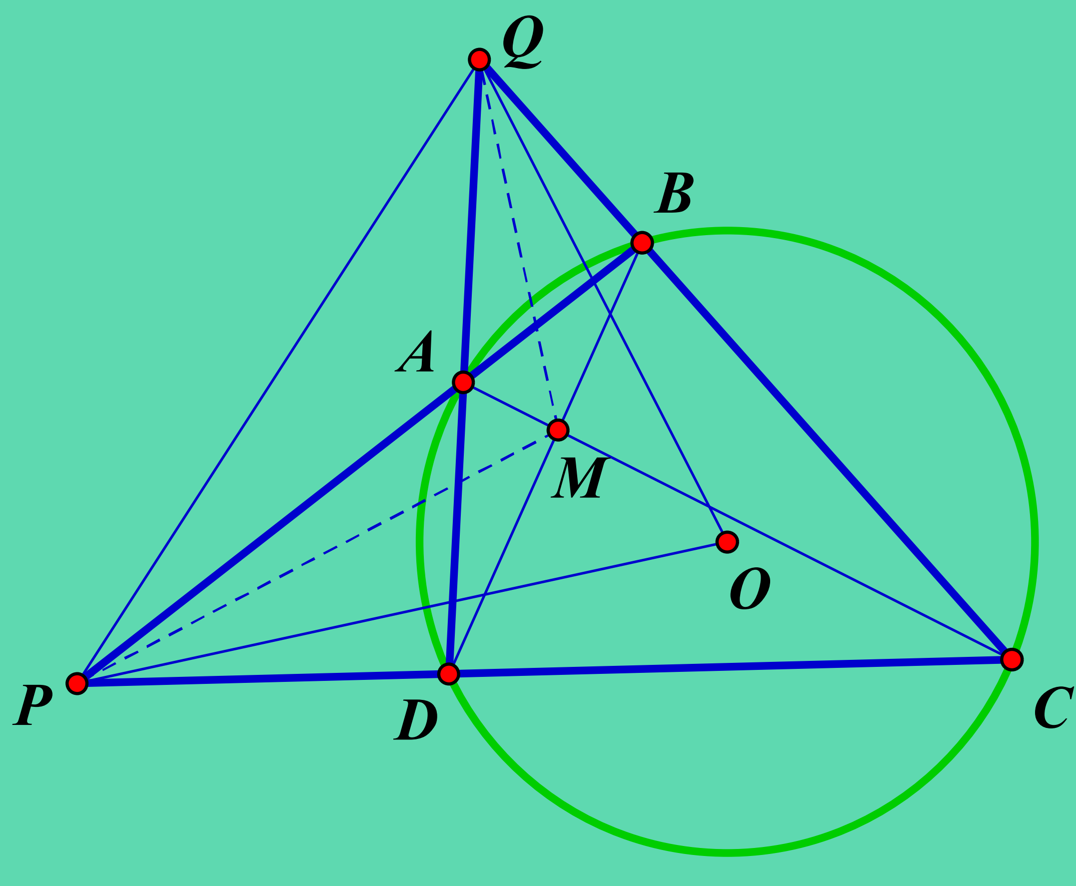
DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC MATHSCOPE.ORG

Phan Đức Minh - Lê Phúc Lữ

Tuyển chọn các bài toán

HÌNH HỌC PHẲNG

TRONG ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2010 - 2011



Tháng 01 - 2011

Lời nói đầu

Các kì thi HSG tỉnh và thành phố nhằm chọn ra đội tuyển tham dự kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia trong năm học 2010 – 2011 đã diễn ra sôi nổi vào những ngày cuối năm trước và đã để lại nhiều ấn tượng sâu sắc. Bên cạnh những bất đẳng thức, những hệ phương trình hay những bài toán số học, tổ hợp, ta không thể quên được dạng toán vô cùng quen thuộc, vô cùng thú vị và cũng xuất hiện thường trực hơn cả, đó chính là những bài toán hình học phẳng. Nhìn xuyên suốt qua các bài toán ấy, ta sẽ phát hiện ra sự xuất hiện của những đường tròn, những tam giác, tứ giác; cùng với những sự kết hợp đặc biệt, chúng đã tạo ra nhiều vấn đề thật đẹp và thật hấp dẫn. Có nhiều bài phát biểu thật đơn giản nhưng ẩn chứa đằng sau đó là những quan hệ khó và chỉ có thể giải được nhờ những định lý, những kiến thức ở mức độ nâng cao như: định lý Euler, đường tròn mixtilinear, định lý Desargues, điểm Miquel,… Rồi cũng có những bài phát biểu thật dài, hình vẽ thì phức tạp nhưng lại được giải quyết bằng một sự kết hợp ngắn gọn và khéo léo của những điều quen thuộc để tạo nên lời giải ấn tượng.

Nhằm tạo cho các bạn yêu Toán có một tài liệu tham khảo đầy đủ và hoàn chỉnh về những nội dung này, chúng tôi đã dành thời gian để tập hợp các bài toán, trình bày lời giải thật chi tiết và sắp xếp chúng một cách tương đối theo mức độ dễ đến khó về lượng kiến thức cần dùng cũng như hướng tiếp cận. Với hơn 50 bài toán đa dạng về hình thức và phong phú về nội dung, mong rằng “Tuyển chọn các bài toán hình học phẳng trong đề thi học sinh giỏi các tỉnh, thành phố năm học 2010 – 2011” sẽ giúp cho các bạn có dịp thưởng thức, cảm nhận, ngắm nhìn nhiều hơn nét đẹp cực kì quyến rũ của bộ môn này!

Xin chân thành cảm ơn các tác giả đề bài, các thành viên của diễn đàn http://forum.mathscope.org đã gửi các đề toán và trình bày lời giải lên diễn đàn.

Tài liệu với dung lượng lớn có thể còn nhiều thiếu sót, rất mong bạn đọc góp thêm ý kiến để tiếp tục hoàn thiện cuốn tài liệu này. Các ý kiến đóng góp xin gửi vào hai hòm thư lephuclu@gmail.com hoặc phan.duc.minh.93@gmail.com.
Cảm ơn các bạn.

Phan Đức Minh – Lê Phúc Lữ

Các kí hiệu và từ viết tắt sử dụng trong tài liệu

S_{ABC}, S_{ABCD}	Diện tích tam giác ABC, tứ giác $ABCD$
a, b, c	Độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC
p	Nửa chu vi tam giác
R, r	Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác
$\left[BC\right]$	Đường tròn đường kính BC
$P_{A/(O)}$	Phương tích của điểm A đối với đường tròn $\left(O\right)$
h_a, h_b, h_c	Độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c
$d\left(A, l\right)$	Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng l
đpcm	Điều phải chứng minh

Phần một: Đề bài

Bài 1.

Cho hình vuông $ABCD$. Trên đoạn BD lấy M không trùng với B, D. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh AB, AD. Chứng minh rằng:

1. $CM \perp EF$
2. CM, BF, DE đồng quy.

(Đề thi HSG Quảng Bình)

Bài 2.

Cho tam giác ABC có $BC > AC$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GAC, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC. Hãy so sánh R_1, R_2.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre)

Bài 3.

Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C' theo thứ tự. Đặt $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ lần lượt là diện tích các tam giác $MA'B, MA'C$, $MB'C, MB'A, MC'A, MC'B$. Chứng minh rằng nếu $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3$ thì M là trọng tâm tam giác ABC

(Đề thi HSG Đồng Tháp, vòng 2)

Bài 4.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi P, Q, M lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC, AC và BD. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OMP, OMQ, OPQ bằng nhau.

(Đề thi chọn đội tuyển toán lớp 11 THPT Cao Lãnh, Đồng Tháp)

Bài 5.

Cho tam giác ABC, điểm M thay đổi bên trong tam giác. DEF là tam giác pedal của M đối với tam giác ABC. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác DEF lớn nhất.

(Đề thi chọn đội tuyển Đồng Nai)

Bài 6.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. $BH = R\sqrt{2}$ là đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC. Gọi D, E là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC. Chứng minh rằng:

1. $BO \perp DE$
2. D, O, E thẳng hàng.

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A)

Bài 7.
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp, A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật.

(Đề thi HSG THPT chuyên Nguyễn Du, Đăk Lăk)

Bài 8.
Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$. Chứng minh rằng $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$.

(Đề thi HSG Quảng Ninh – bảng A)

Bài 9.
Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \le \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

(Đề thi HSG Bình Định)

Bài 10.
Cho tam giác ABC và M, N là hai điểm di động trên BC sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với AC, đường thẳng d_2 đi qua N và vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của d_1 và d_2. Chứng minh rằng trung điểm I của AK luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

(Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An, vòng 2)

Bài 11.
Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh AB, N là điểm chuyển động trên cạnh AC.

1. Giả sử $BM = CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.
2. Giả sử $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$ không đổi. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi HSG Long An, vòng 2)

Bài 12.
Cho đường tròn tâm O, đường kính BC và XY là một dây cung vuông góc với BC. Lấy P, M nằm trên đường thẳng XY và CY tương ứng, sao cho $CY \parallel PB$ và $CX \parallel MP$. Gọi K là giao điểm của CX và BP. Chứng minh rằng $MK \perp BP$.

(Đề chọn đội tuyển THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài 13.
Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I). Điểm M tùy ý trên (I). Gọi d_a là đường thẳng đi qua trung điểm MA và vuông góc với BC. Các đường thẳng d_b, d_c được xác định tương tự. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy tại một điểm N. Tìm tập hợp điểm N khi M chuyển động trên (I).

(Đề thi chọn đội tuyển Quảng Bình)

Bài 14.
Cho tam giác ABC, D là trung điểm cạnh BC và E,Z là hình chiếu của D trên AB,AC. Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến tại E,Z với đường tròn đường kính AD. Chứng minh rằng $TB=TC$.

(Đề thi chọn đội tuyển Nam Định)

Bài 15.
Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có A cố định và B,C thay đổi trên (O) sao cho BC luôn song song với một đường thẳng cố định cho trước. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Gọi M là trung điểm BC, N là giao điểm của AM với (O). Chứng minh rằng đường thẳng KN luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi chọn đội tuyển PTNK, ĐHKHTN TPHCM)

Bài 16.
Cho tam giác ABC vuông tại A với A,B cố định, điểm C di chuyển về một phía đối với đường thẳng AB. Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với AC,BC lần lượt là M,N. Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định khi điểm C di động.

(Đề thi HSG THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài 17.
Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC tại F và DC tại K. Từ đỉnh D kẻ $DP \perp AK$ $(P \in AK)$. Đặt $DP=m, \widehat{ADC}=180^\circ-2\alpha$. Tính S_{ABCD} theo m và α, biết rằng $\frac{S_{KFC}}{S_{AFCD}}=\frac{1}{15}$.

(Đề thi HSG Vĩnh Long, vòng 2)

Bài 18.
Cho tam giác ABC cân tại A. Đường phân giác trong của góc B cắt cạnh AC tại D. Biết rằng $BC=BD+AD$. Hãy tính góc $\widehat{BAC}$.

(Đề thi chọn đội tuyển Bắc Ninh)

Bài 19.
Cho tam giác ABC có góc A tù. Dựng các đường cao AD,BE,CF ($D,E,F \in BC,CA,AB$ tương ứng). E',F' là hình chiếu của E,F lên BC. Giả sử $2E'F'=2AD+BC$. Hãy tính góc $\widehat{BAC}$.

(Đề thi HSG Quảng Nam)

Bài 20.
Gọi G,I là trọng tâm, tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua G và song song với BC cắt AB,AC theo thứ tự tại B_c,C_b. Các điểm C_a,A_c,A_b,B_a được xác định tương tự. Các điểm I_a,I_b,I_c theo thứ tự là tâm nội tiếp các tam giác GB_aC_a,GC_bA_b,GA_cB_c. Chứng minh rằng AI_a,BI_b,CI_c đồng quy tại một điểm trên GI.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Bài 21.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường thẳng AO cắt (O) lần thứ hai tại D. H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD; hai đường thẳng BK, CH cắt (O) tại E, F. Chứng minh rằng AD, BC, EF đồng quy.

(Đề kiểm tra đội tuyển toán THPT chuyên ĐHSP HN)

Bài 22.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), nội tiếp (I). Gọi M là tiếp điểm của BC và (I), D là giao điểm thứ hai của AM và (O). Chứng minh rằng nếu $OI \perp AM$ thì tứ giác $ABDC$ điều hòa.

(Đề kiểm tra đội tuyển Ninh Bình)

Bài 23.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M, N là trung điểm AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt đường thẳng CD tại $P(P \neq N)$; đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt đường thẳng AB tại $Q(Q \neq M)$. O là giao điểm hai đường chéo AC, BD; E là giao điểm của các đường thẳng AD, BC. Chứng minh rằng P, Q, O, E thẳng hàng.

(Đề thi HSG Vĩnh Phúc)

Bài 24.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E, AD cắt BC tại F. Trung điểm của AB, CD lần lượt là G, H. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EGH.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng)

Bài 25.

Cho H là trực tâm của tam giác ABC không cân và góc A nhọn. Hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là E, F. Gọi D là trung điểm BC; P, Q là giao điểm của hai đường tròn đường kính AD, BC. Chứng minh rằng H, P, Q thẳng hàng và các đường thẳng BC, EF, PQ đồng quy.

(Đề thi HSG Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài 26.

Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. M, N là trung điểm AH, BC. Các đường phân giác của các góc $\widehat{ABH}, \widehat{ACH}$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng:

1. $\widehat{BPC} = 90°$
2. M, N, P thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển toán lớp 11, THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài 27.

Cho hai điểm A,B cố định và $(O;R)$ thay đổi sao cho $\dfrac{d(A,b)}{d(B,A)}=2$, trong đó a,b theo thứ tự là đường đối cực của A,B đối với (O). Xác định vị trí của O để S_{OAB} lớn nhất.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 2)

Bài 28.

Gọi B là điểm trên đường tròn (O_1) và A là điểm khác B nằm trên tiếp tuyến tại B của (O_1). Gọi C là điểm không nằm trên (O_1) sao cho đường thẳng AC cắt (O_1) tại hai điểm phân biệt. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với AC tại C và tiếp xúc với (O_1) tại D nằm khác phía với B so với đường thẳng AC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên đương tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Đề thi chọn đội tuyển Thái Bình)

Bài 29.

1. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Các đường thẳng qua I vuông góc với AI,BI,CI cắt BC,CA,AB tại M,N,P theo thứ tự. Chứng minh rằng M,N,P cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OI.
2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) cố định, AB cố định và khác đường kính, C di động trên đường tròn. Gọi N là trung điểm AC, M là hình chiếu của N trên BC. Tìm quỹ tích M khi C di động trên (O).

(Đề thi khảo sát đội tuyển THPT chuyên Thái Bình)

Bài 30.

Tam giác ABC nhọn, D nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{ADB}=60^\circ+\widehat{ACB}$ và $DA\cdot BC=DB\cdot AC$. Chứng minh rằng $DC\cdot AB=AD\cdot BC$.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 1)

Bài 31.

