

§ 4: TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

I. Mục đích, yêu cầu:

1. Mục đích:

- Hình thành cho học sinh phép nhân vecto với một số thực nhằm hoàn thành các phép toán trên vecto. Về bản chất lúc này đây chính là phép nhân ngoài trên cấu trúc không gian vecto. Phép cộng vecto và phép nhân ngoài là hai phép toán cơ bản tạo nên không gian tuyến tính.
- giới thiệu một số tính chất quan trọng của phép nhân một vecto với một số và ứng dụng của nó trong việc chứng minh hai vecto cùng phương và phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.
- Dạy cho học sinh biết cách biểu diễn một vecto qua hai vecto không cùng phương cho trước. Đây là một việc làm hết sức thiết thực tạo tiền đề cho việc hình thành tọa độ điểm, tọa độ vecto trong hệ trục tọa độ sau này.

2. Yêu cầu:

Học xong bài này học sinh cần phải đạt được những yêu cầu sau:

- Nắm được định nghĩa và tính chất của phép nhân một vecto và một số thực và bước đầu biết vận dụng vào giải toán.
- Hiểu được định lý điều kiện hai vecto cùng phương và phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.
- Biết cách biểu diễn một vecto qua hai vecto không cùng phương cho trước.

II. Phương tiện dạy học

1. Thực tiễn:

Học sinh đã nắm được tổng, hiệu hai vecto và các tính chất của tổng hai vecto.

2. Phương tiện:

Bảng, phấn viết, sách.

III. Phương pháp dạy học

Thuyết trình, nêu vấn đề, gợi mở vấn đáp.

IV. Tiến trình dạy học

1. Kiểm tra bài cũ

Yêu cầu học sinh nhắc lại phép cộng hai vectơ, qui tắc hình bình hành, thông qua kiến thức cũ chuẩn bị bài mới.

2. Bài mới

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS

Hoạt động 1: dẫn dắt hình thành định nghĩa

Gv: Ta đã biết thế nào là tổng của hai vectơ. Bây giờ nếu ta lấy vectơ $\vec{a}$ cộng với chính nó thì kết quả là hai lần vectơ $\vec{a}$, một cách tự nhiên ta kí hiệu là $2\vec{a}$.
Như vậy: $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

Như vậy phép nhân 1 số tự nhiên với 1 vectơ có thể xem như là phép cộng liên tiếp nhiều lần của vectơ đó. $n\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}$.

Tổng quát hơn, với k là một số thực bất kỳ, ta định nghĩa phép nhân của 1 vectơ $\vec{a}$ với một số thực k như sau: trình bày định nghĩa trong sgk.

Hs: tiếp thu, ghi chép.

Hoạt động 2: củng cố định nghĩa

Gv: ra ví dụ 1, giải mẫu câu a, giảng giải để làm rõ hơn định nghĩa, yêu cầu học sinh làm câu b, sau đó gọi 1 học sinh lên bảng làm.

Hs: chú ý, theo dõi tỉ mỉ và hoàn thành nhiệm vụ.

Gv: yêu cầu học sinh rút ra nhận xét (k dương, k âm) hướng của vectơ tích ra sao, độ lớn (modun) của nó thế nào.

Hs: suy nghĩ, trả lời: $k > 0$: $k\vec{a}$ cùng chiều với $\vec{a}$

$k < 0$: $k\vec{a}$ ngược

chiều với $\vec{a}$

NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Định nghĩa:

Cho trước vectơ $\vec{a}$ và một số thực k . Ta định nghĩa tích của vectơ $\vec{a}$ và số thực k là một vectơ $k\vec{a}$ được kí hiệu và được xác định như sau:

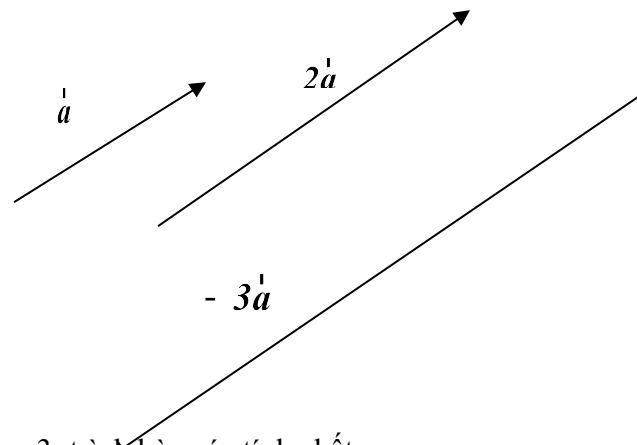
- nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$

- nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

- về độ lớn: $|k\vec{a}| = |k| |\vec{a}|$

Phép lấy tích của 1 vectơ và 1 số được gọi là phép nhân 1 vectơ với 1 số hoặc nhân 1 số với 1 vectơ.

