD&ĐT TP Lào Cai 2022 - 2023)

Chứng minh $A = 8 \cdot 5^{2n} + 11 \cdot 6^n$ chia hết cho 19 với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 8 \cdot 5^{2n} + 11 \cdot 6^n \\ &= 8 \cdot 25^n + (19 - 8) \cdot 6^n \\ &= 8 \cdot 25^n + 19 \cdot 6^n - 8 \cdot 6^n \\ &= 19 \cdot 6^n + 8 \cdot (25^n - 6^n) \\ &= 19 \cdot 6^n + 8 \cdot (25 - 6)(25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) \\ &= 19 \cdot 6^n + 8 \cdot 19(25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) \\ &= 19 [6^n + 8 \cdot (25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1})] : 19 \end{aligned}$$

Vậy $A : 19$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \end{aligned}$$

(đpcm)

Câu 49. (HSG 7 huyện)

Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n \\ &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \end{aligned}$$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n \vdots 133$

$$(144^n - 11^n) \vdots (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) \vdots 133$$

Do đó suy ra: $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 50. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lặc 2022 - 2023; Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \vdots 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 51. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Tam Dương 2022 - 2023)

Cho ba số chính phương x, y, z . Chứng minh rằng $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 12 .

Lời giải

Vì một số chính phương chia cho 3 hoặc chia cho 4 đều dư 0 hoặc 1

Nên có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 , chia cho 4

nên $x - y$ hoặc $y - z$ hoặc $z - x$ chia hết cho 3

do đó $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 3

Tương tự ta có $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 4

mà 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 12

Câu 52. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn và trường THCS Trường Sa, 2017 - 2018)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x) \div 7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7

Lời giải

$$P(0) \div 7 \quad \text{nên } c \div 7$$

$$P(1) \div 7 \quad \text{nên } (a+b+c) \div 7 \Rightarrow (a+b) \div 7 \quad (1); \quad P(-1) \div 7 \quad \text{nên } (a-b+c) \div 7 \Rightarrow (a-b) \div 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ } (1) \quad \text{và } (2) \Rightarrow 2a \div 7 \quad \text{mà } (2;7)=1 \quad \text{nên } a \div 7 \Rightarrow b \div 7$$

Câu 53. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}}$ chia hết cho 10 .

Lời giải

Chứng minh các số mũ đều có số dư bằng 3 khi chia cho 4

$$\text{Đặt } 555^{777} = 4q + 3; \quad 555^{333} = 4p + 3 \quad \text{ta có:}$$

$$333^{555^{777}} + 777^{555^{333}} = 333^{4q+3} + 777^{4p+3} = 333^3 \cdot (333^4)^q + 777^3 \cdot (777^4)^p$$

$$= (\text{số tận cùng là } 7)^+ (\text{số tận cùng là } 3) \times (\text{số tận cùng là } 1) = \overline{\dots 7} + \overline{\dots 3} = \overline{\dots 0}$$

Câu 54. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn: $a + 4b$ chia hết cho 13 . Chứng minh rằng $10a + b$ cũng chia hết cho 13

Lời giải

$$(a + 4b) \div 13 \Rightarrow 10(a + 4b) \div 13$$

$$10(a + 4b) - (10a + b) = 10a + 40b - 10a - b = 39b \div 13$$

$$\text{Do } 10(a + 4b) \div 13 \Rightarrow (10a + b) \div 13$$

Câu 55. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $(81^7 - 27^9 - 9^{13}) \div 405$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} \\ = 3^{26} \cdot (3^2 - 3 - 1) = 3^{22} \cdot 3^4 \cdot 5 = 3^{22} \cdot 405 \div 405$$

$$\Rightarrow (81^7 - 27^9 - 9^{13}) \div 405$$

Câu 56. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 25

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n = (5^{n+2} - 5^n) + (3^{n+2} - 3^n) = 5^n \cdot 24 + 3^n \cdot 8$$

Vì n nguyên dương nên $5^n \cdot 24$ chia hết cho 24 ; $3^n \cdot 8$ chia hết cho 24

Vậy $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 25 với mọi số nguyên dương n .

Câu 57. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lạc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Ta có: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$$

$$= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 58. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018; huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $f(1) : 3$; $f(0) : 3$; $f(-1) : 3$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3 .

Lời giải

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$$

Ta có: $f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$

$$f(1) : 3 \Rightarrow (a + b + c) : 3 \Rightarrow (a + b) : 3 \quad (1)$$

$$f(-1) : 3 \Rightarrow (a - b + c) : 3 \Rightarrow (a - b) : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $[(a + b) + (a - b)] : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ mà $(2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3 .

Câu 59. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn 2016 - 2017; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $(3a + 2b) : 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Lời giải

$$\oplus (3a + 2b) : 17 \Rightarrow (10a + b) : 17$$

Ta có: $(3a + 2b) : 17 \Rightarrow 9(3a + 2b) : 17$

$$\Rightarrow (27a + 18b) : 17$$

$$\Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17$$

$$\Rightarrow (10a + b) : 17$$

$$\oplus (10a + b) : 17 \Rightarrow (3a + 2b) : 17$$

Ta có: $(10a + b) : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17$

$$\Rightarrow (20a + 2b) : 17$$

$$\Rightarrow (17a + 3a + 2b) : 17$$

$$\Rightarrow (3a + 2b) : 17$$

Vậy với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $(3a + 2b) : 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) : 17$.

Câu 60. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Với a, b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6 . Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6 .