Cho tam giác BCD nội tiếp đường tròn (O). Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi d là đường phân giác trong của góc $\widehat{BAD}$, d cắt đường thẳng CD tại F và cắt đường thẳng BC tại G. Gọi Δ là đường thẳng qua C và vuông góc với d; Δ cắt (O) tại điểm thứ hai E. Gọi I,J,K lần lượt là hình chiếu của E lên các đường thẳng CB,CD,BD. Chứng minh rằng:

1. I,J,K thẳng hàng.
2. E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CFG.

(Đề thi chọn đội tuyển Lâm Đồng, vòng 2)

Bài 32.
Cho tam giác ABC nhọn, điểm M bất kì trong tam giác. AM cắt BC tại N. X,Y,Z,T là hình chiếu của N trên AB,MB,AC,MC. Chứng minh rằng $AM \perp BC$ khi và chỉ khi hoặc X,Y,Z,T đồng viên hoặc X,Y,Z,T thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Bài 33.
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các cạnh AB,AC tại P,Q và tiếp xúc trong với (O) tại S. Gọi giao điểm của AS và PQ là D.

Chứng minh rằng $\widehat{BDP}=\widehat{CDQ}$.

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Tĩnh)

Bài 34.
Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A,M khác đường kính. Điểm I trên đoạn $OA(I \neq O,A)$. Hai đường tròn (I,IA) và $[IM]$ cắt nhau tại B,C. Các tia MB,MI,MC cắt (O) tại D,E,F theo thứ tự. Đường thẳng DF cắt ME,MA,AE lần lượt tại T,S,Q. Chứng minh rằng:

1. $SD \cdot SF = ST \cdot SQ$
2. B,C,Q thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội)

Bài 35.
Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng vuông góc với IA tại A cắt BI,CI tại K,M. Gọi B',C' là giao điểm của hai cặp đường thẳng $(BI,AC),(CI,AB)$. Đường thẳng $B'C'$ cắt (ABC) tại N,E. Chứng minh rằng bốn điểm M,N,E,K thuộc cùng 1 đường tròn.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 1)

Bài 36.
Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Trên các tia FB,EC theo thứ tự lấy các điểm P,Q sao cho $FP=FC,EQ=EB$. BQ cắt CP tại K. I,J theo thứ tự là trung điểm BQ,CP. IJ cắt BC,PQ theo thứ tự tại M,N. Chứng minh rằng:

1. $HK \perp IJ$
2. $\widehat{IAM}=\widehat{JAN}$

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Bài 37.
Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trực tâm H. D là chân đường cao kẻ từ đỉnh B của ΔABC, điểm P bất kì trên (O). Q,R,S là các điểm đối xứng với P qua các trung điểm các cạnh AB,AC,BC theo thứ tự. AQ cắt HR tại F. Chứng minh rằng $HS \perp DF$.

(Đề thi chọn đội tuyển Đà Nẵng)

Bài 38.
Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tia phân giác của góc ACD cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai E, cắt tia phân giác của góc ABC tại H.

1. Tia phân giác của góc CAB cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai F, cắt CE tại I. Tính diện tích tam giác FID khi nó đều.

2. Trên đoạn BH lấy điểm K sao cho $HK = HD$. Gọi J là giao điểm của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến AB là lớn nhất.

(Đề kiểm tra đội tuyển Ninh Bình)

Bài 39.
Cho tam giác ABC. Trên AB, BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = CN$. Hai đường tròn (BCM) và (BAN) cắt nhau tại B, D. Chứng minh BD là phân giác của $\widehat{ABC}$.

(Đề thi HSG Quảng Nam)

Bài 40.
Cho tam giác ABC có phân giác trong AD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC. Gọi H là giao điểm của BF, CE. Chứng minh rằng $AH \perp BC$.

(Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An, vòng 1)

Bài 41.
Cho tam giác nhọn ABC, M là trung điểm BC. D, E là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC. Đường tròn (O_1) đi qua A, B, E. Đường tròn (O_2) đi qua A, C, D. Chứng minh rằng $O_1O_2 \parallel BC$.

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A1)

Bài 42.
Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD và đường tròn (O); N, P theo thứ tự là giao điểm thứ hai của MB, MC với (O). Chứng minh rằng ba đường thẳng MD, NE, PF đồng quy.

(Đề thi chọn đội tuyển Ninh Bình)

Bài 43.
Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S. Trung trực của AB, AC cắt phân giác trong góc BAC tại M, N. BM, CN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng SA đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Bài 44.
Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B và I là trung điểm O_1O_2. Gọi C là điểm đối xứng với B qua I. Một đường tròn (O) qua A, C cắt $(O_1), (O_2)$ tại M, N. Chứng minh rằng $CM = CN$.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 3)

Bài 45.

Cho đường tròn (C), hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ nằm trong (C), cùng tiếp xúc trong với (C) với các tiếp điểm là K,H theo thứ tự. (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại I. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài (T_1) của $(C_1),(C_2)$. (T_1) cắt (C) tại A,B và tiếp xúc với $(C_1),(C_2)$ lần lượt tại M,N. Vẽ tiếp tuyến chung trong (T_2) của $(C_1),(C_2)$. (T_2) cắt (C) tại D sao cho I thuộc miền trong của tam giác ABD. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác $MNHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. DI là phân giác của $\widehat{ADB}$.

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Tĩnh)

Bài 46.

Cho tam giác ABC, tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O, các tâm bàng tiếp I_1,I_2,I_3 tương ứng với các góc A,B,C. AD,BE,CF là các đường cao trong tam giác ABC. Chứng minh rằng OI,I_1D,I_2E,I_3F đồng quy.

(Đề chi chọn đội tuyển Hải Phòng)

Bài 47.

Cho tam giác ABC và D là một điểm trên cạnh BC thỏa $\widehat{CAD}=\widehat{ABC}$. Đường tròn (O) đi qua B và D cắt AB,AD tại E,F; DE cắt BF tại G; M là trung điểm AG. Chứng minh $CM\perp AO$.

(Đề thi chọn đội tuyển Khánh Hòa)

Bài 48.

Cho tam giác không cân ABC. Gọi các tiếp điểm của đường tròn (O) nội tiếp tam giác với các cạnh BC,CA,AB lần lượt là A_1,B_1,C_1. Đặt $AA_1\cap(O)=A_2, BB_1\cap(O)=B_2$. Gọi A_1A_3,B_1B_3 là các đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$.

1. Chứng minh rằng A_2A_3 là phân giác của $\widehat{B_1A_2C_1}$.
2. Gọi P,Q là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$. Chứng minh rằng $O\in PQ$.

(Đề kiểm tra đội tuyển THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài 49.

Cho hình thang $ABCD$ $(AD\parallel BC)$, E là điểm di động trên đường thẳng AB; O_1,O_2 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác AED,BEC. Chứng minh rằng độ dài O_1O_2 không đổi.

(Đề thi chọn đội tuyển TPHCM)

Bài 50.

Cho tứ giác toàn phần $ACBDEF$, trong đó tứ giác $ABCD$ có đường tròn nội tiếp tâm I. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là tiếp điểm của (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên EF. Hình chiếu của M lên các đường thẳng $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ là M_1, M_2, M_3, M_4. Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3, M_4 thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 3)

Bài 51.

Cho lục giác lồi $AMBDNC$ nội tiếp trong đường tròn đường kính MN, $AC = BD$. Gọi F, P là giao điểm của MC với AD, AN; E, Q là giao điểm của MD với BC, BN. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} + \frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} + \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} + \frac{\overline{EQ}}{\overline{EM}}$ là một hằng số.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 3)

Bài 52.

Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ có bán kính khác nhau và có hai tiếp tuyến chung trong Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại I. Một tiếp tuyến chung ngoài Δ_3 tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại M, N. Đường tròn (O_3) nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ và tiếp xúc với ba đường thẳng này theo thứ tự tại P, Q, R. Biết rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (C).

1. Chứng minh rằng tâm của đường tròn (C) nằm trên đường tròn đi qua ba giao điểm của $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$
2. Chứng minh $\Delta_1 \perp \Delta_2$

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên Đại học Vinh)

Bài 53.

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O), với $AB = CD = EF$. Gọi I giao điểm của BE và AD. Gọi H, K lần lượt là trực tâm tam giác ADF, BCE. Biết rằng $\widehat{AIB} = 60°$. Chứng minh rằng H, O, K thẳng hàng.

(Đề thi HSG Hưng Yên)

Phần hai: Lời giải

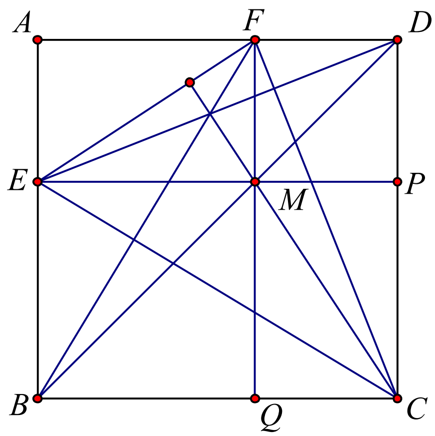
Bài 1.

Cho hình vuông $ABCD$. Trên đoạn BD lấy M không trùng với B, D. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh AB, AD. Chứng minh rằng:

1. $CM \perp EF$
2. CM, BF, DE đồng quy.

(Đề thi HSG Quảng Bình)

Lời giải.



Các đường thẳng ME, MF cắt CD, CB tại P, Q.

Ta có $\Delta EFM = \Delta MCQ \Rightarrow \widehat{QMC} = \widehat{MEF} \Rightarrow CM \perp EF$.

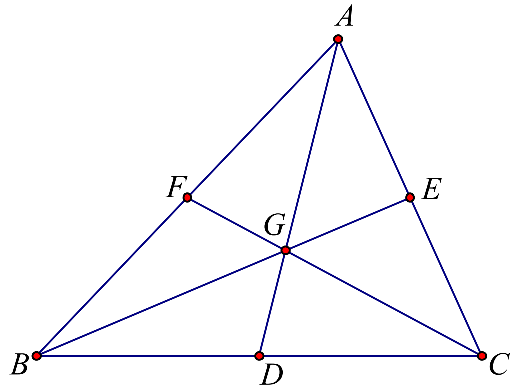
Tương tự, ta có $ED \perp CF, FB \perp EC$, suy ra CM, BF, DE là các đường cao trong tam giác CEF nên chúng đồng quy (đpcm)

Bài 2.

Cho tam giác ABC có $BC > AC$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GAC, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC. Hãy so sánh R_1, R_2.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre)

Lời giải.



Gọi D, E, F là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Xét hai tam giác AFC và BFC có: CF chung, $AF = BF$, $AC < BC \Rightarrow \widehat{AFC} < \widehat{BFC}$.

Xét hai tam giác AFG và BFG có: FG chung, $AF = BF$, $\widehat{AFC} < \widehat{BFC} \Rightarrow AG < BG$.

Do đó $R_1 = \dfrac{CB \cdot BG \cdot GC}{4S_{BGC}} > \dfrac{CA \cdot AG \cdot GC}{4S_{AGC}} = R_2$.

Bài 3.

Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C' theo thứ tự. Đặt $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ lần lượt là diện tích các tam giác $MA'B, MA'C$, $MB'C, MB'A, MC'A, MC'B$. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_4} + \dfrac{S_5}{S_6} = 3$ thì M là trọng tâm tam giác ABC

(Đề thi HSG Đồng Tháp, vòng 2)

Lời giải.

Áp dụng định lý Céva, ta có $\dfrac{S_1}{S_2} \cdot \dfrac{S_3}{S_4} \cdot \dfrac{S_5}{S_6} = \dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$.

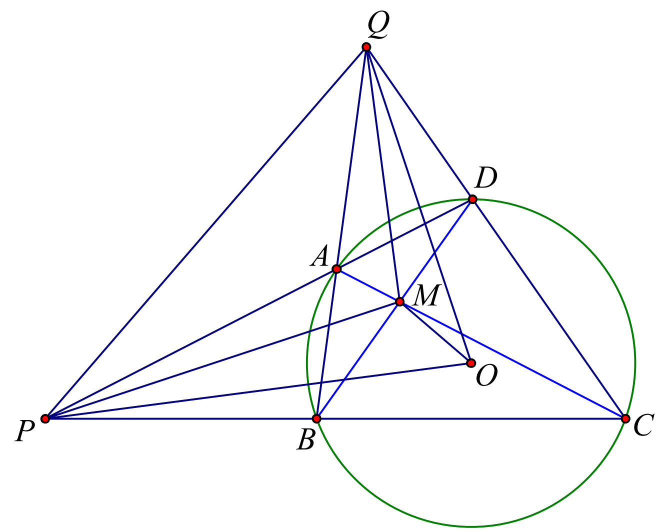
Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_4} + \dfrac{S_5}{S_6} \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A', B', C' là trung điểm các cạnh của tam giác ABC. Khi đó M là trọng tâm tam giác (đpcm)

Bài 4.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi P, Q, M lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC, AC và BD. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OMP, OMQ, OPQ bằng nhau.

(Đề thi chọn đội tuyển toán lớp 11 THPT Cao Lãnh, Đồng Tháp)

Lời giải.



Theo định lý Brocard, ta có O là trực tâm tam giác MPQ. Theo một kết quả quen thuộc thì điểm đối xứng với O qua MP nằm trên (MPQ). Suy ra (OMP) và (MPQ) đối xứng với nhau qua MP, do đó bán kính của chúng bằng nhau. Tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 5.

Cho tam giác ABC, điểm M thay đổi bên trong tam giác. DEF là tam giác pedal của M đối với tam giác ABC. Tìm vị trí của M để diện tích tam giác DEF lớn nhất.

(Đề thi chọn đội tuyển Đồng Nai)

Lời giải.

Theo công thức Euler, ta có $S_{DEF} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right)S_{ABC}$.

Do đó S_{DEF} lớn nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow O \equiv M$.

Vậy diện tích tam giác DEF lớn nhất khi M là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

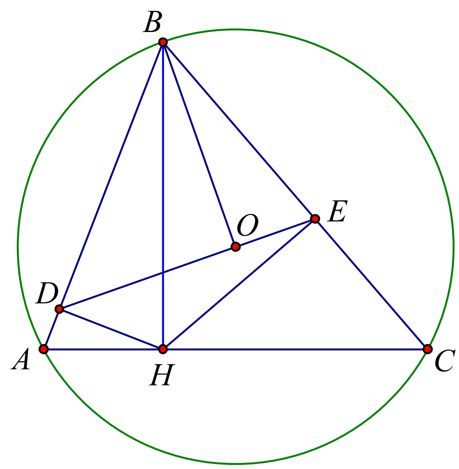
Bài 6.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. $BH = R\sqrt{2}$ là đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC. Gọi D, E là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC. Chứng minh rằng:

1. $BO \perp DE$
2. D, O, E thẳng hàng.

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A)

Lời giải.



Trước hết, ta có đẳng thức quen thuộc $BA \cdot BC = 2R \cdot BH$ với R là bán kính đường tròn (ABC).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên DE.

Ta có $BD \cdot BA = BH^2 = BE \cdot BC \Rightarrow \Delta BAC \sim \Delta BED$.