Ví dụ 1: cho vectơ $\vec{a}$ như hình vẽ. Hãy xác định vectơ $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$



Hoạt động 3: trình bày các tính chất cơ bản của phép nhân vectơ với 1 số (về

bản chất đây là 4 tiên đề của phép toán nhân ngoài trong không gian vectơ)

Gv: với định nghĩa như vậy, phép nhân 1 vectơ với 1 số có những tính chất cơ bản sau đây (i,ii,iii,iv). Đối với các tính chất (i, ii, iii) chỉ nêu phân tích không cần chứng minh. Giáo viên hướng dẫn học sinh chứng minh tính chất (iv).

Hs: theo dõi, ghi chép, hiểu được các tính chất để có thể vận dụng khi cần thiết, tập trung suy nghĩ tìm cách chứng minh tính chất (iv)

Gv: giả sử $k=0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$ hãy chứng minh $k\vec{a} = \vec{0}$

Hs: nếu $k=0$ $\Rightarrow k\vec{a} = 0\vec{a} \Rightarrow |k\vec{a}| = |0\vec{a}| = |0||\vec{a}| = 0 \Rightarrow k\vec{a} = \vec{0}$

Nếu $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow |k\vec{a}| = |k||\vec{a}| = |k||0| = 0 \Rightarrow k\vec{a} = \vec{0}$

Như vậy điều kiện đủ đã được chứng minh.

Gv: giả sử $k\vec{a} = \vec{0}$ và $k \neq 0$ hãy chứng minh $\vec{a} = \vec{0}$

Hs: vì $k\vec{a} = \vec{0}$ nên $|k\vec{a}| = 0 \Rightarrow |k||\vec{a}| = 0$. do $k \neq 0$ nên $|\vec{a}| = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Tương tự nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $k = 0$. điều kiện cần được giải quyết.

Với 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số $k, l \in \mathbf{R}$, ta có các tính chất sau:

- i) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- ii) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- iii) $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$
- iv) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k=0 \text{ hoặc } \vec{a} = \vec{0}$

◇ Chú ý: • nhờ tính chất (i) ta có thể suy ra:

$(-k)\vec{a} = (-1.k)\vec{a} = (-1)(k\vec{a}) = -(k\vec{a})$
Như vậy $(-k)\vec{a}$ và $-(k\vec{a})$ có thể viết đơn giản là $-k\vec{a}$.

Vecto $\frac{m}{n}\vec{a}$ có thể viết $\frac{m\vec{a}}{n}$.

Ví dụ 2: chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm O bất kỳ ta đều có: $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$

$\vec{OA} + \vec{OB}$

Giả sử I là trung điểm của đoạn AB $\Rightarrow$

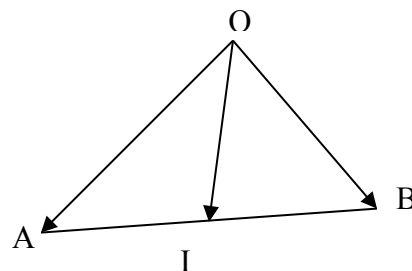
$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \quad (1)$$

Khi đó: $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{OI} + \vec{IB} = 2\vec{OI} + \vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{OI}$ (do (1))

Ngược lại, nếu $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$, "

O.

Chọn $O \equiv I$, ta có $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ là trung điểm của AB



2. Các tính chất của phép nhân một vectơ với một số:

Hoạt động 4: củng cố

Gv: ra 2 ví dụ 2 và 3, sau đó hướng dẫn học sinh làm ví dụ 2, còn ví dụ 3 tương tự xem như bài tập về nhà.

Hs: suy nghĩ tìm cách giải quyết.