Lời giải

Vì a nguyên dương nên ta có $4^a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

$$(4^a + 2) \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow (4^a + 2) : 6$$

Mà

Khi đó ta có $4^a + a + b = 4^a + 2 + a + 1 + b + 2007 - 2010$ chia hết cho 6 .

Vậy với a, b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6 thì $4^a + a + b$ chia hết cho 6 .

Câu 61. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

$$A = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

Ta có:

$$= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

$$= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dạng 2: Tìm chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 TP Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023)

Tìm chữ số tận cùng của C biết $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải

Với $n = 0$, khi đó $C = 3^2 - 2^2 + 1 - 1 = 5$, C có chữ số tận cùng là 5 .

Với $n \geq 1$. Ta có:

$$C = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

nên C có chữ số tận cùng là 0 .

Vậy $n=0$, C có chữ số tận cùng là 5 .
 $n \geq 1$, C có chữ số tận cùng là 0 .

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Thế, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{2}$ và
 $S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1)$

Tìm hai chữ số tận cùng của S^{2023} .

Lời giải

Ta có $f(x) = x + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) + f(1-x) = x + \frac{1}{2} + 1 - x + \frac{1}{2} = 2$

$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1)$

$= [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2001}\right) + f\left(\frac{1999}{2001}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(\frac{1001}{2001}\right) \right]$

$= 2 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2002$

$\Rightarrow S^{2023} = 2002^{2023}$

\Rightarrow Hai chữ số tận cùng của S bằng 2 chữ số tận cùng của 2^{2023} .

$2^{2023} = (2^{20})^{101} \cdot 2^3 = \overline{76}^{101} \cdot 8 = \overline{\dots 76} \cdot 8 = \overline{\dots 608}$

Ta có

Vậy hai chữ số tận cùng của S là 08.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Cho tích $A = 1.2.3.4.5 \dots 398.399.400$. Hỏi tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?

Lời giải

Vì tích 5.2 có tận cùng bằng 1 chữ số 0 . Muốn biết tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 thì cần xem khi phân tích A ra thừa số nguyên tố có bao nhiêu thừa số 2 và bao nhiêu thừa số 5 . Ta thấy thừa số 5 ít hơn thừa số 2 nên ta chỉ cần tìm số thừa số 5 .

Kể từ số 1, cứ 5 số lại có một số là bội của 5 ; cứ $25 = 5^2$ số lại có một số là bội của 25 cứ $125 = 5^3$ số lại có một số là bội của 125 .

Do đó số thừa số 5 khi phân tích A ra thừa số nguyên tố là:

$[(400 - 5) : 5 + 1] + [(400 - 25) : 25 + 1] + [(375 - 125) : 125 + 1] = 80 + 16 + 3 = 99$

Vậy tích A có tận cùng 99 chữ số 0 .

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Lời giải.

$$2007 \equiv 7 \pmod{10}$$

Ta có:

$$\Rightarrow 2007^{2009} \equiv 7^{2009} \pmod{10}$$

$$7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$$

Mà

$$\Rightarrow 7^{2009} = (7^2)^{1004} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 7^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$$

$$\text{Nên } 2007^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$$

$$2013 \equiv 3 \pmod{10}$$

Lại có:

$$\Rightarrow 2013^{1999} \equiv 3^{1999} \pmod{10}$$

$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

Mà

$$\Rightarrow 3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 3^{1999} \equiv 3 \pmod{10}$$

$$\text{Nên } 2013^{1999} \equiv 3 \pmod{10}$$

$$(2007^{2009} - 2013^{1999}) \equiv 0 \pmod{10}$$

Do đó

$$\Rightarrow 2007^{2009} - 2013^{1999} \text{ có chữ số tận cùng là } 0$$

$$\text{Vậy } N = 0, 7 \cdot (2007^{2009} - 2013^{1999}) \text{ là số nguyên.}$$

Câu 5.

a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000} .

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của $2^{5^{12}}$.

Lời giải

$$9^{2n+1} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \pmod{10}$$

a) Ta có

mà 9^{10} là số lẻ

$$\text{Nên } 9^{9^{10}} \equiv 9 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$ là 9.

$$3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100}$$

b) Ta có:

$$\Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$$

$$(-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$$

Mà

$$\Rightarrow 3^8 \equiv 61 \pmod{100}$$

$$\text{Do đó } 3^{10} = 3^8 \cdot 9 \equiv 61 \cdot 9 = 549 \equiv 49 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100} \quad \text{do } 49^2 = 2401$$

$$\Rightarrow 3^{1000} = (3^{20})^{50} \equiv 01 \pmod{100}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01.

$$\text{c) + Ta có: } (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\text{Nếu } a : 25 \text{ thì } (a+b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$$

$$\text{+ Ta có: } 2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25} \quad \text{nên } 2^{10} = 25k - 1 \text{ với } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$$

$$\Rightarrow 2^{512} = (2^{50})^{10} \cdot 2^{12} \equiv (-1)^{10} \cdot 2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$$

$$\text{Do } 2^{12} = 2^{10} \cdot 2^2 = 1024 \cdot 4 \equiv 96 \pmod{25}$$

Do

$$\Rightarrow 2^{512} \equiv 96 \pmod{125} \quad \text{hay } 2^{512} = 125m + 96 \text{ với } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Lại có: } 2^{512} = (2^4)^{128} = 16^{128} : 8 ; 96 : 8$$

$$\Rightarrow m : 8 \quad \text{nên } m = 8n \text{ với } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Khi đó } 2^{512} = 125 \cdot 8n + 96 = 1000n + 96$$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{512} là 096.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>