$\Rightarrow \frac{BK}{BH} = \frac{BD}{BC} = \frac{BH^2}{BA \cdot BC} = \frac{2R^2}{2R \cdot BH} = \frac{R}{BH} \Rightarrow BK = R$

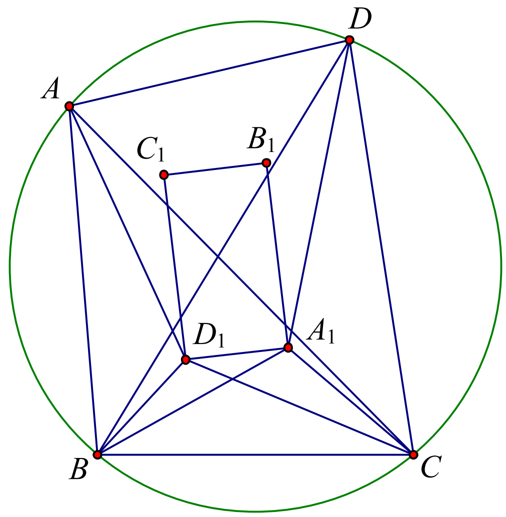
Lại có $\widehat{EBK} = \widehat{ABH} = \widehat{EBO}$. Suy ra $O \equiv K$. Vậy ta có đpcm.

Bài 7.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp, A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật.

(Đề thi HSG THPT chuyên Nguyễn Du, Đăk Lăk)

Lời giải.



Theo tính chất tâm đường tròn nội tiếp tam giác, ta có:

$$\widehat{BA_1C} = 90° + \frac{\widehat{BDC}}{2} = 90° + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BD_1C}$$

Suy ra các điểm B, C, B_1, A_1 đồng viên $\Rightarrow \widehat{D_1A_1B} = \widehat{D_1CB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Tương tự, ta có $\widehat{DA_1B_1} = \frac{\widehat{DCA}}{2}$.

Do đó:

$$\widehat{D_1A_1B_1} = 360° - \left(\widehat{D_1A_1B} + \widehat{BA_1C} + \widehat{CA_1D} + \widehat{DA_1B_1}\right) = 360° - \left(\frac{\widehat{ACB}}{2} + 90^{\circ} + \frac{\widehat{BDC}}{2} + 90^{\circ} + \frac{\widehat{CBD}}{2} + \frac{\widehat{DCA}}{2}\right) = 90°$$

Tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 8.

Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$. Chứng minh rằng $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$.

(Đề thi HSG Quảng Ninh – bảng A)

Lời giải.

Bài toán này là một kết quả quen thuộc về điểm Brocard (điểm M cho trong đề bài là một trong hai điểm Brocard của tam giác ABC)

Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$, ta có:

$$\cot\alpha = \frac{x^2 + c^2 - y^2}{4S_{MAB}} = \frac{y^2 + a^2 - z^2}{4S_{MBC}} = \frac{z^2 + b^2 - x^2}{4S_{MCA}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} \quad (1)$$

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{ABC}}, \cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S_{ABC}}, \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S_{ABC}} \Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} \quad (2)$$

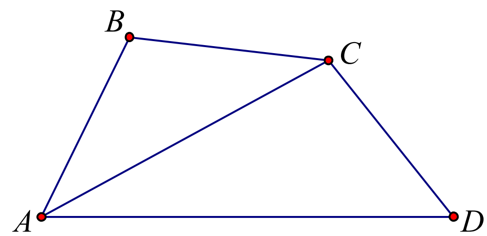
Từ (1) và (2) ta suy ra đpcm.

Bài 9.

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \le \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

(Đề thi HSG Bình Định)

Lời giải.



Đặt $\widehat{BAC}=\alpha$, ta có $2S_{ABCD}=2S_{ABC}+2S_{ACD}\le BC\cdot AC\cdot\sin\alpha+AC\cdot CD=2a^2\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)$ (1).

Do $0°<\alpha<90°$ nên $\cos\alpha,\sin\alpha>0$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\sqrt{3}\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)\le\left(\frac{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha+1}{2}\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha\le\sqrt{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(1+3\right)}=2$$

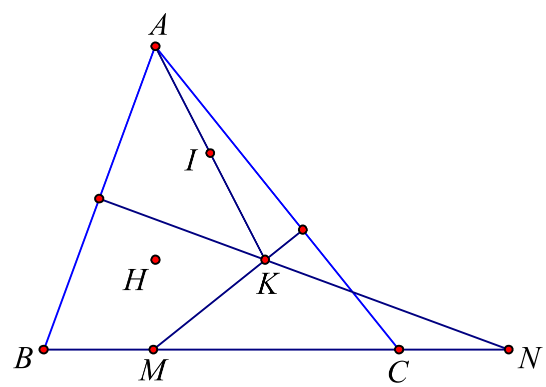
Từ hai bất đẳng thức trên, ta có $\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$, kết hợp với (1), ta có đpcm.

Bài 10.

Cho tam giác ABC và M,N là hai điểm di động trên BC sao cho $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với AC, đường thẳng d_2 đi qua N và vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của d_1 và d_2. Chứng minh rằng trung điểm I của AK luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

(Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An, vòng 2)

Lời giải.



Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{BM}=\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\vec{u}$, T là phép tịnh tiến theo $\vec{u}$.

Ta có $T\left(BH\right)=d_1,T\left(CH\right)=d_2\Rightarrow T\left(H\right)=K$. Do đó $HK\parallel BC$ hay K luôn nằm trên đường thẳng qua H và song song với BC. Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ biến $K\to I$. Suy ra quỹ tích của I là đường thẳng đi qua trung điểm AH và song song với BC.

Bài 11.

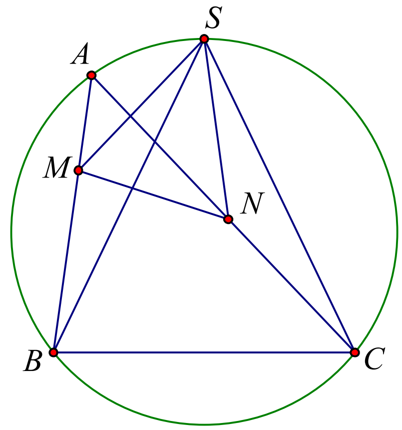
Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh AB, N là điểm chuyển động trên cạnh AC.

1. Giả sử $BM = CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.
2. Giả sử $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không đổi. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi HSG Long An, vòng 2)

Lời giải.

1.

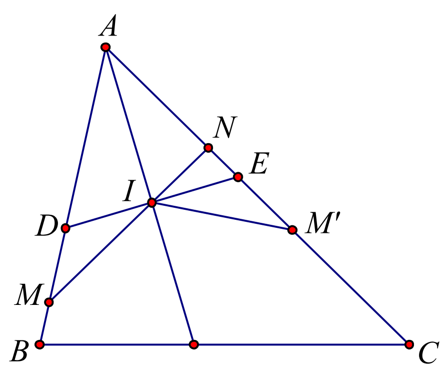


Gọi S là trung điểm cung BC chứa A của đường tròn (ABC).

Ta có $BM = CN, BS = CS, \widehat{MBS} = \widehat{NCS} \Rightarrow \Delta SMB = \Delta SNC$. Suy ra $SM = SN$ hay S nằm trên trung trực của MN.

Vậy trung trực của MN luôn đi qua điểm S cố định.

2.



Gọi I là giao điểm của MN với phân giác trong góc A của tam giác ABC. Đường thẳng qua I vuông góc với AI cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua AI.

Ta thấy IE, IA là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{M'IN} \Rightarrow (AENM') = -1$.

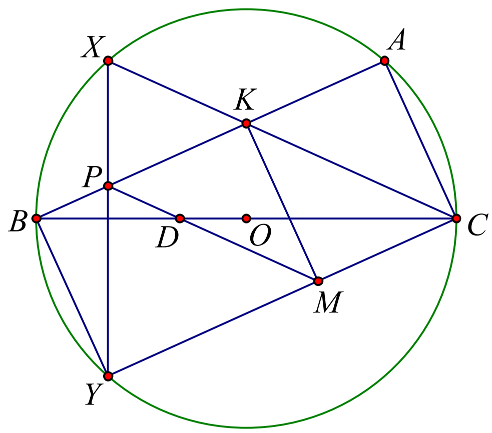
Áp dụng hệ thức Descartes, ta có $\frac{2}{AE}=\frac{1}{AM'}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không đổi. Suy ra E cố định hay MN luôn đi qua điểm I cố định.

Bài 12.

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC và XY là một dây cung vuông góc với BC. Lấy P,M nằm trên đường thẳng XY và CY tương ứng, sao cho $CY \parallel PB$ và $CX \parallel MP$. Gọi K là giao điểm của CX và BP. Chứng minh rằng $MK \perp BP$.

(Đề chọn đội tuyển THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Lời giải.



Gọi A là giao điểm thứ hai của BP và (O), D là giao điểm của PM và BC.

Đặt $\widehat{YCB} = \alpha, \widehat{YBC} = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$.

Ta có $\widehat{YPM} = \widehat{YXC} = \widehat{YBC} = \beta, \widehat{YPB} = 90° - \widehat{BYX} = 90° - \widehat{BCY} = \beta$.

Suy ra tam giác BPD cân tại $P \Rightarrow PB = PD \Rightarrow KB = KC \Rightarrow KA = KX$.

Tam giác KPX cân tại $X \Rightarrow KP = KX \Rightarrow KA = KP$. Tứ giác $MCKP$ có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành, do đó $MC = KP = KA$. Suy ra $MCAK$ là hình bình hành.

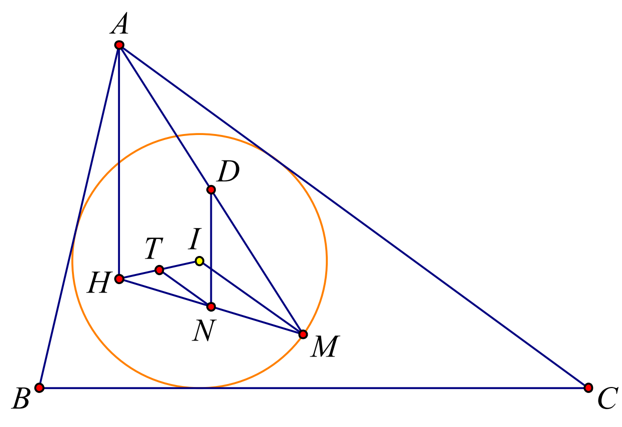
$\Rightarrow MK \parallel AC \Rightarrow MK \perp BP$ (đpcm)

Bài 13.

Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I). Điểm M tùy ý trên (I). Gọi d_a là đường thẳng đi qua trung điểm MA và vuông góc với BC. Các đường thẳng d_b, d_c được xác định tương tự. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy tại một điểm N. Tìm tập hợp điểm N khi M chuyển động trên (I).

(Đề thi chọn đội tuyển Quảng Bình)

Lời giải.



Gọi H là trực tâm tam giác ABC, D là trung điểm MA, N là trung điểm MH.
Ta có $d_a \perp BC \Rightarrow d_a \parallel AH$, do đó d_a là đường trung bình của tam giác $AMH \Rightarrow d_a$ đi qua N. Tương tự, ta suy ra d_a, d_b, d_c đồng quy tại N.

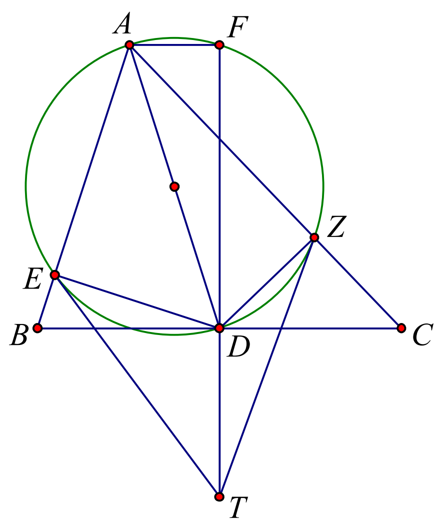
Gọi T là trung điểm HI. TN là đường trung bình trong tam giác MHI nên $TN = \frac{1}{2}IM = \frac{r}{2}$. Suy ra tập hợp điểm N khi M chuyển động trên (I) là đường tròn tâm T, bán kính $\frac{r}{2}$.

Bài 14.

Cho tam giác ABC, D là trung điểm cạnh BC và E,Z là hình chiếu của D trên AB, AC. Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến tại E,Z với đường tròn đường kính AD. Chứng minh rằng $TB = TC$.

(Đề thi chọn đội tuyển Nam Định)

Lời giải.



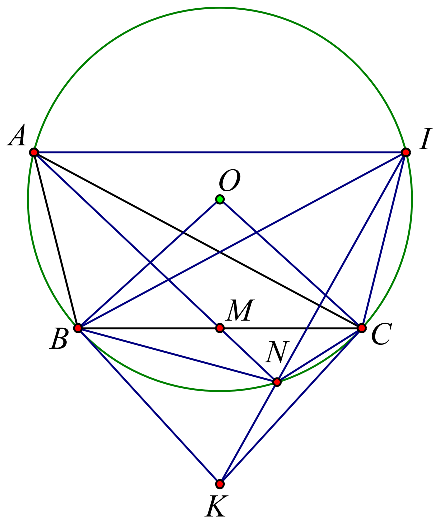
Gọi F là giao điểm của DT với đường tròn đường kính AD thì tứ giác $EDZF$ là tứ giác điều hòa. Vì A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EDZF$ nên $A(AB, AC, AF, AD) = A(AE, AD, AZ, AF) = -1$.
Mặt khác, vì D là trung điểm BC nên $AF \parallel BC$, suy ra $DT \perp BC \Rightarrow \Delta TBC$ cân tại $T \Rightarrow TB = TC$.

Bài 15.

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có A cố định và B,C thay đổi trên (O) sao cho BC luôn song song với một đường thẳng cố định cho trước. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Gọi M là trung điểm BC, N là giao điểm của AM với (O). Chứng minh rằng đường thẳng KN luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi chọn đội tuyển PTNK, ĐHKHTN TPHCM)

Lời giải.



Gọi giao điểm thứ hai của KN với (O) là I.

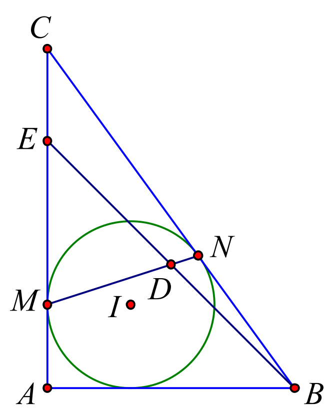
Tứ giác $IBNC$ là tứ giác điều hòa nên ta có $A(AI, AB, AN, AC) = -1$. Mà M là trung điểm BC nên $AI \parallel BC$, suy ra I cố định. Vậy đường thẳng KN luôn đi qua điểm I cố định.

Bài 16.

Cho tam giác ABC vuông tại A với A, B cố định, điểm C di chuyển về một phía đối với đường thẳng AB. Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với AC, BC lần lượt là M, N. Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định khi điểm C di động.

(Đề thi HSG THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Lời giải.