Gv: nhấn mạnh, củng cố: các kết quả của vd 2 và 3 là các kết quả cơ bản thường dùng. Sau bài hôm nay chúng ta có thể xem đó như 1 kết quả có thể sử dụng mà không cần chứng minh. Và đặc biệt nó tạo tiền đề cho việc hình thành tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm tam giác sau này. Lúc này đưa bài tập số 23sgk vào để áp dụng kết quả trên.

Hướng dẫn; chuyển đổi từ giả thiết hình học sang giả thiết vectơ, dựa vào kết quả vừa có để chứng minh.

Hs: M là trung điểm AB $\Rightarrow \vec{NM} = \vec{NA} + \vec{NB}$.

N là trung điểm CD

$$\Rightarrow \vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$$

$$2\vec{NM} = (\vec{NC} + \vec{CA}) + (\vec{ND} + \vec{DB})$$

$$\Rightarrow 2\vec{NM} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

Hoạt động 5: hình thành định lý điều kiện 2 vectơ cùng phương.

Gv: ta đã biết nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ thì 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Điều ngược lại có đúng hay không? Câu trả lời là có, đi sau cho câu trả lời. Gv phát biểu đi

Hs: theo dõi, ghi chép.

Gv: khẳng định tính ưu việt của định lý đó là cho chúng ta 1 cách để chứng minh 2 vectơ cùng phương.

Gv: dẫn dắt hs rút ra hệ quả điều kiện ba điểm thẳng hàng. nếu $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cp thì có nhận xét gì về vị trí 3 điểm A, B, C.

Hs: A, B, C thẳng hàng.

Gv: hãy suy ra điều kiện ba điểm thẳng hàng.

Hs: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{AB} = k\vec{AC}$

Ví dụ 3: sgk.

Bt 23 sgk: gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh: 2

$$\vec{NM} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

3. Điều kiện để 2 vectơ cùng phương

a. Định lý:

Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$). Khi đó điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương đó là tồn tại 1 số thực k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.

Cm: (P) giả sử $k \in \mathbb{R} : \vec{b} = k\vec{a}$

P $\vec{b}$ và $k\vec{a}$ cùng phương.

Mà $\vec{a}$ và $k\vec{a}$ cùng phương (theo định nghĩa). Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

P) giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

• nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng, chọn $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ta có $\vec{b} = k\vec{a}$

• nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng, chọn $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ta cũng có $\vec{b} = k\vec{a}$.

Như vậy nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương ta luôn tìm được $k \in \mathbb{R} : \vec{b} = k\vec{a}$.

b. Hệ quả:

Điều kiện cần và đủ để 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là $k \in \mathbb{R} : \vec{AB} = k\vec{AC}$

Hoạt động 6: củng cố định lý

Gv: ra vd 4, chỉ cho hs thấy đây là 1 định lý khá hay, nói về sự thẳng hàng của 3 điểm đặc biệt trong tam giác. Bài này có thể giải bằng nhiều cách và chúng ta có thể sử dụng hệ quả trên để chứng minh 3 điểm thẳng H, G, O thẳng hàng.

Hs: đọc kĩ đề, vẽ hình, suy nghĩ tìm cách giải quyết.

Gv: gọi I là trung điểm của BC.

Hãy chứng minh $\vec{AH} = 2\vec{OI}$.

Theo tc trọng tâm tam giác:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} \quad (1)$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= 2\vec{OI} + \vec{OA} \\ &= \vec{AH} + \vec{OA} = \vec{OH} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1,2) suy ra $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

Suy ra H, G, O thẳng hàng.

Hoạt động 7: giới thiệu phép biểu diễn 1 vectơ qua 2 vectơ không cùng phương

Gv: nêu định nghĩa phép biểu thị 1 vectơ qua 2 vectơ cho trước. Lấy ví dụ và phân tích.

Đặt vấn đề: nếu đã cho 2 vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì phải chăng mọi vectơ đều có thể biểu thị được qua 2 vectơ đó. định lý sau sẽ cho ta câu trả lời. Sau đó gv phát biểu định lý như trong sgk và hướng dẫn hs cách chứng minh.