Gọi E là điểm trên tia AC sao cho $AE = AB$, D là trung điểm $BE \Rightarrow D$ cố định. Định hướng đường thẳng AC theo hướng của vector $\overrightarrow{AC}$. Ta có:

$$NC = p - c, NB = p - b \Rightarrow \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = -\frac{p-c}{p-b}$$

$$AE = AB = c \Rightarrow CE = c - b, MC = p - c \Rightarrow \frac{\overline{ME}}{\overline{MC}} = 1 + \frac{\overline{CE}}{\overline{MC}} = 1 + \frac{c-b}{p-c} = \frac{p-b}{p-c}$$

Từ đó suy ra $\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{ME}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = 1 \Rightarrow D, M, N$ thẳng hàng, suy ra MN luôn đi qua D cố định (đpcm)

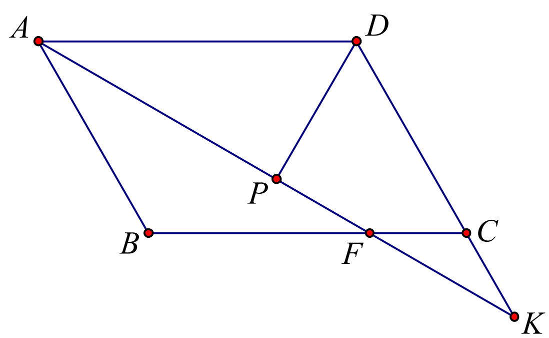
Từ cách chứng minh trên, ta thấy giả thiết tam giác ABC vuông tại A là không cần thiết, khi C chuyển động trên một tia bất kì có gốc A và không nằm trên đường thẳng AB thì MN đi qua điểm D được xác định như trên.

Bài 17.

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC tại F và DC tại K. Từ đỉnh D kẻ $DP \perp AK$ $\left(P \in AK\right)$. Đặt $DP = m, \widehat{ADC} = 180° - 2\alpha$. Tính S_{ABCD} theo m và α, biết rằng $\frac{S_{KFC}}{S_{AFCD}} = \frac{1}{15}$.

(Đề thi HSG Vĩnh Long, vòng 2)

Lời giải.



Ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát sau: Nếu $\frac{S_{KFC}}{S_{AFCD}} = \frac{1}{k^2 - 1}$ thì $S_{ABCD} = \frac{2k-2}{k} m^2 \cot \alpha$.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{BAK} = \alpha$. Ta có $\frac{S_{KFC}}{S_{AFCD}} = \frac{1}{k^2 - 1} \Rightarrow \frac{S_{KFC}}{S_{KAD}} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{FC}{AD} = \frac{KC}{KD} = \frac{1}{k}$.

Từ đó suy ra $S_{ABF} = \left(k-1\right)^2 S_{KFC}, S_{ADFC} = \left(k^2 - 1\right) S_{KFC}$.

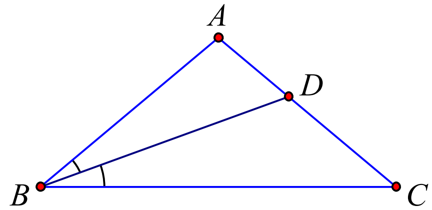
Vậy ta có $S_{ABCD} = S_{ABF} + S_{ADFC} = \frac{\left(k-1\right)^2 + \left(k^2 - 1\right)}{k^2} S_{ADK} = \frac{2k-2}{k} m^2 \cot \alpha$ (đpcm)

Bài 18.

Cho tam giác ABC cân tại A. Đường phân giác trong của góc B cắt cạnh AC tại D. Biết rằng $BC = BD + AD$. Hãy tính góc $\widehat{BAC}$.

(Đề thi chọn đội tuyển Bắc Ninh)

Lời giải.



Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$, $\dfrac{\pi - \alpha}{4} = \beta$. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB = AC = 1$.

Áp dụng định lý sin, ta có: $BC = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}, BD = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 3\beta}, AD = \dfrac{\sin\beta}{\sin 3\beta}$.

Từ giả thiết, ta có:

$\sin(\pi - 4\beta)\sin\beta = \sin 3\beta\left[\sin(\pi - 4\beta) + \sin\beta\right]$

$\Rightarrow \cos\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta + \cos\beta + \cos 3\beta \Rightarrow \cos 3\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta$

$\Rightarrow \sin 2\beta \sin 5\beta = \sin 2\beta \sin 4\beta$

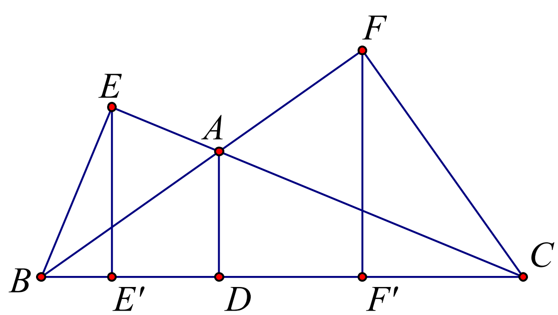
Ta có $\sin 2\beta \neq 0 \Rightarrow \sin 5\beta = \sin 4\beta \Rightarrow 5\beta = \pi - 4\beta \Rightarrow \beta = \dfrac{\pi}{9} \Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{5\pi}{9}$.

Bài 19.

Cho tam giác ABC có góc A tù. Dựng các đường cao AD, BE, CF ($D, E, F \in BC, CA, AB$ tương ứng). E', F' là hình chiếu của E, F lên BC. Giả sử $2E'F' = 2AD + BC$. Hãy tính góc $\widehat{BAC}$.

(Đề thi HSG Quảng Nam)

Lời giải.



Ta có $BE' = BE\sin C = a\sin^2 C, CF' = CF\sin B = a\sin^2 B \Rightarrow E'F' = a\left(1 - \sin^2 B - \sin^2 C\right)$

Theo công thức diện tích và định lý sin, ta có $AD = \dfrac{2S_{ABC}}{a} = \dfrac{2bc\sin A}{a} = 4R\sin B\sin C$. Do đó:

$2E'F' = 2AD + BC$

$\Leftrightarrow 2\sin A\left(1 - \sin^2 B - \sin^2 C\right) = 2\sin B\sin C + \sin A$

$\Leftrightarrow \sin A\left(2 - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C\right) = \cos(B - C) - \cos(B + C) + \sin A$

$\Leftrightarrow \sin A\left(\cos 2B + \cos 2C\right) = \cos(B - C) + \cos A + \sin A$

$\Leftrightarrow 2\sin A\cos(B + C)\cos(B - C) = \cos(B - C) + (\sin A + \cos A)$

$\Leftrightarrow (\sin A + \cos A) + \left[\cos(B - C) + 2\sin A\cos A\cos(B - C)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin A + \cos A) + \cos(B - C)(\sin A + \cos A)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin A + \cos A)\left[1 + \cos(B - C)(\sin A + \cos A)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin A + \cos A = 0 \\ \cos(B - C)(\sin A + \cos A) = 0 \end{array}\right.$

Đẳng thức thứ nhất cho ta $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \widehat{BAC}=135^\circ$.

Đẳng thức thứ hai không thể xảy ra vì với A là góc tù thì

$0<\sin A<1, -1<\cos A<0 \Rightarrow -1<\sin A+\cos A<1 \Rightarrow \left|\sin A+\cos A\right|<1$, mà $\cos(B-C)\le 1$ nên

$\left|\cos(B-C)(\sin A+\cos A)\right|<1 \Rightarrow 1+\cos(B-C)(\sin A+\cos A)>0$.

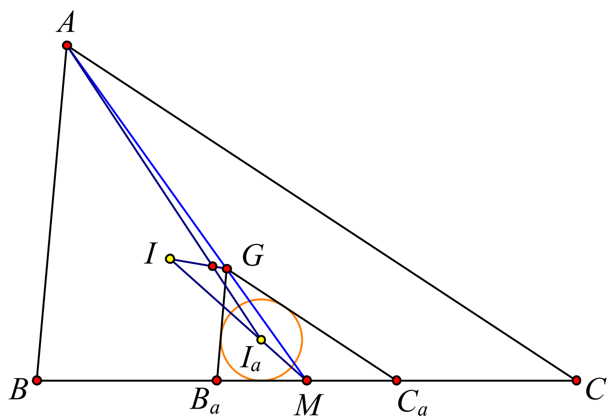
Vậy góc A có độ lớn là 135°.

Bài 20.

Gọi G, I là trọng tâm, tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua G và song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại B_c, C_b. Các điểm C_a, A_c, A_b, B_a được xác định tương tự. Các điểm I_a, I_b, I_c theo thứ tự là tâm nội tiếp các tam giác $GB_aC_a, GC_bA_b, GA_cB_c$. Chứng minh rằng AI_a, BI_b, CI_c đồng quy tại một điểm trên GI.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Lời giải.



Gọi X là giao điểm của AI_a với GI, M là trung điểm BC.

Ta có phép vị tự tâm M, tỉ số 3 biến $\Delta GB_aC_a \to \Delta ABC$. Suy ra $\frac{\overline{I_aI}}{\overline{I_aM}}=-2$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IGM với cát tuyến AXI_a, ta có:

$$\frac{\overline{XG}}{\overline{XI}}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{AG}}\cdot\frac{\overline{I_aI}}{\overline{I_aM}}=1 \Rightarrow \frac{\overline{XI}}{\overline{XG}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AG}}\cdot\frac{\overline{I_aI}}{\overline{I_aM}}=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3.$$

Tương tự, gọi Y, Z là giao điểm của BI_b, CI_c thì ta có $\frac{\overline{YI}}{\overline{YG}}=\frac{\overline{ZI}}{\overline{ZG}}=-3$.

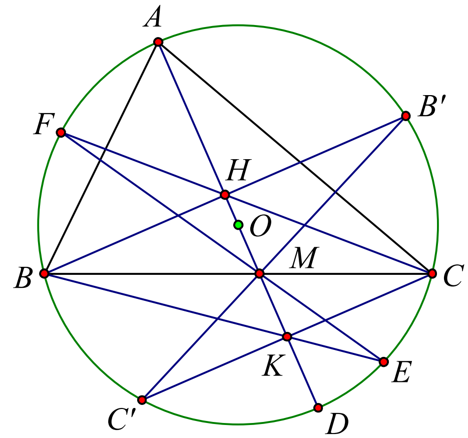
Vậy $X\equiv Y\equiv Z$ hay AI_a, BI_b, CI_c đồng quy tại một điểm trên GI.

Bài 21.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường thẳng AO cắt (O) lần thứ hai tại D. H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD; hai đường thẳng BK, CH cắt (O) tại E, F. Chứng minh rằng AD, BC, EF đồng quy.

(Đề kiểm tra đội tuyển toán THPT chuyên ĐHSP HN)

Lời giải.



Gọi B',C' là giao điểm của BH,CK với (O). M là giao điểm của EF và $B'C'$.

Ta có H,K lần lượt là trung điểm BB',CC'. Suy ra BC đối xứng với $B'C'$ qua HK. Do đó các đường thẳng $BC,B'C',HK$ đồng quy.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm F,B,C',E,C,B', ta có H,M,K thẳng hàng.

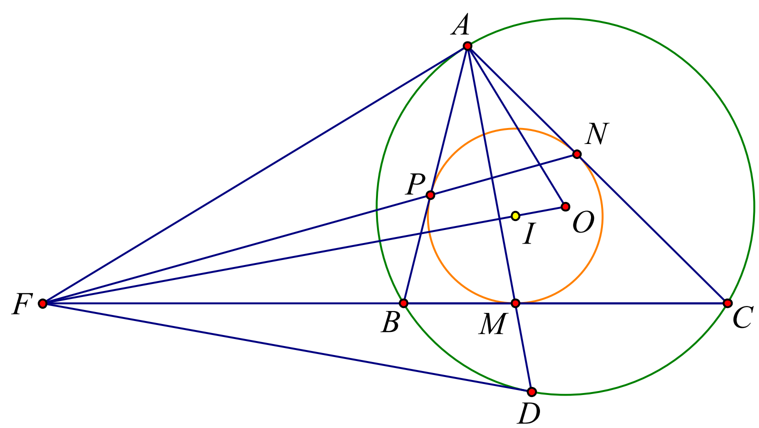
$\Rightarrow M = HK \cap B'C' \Rightarrow M \in BC \Rightarrow AD,BC,EF$ đồng quy tại M.

Bài 22.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), nội tiếp (I). Gọi M là tiếp điểm của BC và (I), D là giao điểm thứ hai của AM và (O). Chứng minh rằng nếu $OI \perp AM$ thì tứ giác $ABDC$ điều hòa.

(Đề kiểm tra đội tuyển Ninh Bình)

Lời giải.



Ta chỉ cần xét với tam giác không cân tại A. Khi đó OI cắt BC tại F. Gọi N,P là tiếp điểm của (I) với AC,AB.

Ta có FM là tiếp tuyến của (I), suy ra đường đối cực của F đi qua M. Mà $OI \perp AM$ nên AM là đường đối cực của F đối với $(I) \Rightarrow$ đường đối cực của A đối với (I) đi qua F, hay F,N,P thẳng hàng.

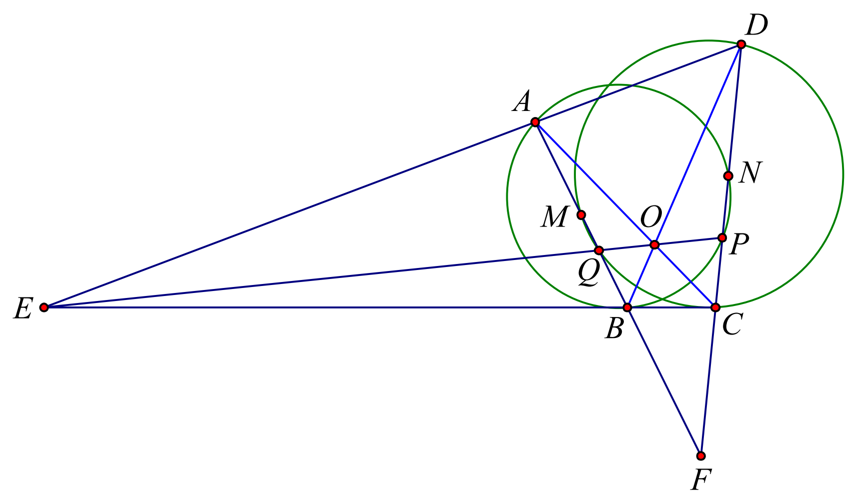
Lại có AM, BN, CP đồng quy tại điểm Gergonne của tam giác ABC nên $(FMBC) = -1$. Do đó AM là đường đối cực của F đối với (O). Suy ra FA là tiếp tuyến của (O). Vì A đối xứng với D qua FO nên FD là tiếp tuyến của (O). Vậy $ABDC$ là tứ giác điều hòa (đpcm)

Bài 23.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M, N là trung điểm AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt đường thẳng CD tại $P\,(P \neq N)$; đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt đường thẳng AB tại $Q\,(Q \neq M)$. O là giao điểm hai đường chéo AC, BD; E là giao điểm của các đường thẳng AD, BC. Chứng minh rằng P, Q, O, E thẳng hàng.

(Đề thi HSG Vĩnh Phúc)

Lời giải.



Gọi F là giao điểm của AB và CD.

Ta có $\overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FC} \cdot \overline{FD} = \overline{FM} \cdot \overline{FQ} \Rightarrow (ABFQ) = -1$ (hệ thức Maclaurin).

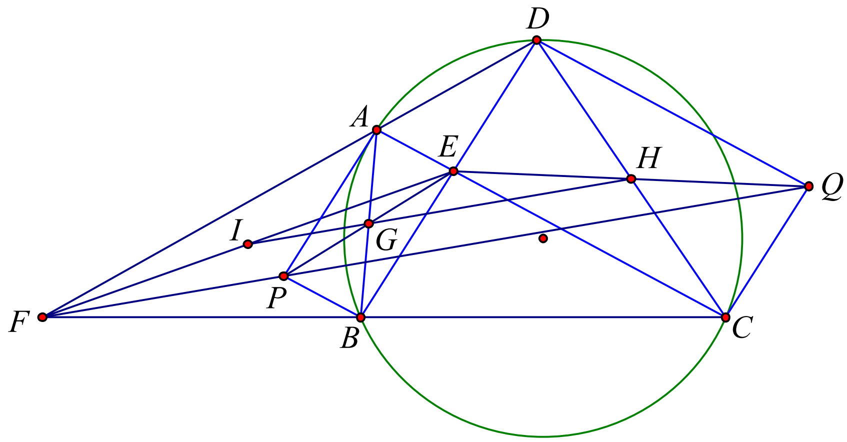
Tương tự, ta có $(CDFP) = -1$, suy ra P, Q, O, E thẳng hàng (đpcm)

Bài 24.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E, AD cắt BC tại F. Trung điểm của AB, CD lần lượt là G, H. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EGH.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng)

Lời giải.



Dựng các hình bình hành $AEBP, DECQ$. Gọi I là trung điểm EF, ta có I, G, H thẳng hàng (đường thẳng Gauss), suy ra F, P, Q thẳng hàng.

Ta có $\Delta FAB \sim \Delta FCD \Rightarrow \dfrac{FA}{AB} = \dfrac{FC}{CD}; \Delta EAB \sim \Delta EDC \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{CD}{DE} = \dfrac{CD}{CQ}$.

Suy ra $\Delta FAE \sim \Delta FCQ \Rightarrow \widehat{FEA} = \widehat{FQC}$. Lại có $\widehat{AEP} = \widehat{CQE} \Rightarrow \widehat{FEP} = \widehat{FQE} \Rightarrow \widehat{IEG} = \widehat{IHE}$.

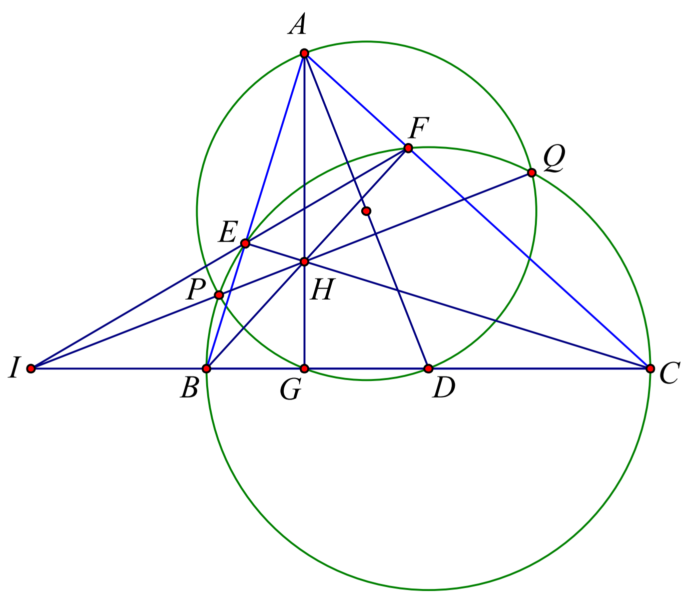
Do đó IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EGH (đpcm)

Bài 25.

Cho H là trực tâm của tam giác ABC không cân và góc A nhọn. Hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là E, F. Gọi D là trung điểm BC; P, Q là giao điểm của hai đường tròn đường kính AD, BC. Chứng minh rằng H, P, Q thẳng hàng và các đường thẳng BC, EF, PQ đồng quy.

(Đề thi HSG Bà Rịa – Vũng Tàu)

Lời giải.



Gọi G là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC. Ta có $P_{H/[BC]} = \overline{HE} \cdot \overline{HC} = \overline{HG} \cdot \overline{HA} = P_{H/[AD]}$

$\Rightarrow H$ nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AD, BC.
$\Rightarrow H, P, Q$ thẳng hàng.
Gọi I là giao điểm của EF và BC. (DEF) là đường tròn Euler của tam giác ABC nên G nằm trên (DEF). Do đó $P_{I/[BC]} = \overline{IB} \cdot \overline{IC} = \overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IG} \cdot \overline{ID} = P_{I/[AD]}$. Suy ra I, P, Q thẳng hàng hay BC, EF, PQ đồng quy tại I (đpcm)

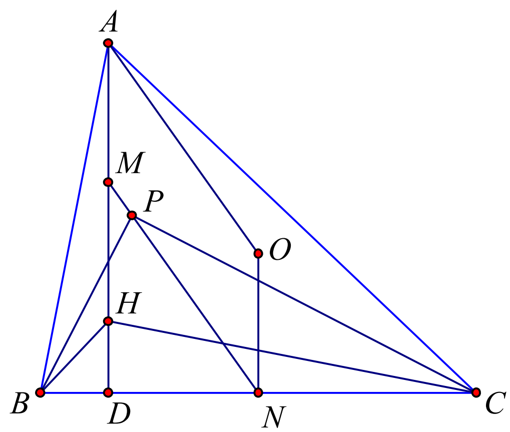
Bài 26.

Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. M, N là trung điểm AH, BC. Các đường phân giác của các góc $\widehat{ABH}, \widehat{ACH}$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng:

1. $\widehat{BPC} = 90°$
2. M, N, P thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển toán lớp 11, THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Lời giải.



Ta có $\widehat{PBH} = \dfrac{90° - A}{2}, \widehat{HBC} = 90° - C \Rightarrow \widehat{PBC} = 135° - \dfrac{A}{2} - C$. Tương tự: $\widehat{PCB} = 135° - \dfrac{A}{2} - B$.

$\Rightarrow \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 270° - A - B - C = 90° \Rightarrow \widehat{BPC} = 90°$

Gọi D là giao điểm của AH và BC, O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $AMNO$ là hình bình hành, suy ra $\widehat{DMN} = \widehat{DAO}$.

Mặt khác, O, H là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC, do đó:

$\widehat{DAO} = \widehat{BAC} - 2\widehat{BAD} = A - 2(90° - B) \Rightarrow \widehat{DNM} = 90° - \widehat{DMN} = 270° - A - 2B = 2\widehat{BCP} = \widehat{DNP}$, suy ra M, N, P thẳng hàng (đpcm)

Bài 27.

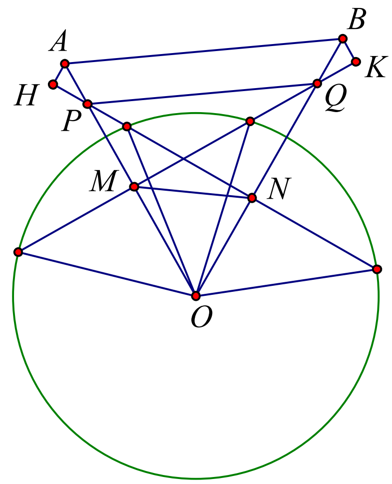
Cho hai điểm A, B cố định và $(O;R)$ thay đổi sao cho $\dfrac{d(A,b)}{d(B,A)} = 2$, trong đó a, b theo thứ tự là đường đối cực của A, B đối với (O). Xác định vị trí của O để S_{OAB} lớn nhất.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 2)

Lời giải.

Ta có bổ đề sau (định lý Salmon): $\dfrac{d\left(A,b\right)}{d\left(B,A\right)}=\dfrac{OA}{OB}$.

Chứng minh:



Gọi H,K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A lên b và B lên a; P,Q là giao điểm của các cặp đường thẳng $\left(OA,b\right)$ và $\left(OB,a\right)$; M,N là ảnh của A,B qua phép nghịch đảo cực O, phương tích R^2.

Ta có $\widehat{PMQ}=\widehat{PNQ}=90^\circ \Rightarrow M,N,P,Q$ đồng viên. Mặt khác, $\overline{OA}\cdot\overline{OM}=\overline{OB}\cdot\overline{ON}=R^2 \Rightarrow A,B,M,N$ đồng viên. Suy ra $AB\parallel PQ$.

Do đó ta có $\dfrac{AH}{ON}=\dfrac{AP}{OP}=\dfrac{BQ}{OQ}=\dfrac{BK}{OM}\Rightarrow\dfrac{d\left(A,b\right)}{d\left(B,a\right)}=\dfrac{AH}{BK}=\dfrac{ON}{OM}=\dfrac{OA}{OB}$ (đpcm)

Trở lại với bài toán.

Từ bổ đề, ta có $OA=2OB$. Đặt $AB=a,OB=x,OA=2x$ $\left(a,x>0\right)$

Áp dụng công thức Heron, ta có :

$$16S_{OAB}^2=\left(3x+a\right)\left(3x-a\right)\left(a+x\right)\left(a-x\right)=9\left(x^2-\frac{1}{9}a^2\right)\left(a^2-x^2\right)\le 9\left(\frac{x^2-\frac{1}{9}a^2+a^2-x^2}{2}\right)^2=\frac{16a^4}{9}$$

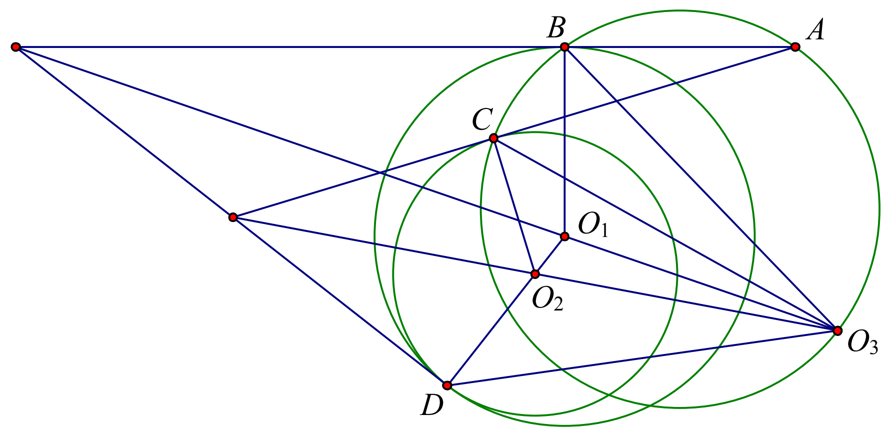
Vậy $\max S_{OAB}=\dfrac{a^2}{3}\Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{9}a^2=a^2-x^2\Leftrightarrow x=a\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Bài 28.

Gọi B là điểm trên đường tròn $\left(O_1\right)$ và A là điểm khác B nằm trên tiếp tuyến tại B của $\left(O_1\right)$. Gọi C là điểm không nằm trên $\left(O_1\right)$ sao cho đường thẳng AC cắt $\left(O_1\right)$ tại hai điểm phân biệt. Đường tròn $\left(O_2\right)$ tiếp xúc với AC tại C và tiếp xúc với $\left(O_1\right)$ tại D nằm khác phía với B so với đường thẳng AC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên đương tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Đề thi chọn đội tuyển Thái Bình)

Lời giải.



Gọi O_3 là tâm (BCD), tiếp tuyến chung của của $(O_1),(O_2)$ là d, D_l là phép đối xứng trục với trục đối xứng là đường thẳng l.

Ta có $D_{O_1O_3}: AB \to d, D_{O_2O_3}: AC \to d$, do đó $(CA;CO_3) \equiv (DO_3;d) \equiv (BA;BO_3) \pmod{\pi}$, suy ra các điểm A,B,C,O_3 đồng viên (đpcm)

Bài 29.

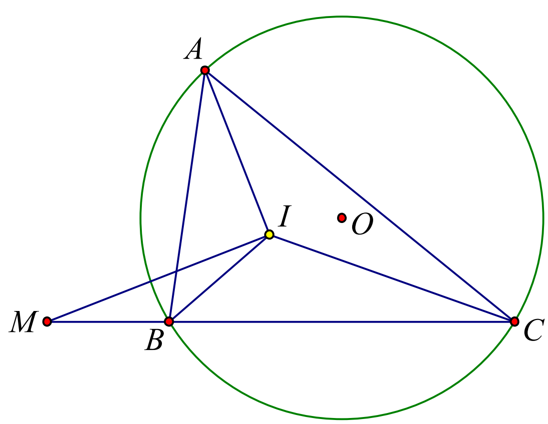
1. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Các đường thẳng qua I vuông góc với AI,BI,CI cắt BC,CA,AB tại M,N,P theo thứ tự. Chứng minh rằng M,N,P cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OI.

2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) cố định, AB cố định và khác đường kính, C di động trên đường tròn. Gọi N là trung điểm AC, M là hình chiếu của N trên BC. Tìm quỹ tích M khi C di động trên (O).

(Đề thi khảo sát đội tuyển THPT chuyên Thái Bình)

Lời giải.

1.

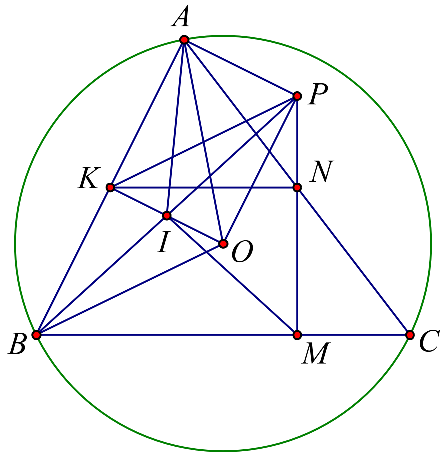


Giả sử $AB < AC$, khi đó M nằm trên tia đối của tia BC.

Ta có $\widehat{AIB} = 90^\circ + \dfrac{C}{2} \Rightarrow \widehat{MIB} = \dfrac{C}{2} = \widehat{MCI} \Rightarrow \Delta MIB \sim \Delta MCI \Rightarrow MI^2 = MB \cdot MC$.

Suy ra M nằm trên trục đẳng phương của (O) và đường tròn điểm tâm I. Tương tự với N,P, ta suy ra M,N,P thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng vuông góc với OI.

2.



Đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt MN tại P. Gọi K là trung điểm AB, I là trung điểm OK.

Ta có $MN \perp KN$, suy ra tứ giác $APNK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{ANK} = C \Rightarrow AP = AK \cot\alpha = KO$. Do đó $AKOP$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BKOP$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm BP.