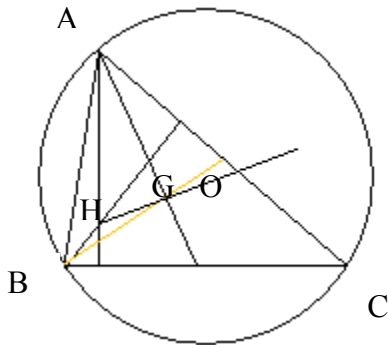
Hs: chú ý theo dõi, lắng nghe, ghi chép.

Gv: cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và 1 vectơ $\vec{x}$ bất kỳ nào đó.

- chọn O bất kì.

Ví dụ 4: (định lý đường thẳng euler)

Chứng minh rằng trong 1 tam giác thì trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên 1 đường thẳng. Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng euler.



Giải: gọi I là trung điểm BC

$$\text{P } \vec{AH} = 2\vec{OI} \quad (\text{Y BHCD là hbh})$$

$$\text{Mà : } \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OI}$$

$$\text{P } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OI} + \vec{OA}$$

$$= \vec{AH} + \vec{OA} = \vec{OH}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \vec{OH} = 3\vec{OG}$$

Suy ra H, G, O thẳng hàng. Hơn nữa điểm G chia đoạn OH theo tỉ số 1:2.

4. Biểu thị 1 vectơ qua 2 vectơ không cùng phương cho trước.

a) định nghĩa:

Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta nói vectơ $\vec{c}$ nào đó được biểu thị tuyến tính qua 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu tồn tại 2 số a, b sao cho $\vec{c} = a\vec{a} + b\vec{b}$.

Ví dụ: cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy biểu thị vectơ

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

b) định lý:

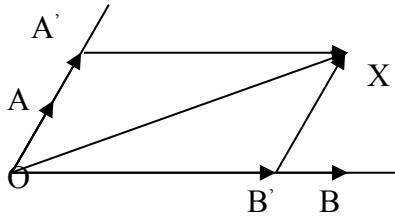
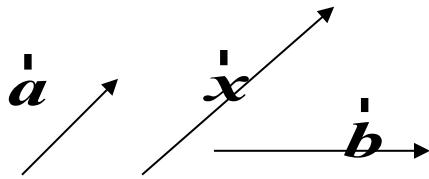
Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 2 vectơ không cùng phương. Khi đó " $\vec{x}$ " luôn có thể biểu

- dựng $\vec{OX} = \vec{x}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$.
- xét các trường hợp $\vec{x}$ cp $\vec{a}$, $\vec{x}$ cp $\vec{b}$, $\vec{x}$ không cùng phương với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- tính duy nhất được suy ra nhờ giả thiết $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Hs: làm theo hướng dẫn của gv, đề xuất ý kiến khác.

Diễn qua 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hơn nữa sự biểu diễn đó là duy nhất.

Chứng minh:



Chọn O cố định nào đó.

Dựng $\vec{OX} = \vec{x}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$.

Nếu $\vec{x}$ cp $\vec{a}$ $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \vec{x} = a\vec{a} = a\vec{a} + 0\vec{b}$

Nếu $\vec{x}$ cp $\vec{b}$ $\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} : \vec{x} = b\vec{b} = 0\vec{a} + b\vec{b}$.

Nếu $\vec{x}$ không cùng phương với $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Dựng hính O $A \nmid X B \nmid$ sao cho

$A \nmid OA$, $B \nmid OB$.

$\Rightarrow \vec{OX} = \vec{OA} + \vec{OB} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{x} = a\vec{a} + b\vec{b}$.

Tính duy nhất: nếu có $a \nmid, b \nmid$ thỏa

$\Rightarrow (a - a \nmid)\vec{a} + (b - b \nmid)\vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow a = a \nmid, b = b \nmid \Rightarrow$ đpcm.

Hoạt động 8: củng cố bằng vd

Gv: đưa bt 21.sgk vào.

Hướng dẫn hs làm câu a). Các câu còn lại yêu cầu học sinh về làm.

Hs: tập trung làm theo hướng dẫn của gv.

Gv: Sau đó yêu cầu hs về làm bài tập trong sgk và sbt

Bài 21,sgk: cho $\triangle OAB$ vuông cân với $OA = OB = a$. Hãy dựng vectơ sau đây và tính độ dài của chúng.

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$$