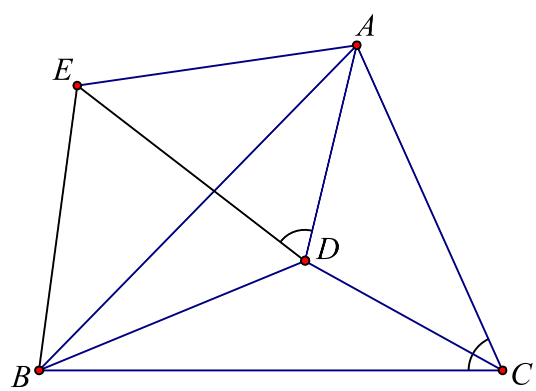
Mà tam giác BMP vuông tại M nên $IM = IB$ không đổi. Suy ra M nằm trên đường tròn tâm I bán kính IB.

Bài 30.

Tam giác ABC nhọn, D nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{ADB} = 60° + \widehat{ACB}$ và $DA \cdot BC = DB \cdot AC$. Chứng minh rằng $DC \cdot AB = AD \cdot BC$.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 1)

Lời giải.



Dựng tam giác đều BED sao cho điểm E nằm trong góc ADB.

Ta có $DA \cdot BC = DB \cdot AC, DB = DE, \widehat{ADE} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AED$.

Suy ra $DA \cdot BC = AC \cdot DE = AC \cdot BE$ (1)

Từ $\Delta ABC \sim \Delta AED$, ta suy ra $\Delta AEB \sim \Delta ADC \Rightarrow DC \cdot AB = AC \cdot BE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

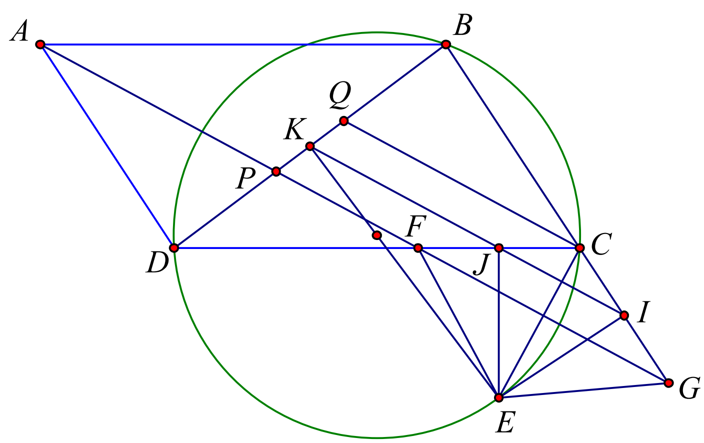
Bài 31.

Cho tam giác BCD nội tiếp đường tròn (O). Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi d là đường phân giác trong của góc $\widehat{BAD}$, d cắt đường thẳng CD tại F và cắt đường thẳng BC tại G. Gọi Δ là đường thẳng qua C và vuông góc với d; Δ cắt (O) tại điểm thứ hai E. Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của E lên các đường thẳng CB, CD, BD. Chứng minh rằng:

1. I, J, K thẳng hàng.
2. E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CFG.

(Đề thi chọn đội tuyển Lâm Đồng, vòng 2)

Lời giải.



1.

Đây là kết quả quen thuộc về đường thẳng Simson nên không nêu ra chứng minh ở đây.

2.

Gọi P là giao điểm của d và BD. Đường thẳng qua C song song với d cắt BD tại Q.

Ta có $\widehat{CFG} = \widehat{BAG} = \widehat{DAG} = \widehat{CGF} \Rightarrow \Delta CGF$ cân tại $C \Rightarrow CG = CF \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{JCE}$. Từ đó suy ra $\Delta ICE = \Delta JCE \Rightarrow EI = EJ, CI = CJ$

Lại có $\widehat{EBI} = \widehat{EDJ}$, suy ra $\Delta BIE = \Delta DJE \Rightarrow EB = ED \Rightarrow K$ là trung điểm BD, hay K là trung điểm PQ.

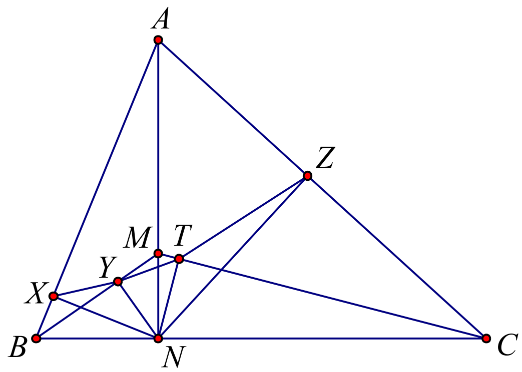
Từ $CI = CJ$, ta có $IJ \parallel d \parallel CQ \Rightarrow I, J$ là trung điểm CG, CF. Suy ra E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCGF (đpcm)

Bài 32.

Cho tam giác ABC nhọn, điểm M bất kì trong tam giác. AM cắt BC tại N. X, Y, Z, T là hình chiếu của N trên AB, MB, AC, MC. Chứng minh rằng $AM \perp BC$ khi và chỉ khi hoặc X, Y, Z, T đồng viên hoặc X, Y, Z, T thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Lời giải.



Ta có các bộ 4 điểm sau đồng viên: $(X,Y,N,B);(Y,M,T,N);(T,N,Z,C);(A,X,N,Z)$.

Điều kiện cần và đủ để X,Y,Z,T thẳng hàng hoặc đồng viên là $(YX,YT)\equiv(ZX,ZT)(\bmod \pi)(1)$.

$$\Leftrightarrow (YX,YN)+(YN,YT)\equiv(ZX,ZN)+(ZN,ZT)(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow (BX,BN)+(MN,MT)\equiv(AX,AN)+(CN,CT)(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow (BA,BN)+(AN,MC)\equiv(AB,AN)+(CN,CM)(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow (BA,BN)+(AN,AB)+(AN,MC)+(CM,CN)\equiv 0(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow (AN,BN)+(AN,CN)\equiv 0(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow 2(AN,CN)+(BN,CN)\equiv 0(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow (AN,CN)\equiv\frac{\pi}{2}(\bmod \pi)$$
$$\Leftrightarrow AN\perp BC$$

Vậy ta có đpcm. Ta còn có thể chứng minh được X,Y,Z,T thẳng hàng khi và chỉ khi M là trực tâm tam giác ABC

Bài 33.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các cạnh AB,AC tại P,Q và tiếp xúc trong với (O) tại S. Gọi giao điểm của AS và PQ là D.

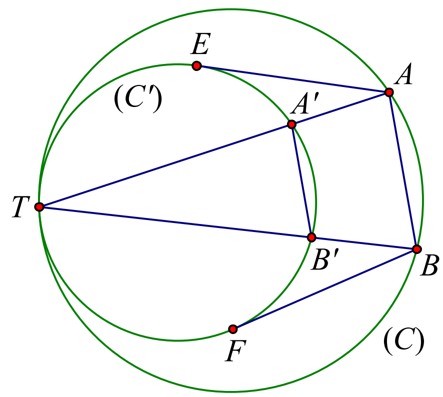
Chứng minh rằng $\widehat{BDP}=\widehat{CDQ}$.

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Tĩnh)

Lời giải.

Bổ đề: Cho đường tròn (C) và hai điểm A,B nằm trên (C). Một đường tròn (C') tiếp xúc trong với (C) tại T. Nếu AE,BF là các tiếp tuyến của (C') tại E,F thì ta có $\frac{TA}{TB}=\frac{AE}{BF}$.

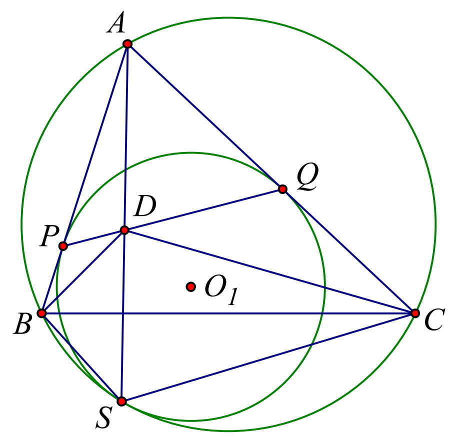
Chứng minh:



Gọi A',B' là giao điểm của TA,TB với (C'). Phép vị tự tâm T biến $(C')\to(C)$ biến $A'B'\to AB$, do đó $A'B'\parallel AB$. Suy ra: $\left(\frac{AE}{TA'}\right)^2=\frac{AA'}{A'T}\cdot\frac{AT}{A'T}=\frac{BB'}{B'T}\cdot\frac{BT}{B'T}=\left(\frac{BF}{TB'}\right)^2$

$\Rightarrow\frac{AE}{TA'}=\frac{BF}{TB'}\Rightarrow\frac{AE}{BF}=\frac{TA'}{TB'}=\frac{TA}{TB}$ (đpcm)

Trở lại bài toán:



Áp dụng bổ đề, ta có $\frac{BP}{CQ}=\frac{SB}{SC}=\frac{\sin\widehat{BAS}}{\sin\widehat{CAS}}=\frac{PD}{QD}$.

Lại có $\widehat{BPD}=\widehat{CQD}$. Suy ra $\Delta BPD\sim\Delta CQD\Rightarrow\widehat{BDP}=\widehat{CDQ}$ (đpcm)

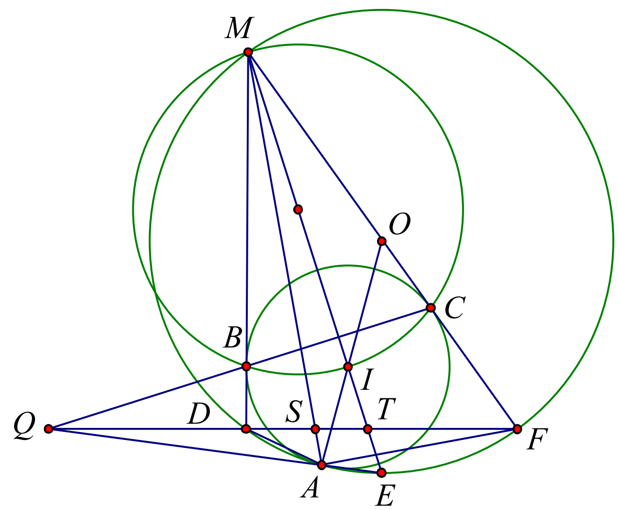
Bài 34.

Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A,M khác đường kính. Điểm I trên đoạn $OA\,(I\neq O,A)$. Hai đường tròn (I,IA) và $[IM]$ cắt nhau tại B,C. Các tia MB,MI,MC cắt (O) tại D,E,F theo thứ tự. Đường thẳng DF cắt ME,MA,AE lần lượt tại T,S,Q. Chứng minh rằng:

1. $SD\cdot SF=ST\cdot SQ$
2. B,C,Q thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội)

Lời giải.



1.

Từ giả thiết của bài toán, ta có ME là phân giác của góc $\widehat{DMF}$, do đó:

$$(QA,QT)\equiv(DA,DF)+(AQ,AD)\equiv(MA,MF)+(ME,MD)$$
$$\equiv(MA,MF)+(MF,ME)\equiv(MA,ME)(\bmod \pi)$$

Suy ra M,T,A,Q đồng viên. Vậy $SD\cdot SF=SM\cdot SA=ST\cdot SQ$.

2.

Dễ thấy rằng (I,IA) là đường tròn M – mixtilinear của tam giác MDF.

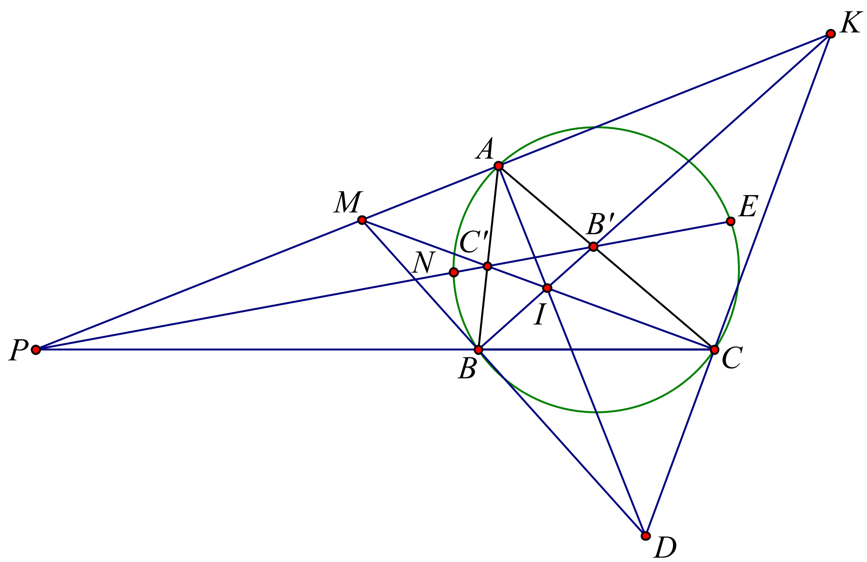
Theo bổ đề ở bài 33, ta có $\frac{AD}{AF}=\frac{DB}{FC}$. Vì E là trung điểm cung EF nên AQ là phân giác ngoài của tam giác ADF, suy ra $\frac{QD}{QF}=\frac{AD}{AF}=\frac{DB}{FC}$. Vì MD,MF là các tiếp tuyến của (I,IA) nên ta có $MB=MC$. Do đó $\frac{QD}{QF}\cdot\frac{CF}{CM}\cdot\frac{BM}{BD}=1$. Theo định lý Menelaus, ta suy ra Q,B,C thẳng hàng (đpcm)

Bài 35.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng vuông góc với IA tại A cắt BI,CI tại K,M. Gọi B',C' là giao điểm của hai cặp đường thẳng $(BI,AC),(CI,AB)$. Đường thẳng $B'C'$ cắt (ABC) tại N,E. Chứng minh rằng bốn điểm M,N,E,K thuộc cùng 1 đường tròn.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 1)

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của MB và KC.
Từ giả thiết, ta có M, K là các tâm bàng tiếp của tam giác ABC, suy ra D cũng là tâm bàng tiếp của tam giác $\Rightarrow A, I, D$ thẳng hàng.
Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác MBC' và KCB', ta có MK, NE, BC đồng quy tại P.
Các bộ 4 điểm (M, B, C, K) và (N, B, C, E) đồng viên. Do đó ta có $\overline{PM} \cdot \overline{PK} = \overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PN} \cdot \overline{PE}$
$\Rightarrow M, N, E, K$ đồng viên (đpcm)

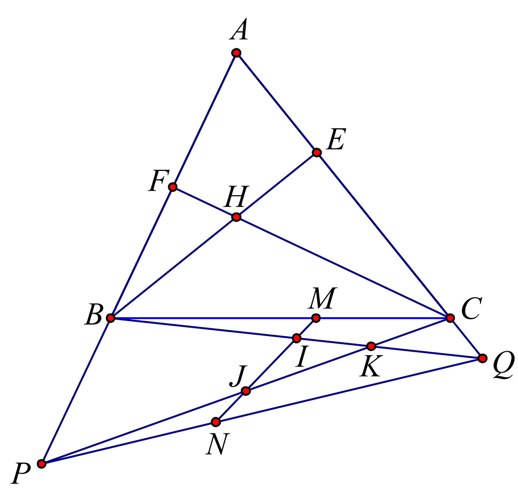
Bài 36.

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Trên các tia FB, EC theo thứ tự lấy các điểm P, Q sao cho $FP = FC, EQ = EB$. BQ cắt CP tại K. I, J theo thứ tự là trung điểm BQ, CP. IJ cắt BC, PQ theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng:

1. $HK \perp IJ$
2. $\widehat{IAM} = \widehat{JAN}$

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Lời giải.



1. Từ giả thiết, ta có $\widehat{BPC} = \widehat{BQC} = 45°$, suy ra tứ giác $BCQP$ nội tiếp. Do đó:

$$P_{K/[BQ]} = \overline{KB} \cdot \overline{KQ} = \overline{KC} \cdot \overline{KP} = P_{K/[CP]}$$

Theo tính chất trực tâm tam giác, ta có:

$$P_{H/[BQ]} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF} = P_{H/[CP]}$$

Vậy HK là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BQ, CP. Mà IJ là đường nối tâm của hai đường tròn nên ta có $HK \perp IJ$.

2. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác KBC với cát tuyến MIJ, ta có:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{JC}}{\overline{JK}} \cdot \frac{\overline{IK}}{\overline{IB}} = 1 = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NP}} \cdot \frac{\overline{IK}}{\overline{IQ}} \cdot \frac{\overline{JP}}{\overline{JK}} \Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NP}}$$

Gọi d là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$, gọi ảnh của B, M, C qua phép đối xứng trục d là B', M', C'. Ta có B', M', C' thẳng hàng và $B'C' \parallel PQ$. Lại có $\frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NP}}$. Suy ra A, M', N thẳng hàng. Do đó $\widehat{CAM} = \widehat{BAM'} = \widehat{BAN}$. Tương tự, ta cũng có $\widehat{CAI} = \widehat{BAJ}$.

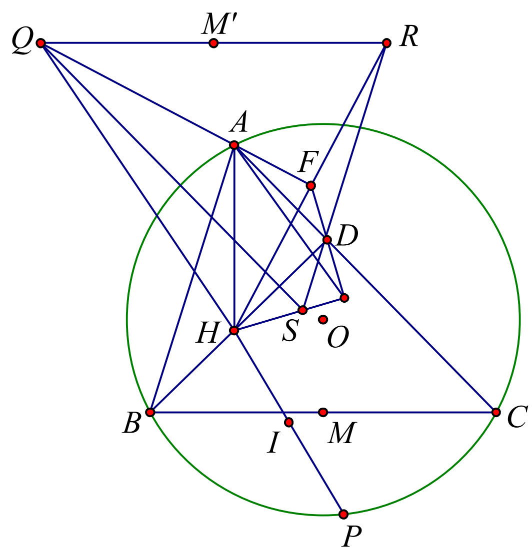
Từ đó suy ra $\widehat{IAM} = \widehat{JAN}$ (đpcm)

Bài 37.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trực tâm H. D là chân đường cao kẻ từ đỉnh B của ΔABC, điểm P bất kì trên (O). Q, R, S là các điểm đối xứng với P qua các trung điểm các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự. AQ cắt HR tại F. Chứng minh rằng $HS \perp DF$.

(Đề thi chọn đội tuyển Đà Nẵng)

Lời giải.



Phép vị tự Z tâm P tỉ số 2 biến tam giác trung bình của tam giác ABC thành tam giác SQR nên ta có $\Delta ABC = \Delta SQR$. Mặt khác, trung điểm I của PH nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC và $Z(I) = H$ nên H, S, Q, R đồng viên.

Gọi M, M', O' là trung điểm BC, QR và tâm ngoại tiếp tam giác SQR, ta có $AH = 2OM = 2O'M'$ và $AH \perp QR$ nên A là trực tâm tam giác HQR. Suy ra $\widehat{AFH} = \widehat{ADH} = 90° \Rightarrow A, H, D, F$ đồng viên.

Suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{AHF} = \widehat{AHD} - \widehat{DHF} = \widehat{RQS} - \widehat{DHF} = \widehat{RHS} - \widehat{DHF} = \widehat{DHS}$. Từ đó ta có đpcm.

Bài 38.

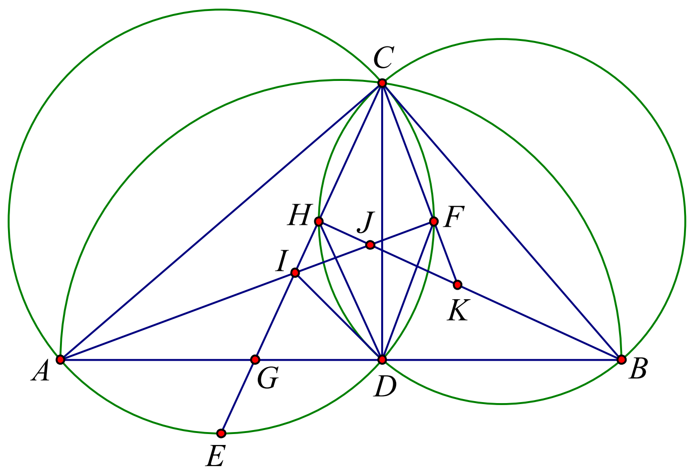
Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tia phân giác của góc ACD cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai E, cắt tia phân giác của góc ABC tại H.

1. Tia phân giác của góc CAB cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai F, cắt CE tại I. Tính diện tích tam giác FID khi nó đều.

2. Trên đoạn BH lấy điểm K sao cho $HK = HD$. Gọi J là giao điểm của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến AB là lớn nhất.

(Đề kiểm tra đội tuyển Ninh Bình)

Lời giải.



1.

Ta có I là tâm nội tiếp tam giác ACD và F là trung điểm cung CD không chứa A của (ACD). Do đó $FI = ID$.

Suy ra tam giác FID đều $\Leftrightarrow \widehat{DFI} = 60° \Leftrightarrow \widehat{ACD} = 60° \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 30°$.

Để tính diện tích tam giác FID, ta cần tính độ dài cạnh FD.

Ta có $FD = \dfrac{CD}{2\cos 15°} = \dfrac{AC\sin 30°}{2\cos 15°} = \dfrac{2R\cos 30° \cdot \sin 30°}{2\cos 15°} = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Do đó $S_{FID} = \dfrac{FD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2\left(6\sqrt{3}-9\right)}{16}$.

2.

Bằng các phép biến đổi góc đơn giản, ta có $CH \perp BH$. Do đó B, C, D, H đồng viên. Lại có H là trung điểm cung CD không chứa B của (BCD) và $HK = HD$ nên K là tâm nội tiếp tam giác BCD.

Từ giả thiết của bài toán, ta cũng có I, J là tâm nội tiếp các tam giác ADC, ABC.

Gọi G là giao điểm của CE và AB. Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{GI}{IC}=\frac{AG}{AC}=\frac{DG}{DC}=\frac{AG+DG}{AC+DC}=\frac{AD}{AC+CD}\Rightarrow\frac{d(I,AB)}{CD}=\frac{GI}{GC}=\frac{AD}{AC+CD+DA}$$

Lại có $\Delta ACD\sim\Delta ABC\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC+CD+DA}{AB+BC+CA}\Rightarrow\dfrac{d(I,AB)}{CD}=\dfrac{AC}{AB+BC+CA}$.

Tương tự, ta có $\dfrac{d(J,AB)}{CD}=\dfrac{AB}{AB+BC+CA},\dfrac{d(K,AB)}{CD}=\dfrac{BC}{AB+BC+CA}$.

Do đó $d(I,AB)+d(J,AB)+d(K,AB)=CD$.

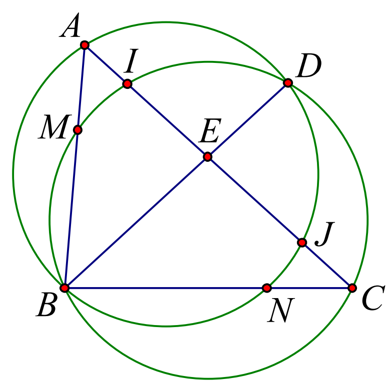
Vậy $d(I,AB)+d(J,AB)+d(K,AB)\max\Leftrightarrow CD\max\Leftrightarrow C$ là trung điểm cung AB.

Bài 39.

Cho tam giác ABC. Trên AB,BC lần lượt lấy M,N sao cho $AM=CN$. Hai đường tròn (BCM) và (BAN) cắt nhau tại B,D. Chứng minh BD là phân giác của $\widehat{ABC}$.

(Đề thi HSG Quảng Nam)

Lời giải.



Gọi E là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$; I là giao điểm của (BCM) với AC, J là giao điểm của (BAN) với AC. Định hướng đường thẳng AC theo hướng của vector $\overrightarrow{AC}$. Đặt $AM=CN=t$.

Ta có $\overline{AE}=\dfrac{bc}{b+c},\overline{EC}=\dfrac{ba}{b+c}$.

B,M,I,C đồng viên $\Rightarrow\overline{AM}\cdot\overline{AB}=\overline{AI}\cdot\overline{AC}\Rightarrow\overline{AI}=\dfrac{tc}{b}\Rightarrow\overline{EI}=\overline{AI}-\overline{AE}=\dfrac{tc}{b}-\dfrac{bc}{a+c}=\dfrac{c\left(t\left(a+c\right)-b^2\right)}{b\left(a+c\right)}$

Do đó $P_{E/(BMC)}=\overline{EI}\cdot\overline{EC}=\dfrac{c\left(t\left(a+c\right)-b^2\right)}{b\left(a+c\right)}\cdot\dfrac{ba}{a+c}=\dfrac{ac\left(t\left(a+c\right)-b^2\right)}{\left(a+c\right)^2}$.

Hoàn toàn tương tự, ta có $P_{E/(BNA)}=\dfrac{ac\left(t\left(a+c\right)-b^2\right)}{\left(a+c\right)^2}$.

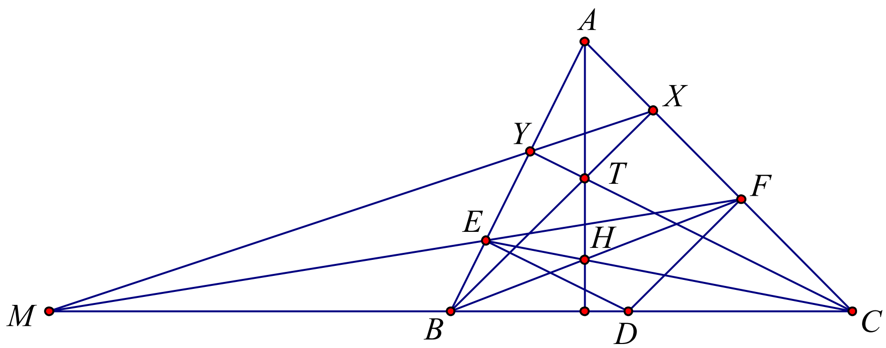
Suy ra E nằm trên trục đẳng phương của (BCM) và (BAN), do đó B,E,D thẳng hàng nên BD là phân giác của $\widehat{ABC}$ (đpcm)

Bài 40.

Cho tam giác ABC có phân giác trong AD. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của D lên AB,AC. Gọi H là giao điểm của BF,CE. Chứng minh rằng $AH\perp BC$.

(Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An, vòng 1)

Lời giải.



Gọi T là trực tâm tam giác ABC, BX,CY là hai đường cao của tam giác. M,N là giao điểm của XY, EF với BC. Ta có

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\frac{DF\cot C}{DF\cot\frac{A}{2}}\cdot\frac{DE\cot\frac{A}{2}}{DE\cot B}=\frac{\cot C}{\cot B}\Rightarrow\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}=\frac{\tan C}{\tan B}$$

$$\frac{\overline{XC}}{\overline{XA}}\cdot\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}=\frac{BX\cot C}{BX\cot A}\cdot\frac{CY\cot A}{CY\cot B}=\frac{\cot C}{\cot B}\Rightarrow\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{\tan C}{\tan B}$$

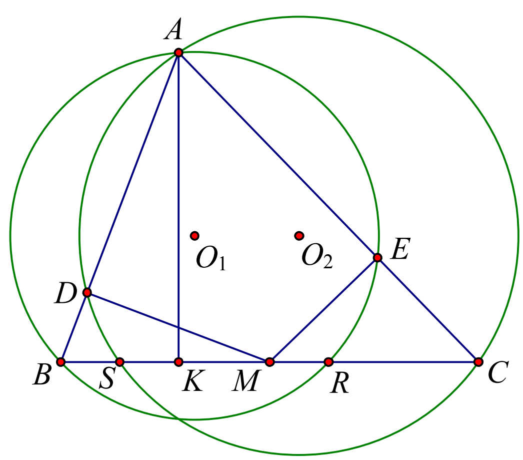
Do đó $M\equiv N$ hay BC,XY,EF đồng quy. Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác BXF và CYE, ta có A,T,H thẳng hàng, từ đó suy ra đpcm.

Bài 41.

Cho tam giác nhọn ABC, M là trung điểm BC. D,E là hình chiếu vuông góc của M lên AB,AC. Đường tròn (O_1) đi qua A,B,E. Đường tròn (O_2) đi qua A,C,D. Chứng minh rằng $O_1O_2\parallel BC$.

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A1)

Lời giải.



Gọi R,S là giao điểm khác B,C của $(O_1),(O_2)$ với BC; K là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Ta có hai bộ 4 điểm (A,E,K,M) và (A,E,B,R) đồng viên, do đó:

$\overline{CK}\cdot\overline{CM}=\overline{CA}\cdot\overline{CE}=\overline{CB}\cdot\overline{CR}\Rightarrow\overline{CK}=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CM}}\cdot\overline{CR}=2\overline{CR}$. Tương tự, ta có $\overline{BK}=2\overline{BS}$ (1).

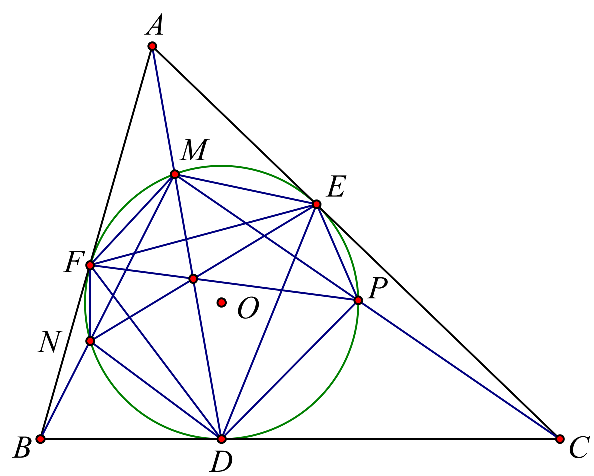
Để chứng minh $O_1O_2 \parallel BC$, ta sẽ chứng minh AK là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $\overline{KS}\cdot\overline{KC}=\overline{KR}\cdot\overline{KB}\Leftrightarrow\overline{KS}\cdot\overline{RC}=\overline{KR}\cdot\overline{SB}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{KS}}{\overline{SB}}=\dfrac{\overline{KR}}{\overline{RC}}$. Mà điều này luôn đúng vì từ (1), ta có R,S là trung điểm của KC,KB. Vậy ta có đpcm.

Bài 42.

Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB theo thứ tự tại D, E, F. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD và đường tròn (O); N,P theo thứ tự là giao điểm thứ hai của MB,MC với (O). Chứng minh rằng ba đường thẳng MD,NE,PF đồng quy.

(Đề thi chọn đội tuyển Ninh Bình)

Lời giải.



Ta có các tứ giác $DEMF, DMFN, DMEP$ là các tứ giác điều hòa, do đó:

$$\frac{\sin\widehat{FDM}}{\sin\widehat{EDM}}\cdot\frac{\sin\widehat{DEN}}{\sin\widehat{FEN}}\cdot\frac{\sin\widehat{EFP}}{\sin\widehat{DFP}}=\frac{MF}{ME}\cdot\frac{DN}{FN}\cdot\frac{EP}{DP}=\frac{MF}{ME}\cdot\frac{DM}{FM}\cdot\frac{EM}{DM}=1$$

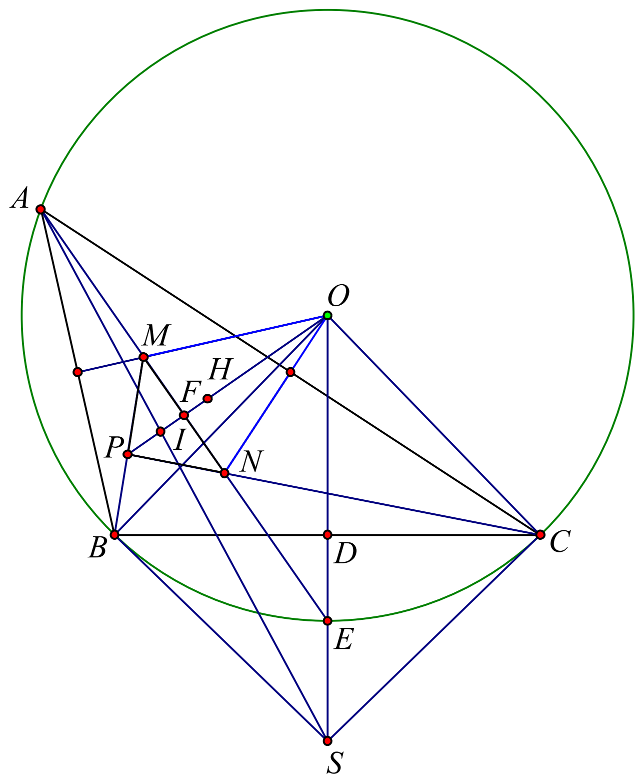
Theo định lý Céva sin cho tam giác DEF, ta có DM, EN, FP đồng quy (đpcm)

Bài 43.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt nhau tại S. Trung trực của AB,AC cắt phân giác trong góc BAC tại M,N. BM,CN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng SA đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP HN)

Lời giải.



Gọi D,E,F,H là trung điểm BC, trung điểm cung BC không chứa A của (O), trung điểm MN và trực tâm tam giác OMN.

Ta có $\widehat{IMN}=\frac{1}{2}\widehat{BMN}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAM}+\widehat{ABM}\right)=\frac{1}{2}\widehat{BAC},\widehat{HMN}=90^\circ-\widehat{ONM}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Tương tự, ta suy ra I,H đối xứng với nhau qua AE.

Theo một kết quả quen biết thì ta có AS là đường đối trung của tam giác ABC nên để chứng minh A,I,S thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh A,H,D thẳng hàng. Ta có

$$\frac{HO}{HF}=\frac{FO}{FH}-1=\frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}-1}{1-\cos^2\frac{A}{2}};\ \frac{DE}{DO}=\frac{R\left(1-\cos A\right)}{R\cos A}=\frac{2-2\cos^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}-1}$$

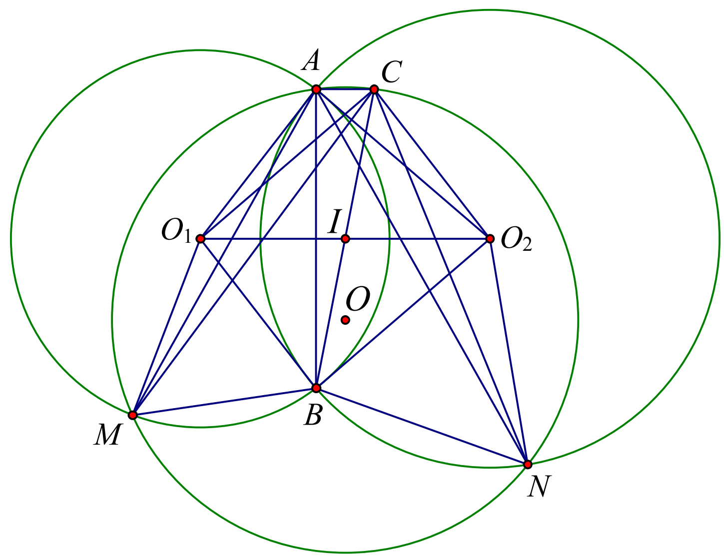
Do đó $\frac{AF}{AE}\cdot\frac{DE}{DO}\cdot\frac{HO}{HF}=1\Rightarrow A,D,H$ thẳng hàng theo định lý Menelaus. Vậy ta có đpcm.

Bài 44.

Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A,B và I là trung điểm O_1O_2. Gọi C là điểm đối xứng với B qua I. Một đường tròn (O) qua A,C cắt $(O_1),(O_2)$ tại M,N. Chứng minh rằng $CM=CN$.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 3)

Lời giải.



Gọi N' là điểm trên (O_2) sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{N'AB}$. Từ giả thiết suy ra CO_1BO_2 là hình bình hành.

Ta có $O_2C = O_1B = O_1M, O_2N' = O_2B = O_1A$ và $\widehat{CO_1M} = \widehat{CO_1B} + \widehat{BO_1M} = \widehat{CO_2B} + \widehat{BO_2N'} = \widehat{CO_2N'}$. Suy ra $\Delta CO_1M = \Delta N'O_2C$ (c.g.c)

A, B là hai điểm đối xứng với nhau qua O_1O_2 nên $\widehat{O_1AO_2} = \widehat{O_1BO_2} = \widehat{O_1CO_2} \Rightarrow A, C, O_1, O_2$ đồng viên. Không mất tính tổng quát, giả sử $R_{(O_1)} < R_{(O_2)}$, khi đó tia O_1C nằm trong góc $\widehat{AO_1M}$ và tia O_2A nằm trong góc $\widehat{CO_2N'}$.

Ta có $\widehat{MCN'} = \widehat{O_1CO_2} - \left(\widehat{O_1CM} + \widehat{O_2CN'}\right), \widehat{MAN'} = \widehat{O_1AO_2} - \left(\widehat{O_1AM} + \widehat{O_2AN'}\right)$. Mặt khác:

$$\widehat{O_1CM} + \widehat{O_2CN'} = \widehat{O_1CM} + \widehat{O_1MC} = 180° - \widehat{MO_1C}$$

$$\widehat{O_1AM} + \widehat{O_2AN'} = 90° - \frac{\widehat{MO_1A}}{2} + 90° - \frac{\widehat{NO_2A}}{2} = 180° - \frac{\widehat{MO_1C} + \widehat{AO_1C}}{2} - \frac{\widehat{NO_2C} - \widehat{AO_2C}}{2} = 180° - \widehat{MO_1C}$$

Suy ra $\widehat{MCN'} = \widehat{MAN'} \Rightarrow A, C, M, N'$ đồng viên $\Rightarrow N \equiv N' \Rightarrow CM = CN$ (đpcm)

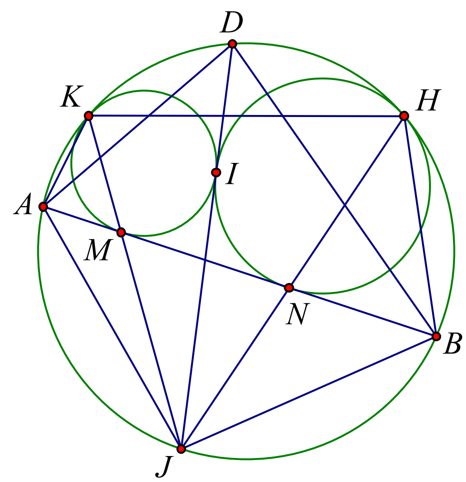
Bài 45.

Cho đường tròn (C), hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ nằm trong (C), cùng tiếp xúc trong với (C) với các tiếp điểm là K, H theo thứ tự. (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại I. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài (T_1) của $(C_1), (C_2)$. (T_1) cắt (C) tại A, B và tiếp xúc với $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại M, N. Vẽ tiếp tuyến chung trong (T_2) của $(C_1), (C_2)$. (T_2) cắt (C) tại D sao cho I thuộc miền trong của tam giác ABD. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác $MNHK$ là tứ giác nội tiếp.
2. DI là phân giác của $\widehat{ADB}$.

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Tĩnh)

Lời giải.



Phép vị tự Z tâm K biến $(C_1)\to(C)$ biến $AB\to$ tiếp tuyến của (C) song song với AB, do đó Z biến $M\to J$ là trung điểm cung AB không chứa K của (C).

Suy ra K,M,J thẳng hàng và $\widehat{AKJ}=\widehat{ABJ}=\widehat{JAM}\Rightarrow \Delta JAK\sim\Delta JMA\Rightarrow \overline{JM}\cdot\overline{JK}=JA^2$.

Tương tự, ta có $\overline{JN}\cdot\overline{JH}=JB^2$. Mà J là trung điểm cung AB của (C) nên $JA=JB$.

$\Rightarrow \overline{JM}\cdot\overline{JK}=\overline{JN}\cdot\overline{JH}\Rightarrow M,N,H,K$ đồng viên.

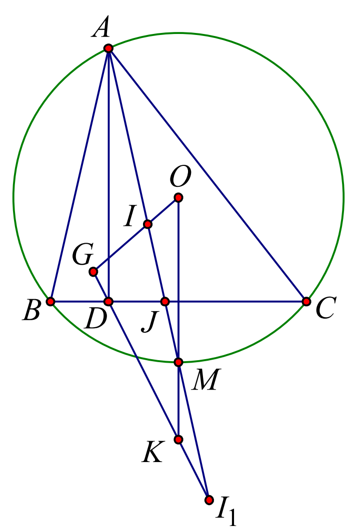
Theo trên, ta có $P_{J/(C_1)}=\overline{JM}\cdot\overline{JK}=\overline{JN}\cdot\overline{JH}=P_{J/(C_2)}\Rightarrow J$ nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2), cũng chính là đường thẳng DI. Suy ra D,I,J thẳng hàng nên DI là phân giác của $\widehat{ADB}$ (đpcm)

Bài 46.

Cho tam giác ABC, tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O, các tâm bàng tiếp I_1,I_2,I_3 tương ứng với các góc A,B,C. AD,BE,CF là các đường cao trong tam giác ABC. Chứng minh rằng OI,I_1D,I_2E,I_3F đồng quy.

(Đề chi chọn đội tuyển Hải Phòng)

Lời giải.



Gọi G là giao điểm của I_1D và OI, M là trung điểm cung BC không chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, J là giao điểm của AI và BC, K là giao điểm của OM và I_1D.

(ABC) là đường tròn Euler của tam giác $I_1I_2I_3$, suy ra M là trung điểm $II_1 \Rightarrow \dfrac{I_1M}{I_1I}=\dfrac{1}{2}$

Áp dụng định lý Thales, ta có $\dfrac{MK}{AD}=\dfrac{I_1M}{I_1A}=\dfrac{IM}{2IM+IA}$.

Lại có $IM=BM=\dfrac{a}{2\cos\frac{A}{2}}$, $IA=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{a+b+c}$, suy ra:

$$\frac{IM}{2IM+IA}=\frac{\frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}}{\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{a+b+c}}=\frac{\frac{a}{2}}{a+\frac{2bc\cos^2\frac{A}{2}}{a+b+c}}=\frac{\frac{a}{2}}{a+\frac{bc\frac{p(p-a)}{bc}}{p}}=\frac{\frac{a}{2}}{a+(p-a)}=\frac{a}{2p}$$

Do đó $MK=\dfrac{ah_a}{2p}=\dfrac{S}{p}=r\Rightarrow\dfrac{KO}{KM}=\dfrac{R+r}{r}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IMO với cát tuyến I_1KG, ta có $\dfrac{GI}{GO}=\dfrac{2r}{R+r}$, từ đó suy ra đpcm.

Bài 47.

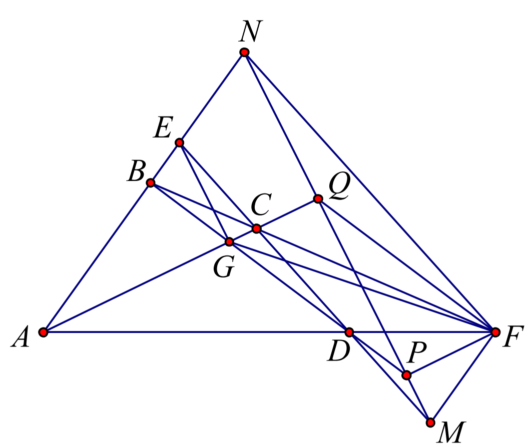
Cho tam giác ABC và D là một điểm trên cạnh BC thỏa $\widehat{CAD}=\widehat{ABC}$. Đường tròn (O) đi qua B và D cắt AB, AD tại E, F; DE cắt BF tại G; M là trung điểm AG. Chứng minh $CM\perp AO$.

(Đề thi chọn đội tuyển Khánh Hòa)

Lời giải.

Bổ đề: Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Qua F kẻ các đường thẳng song song với AB, CD, AC, BD cắt CD, AB, BD, AC tại M, N, P, Q theo thứ tự. Khi đó M, N, P, Q thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng song song với EG.

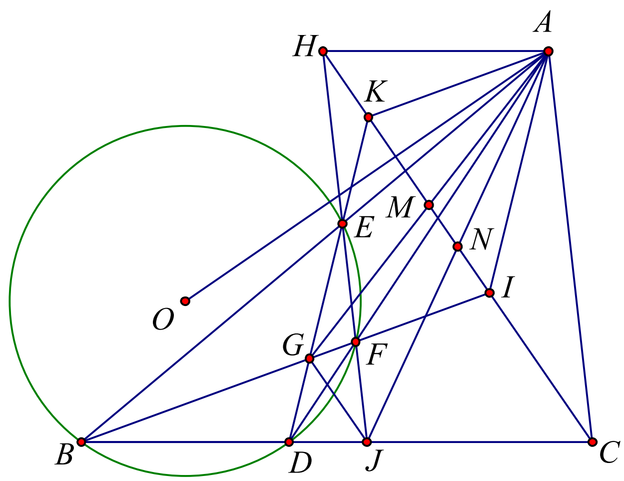
Chứng minh:



Ta có nhận xét đơn giản sau: Cho hai tam giác ABC, DEF có các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy. Khi đó nếu $AB \parallel DE$ và $BC \parallel EF$ thì $AC \parallel DF$.

Áp dụng nhận xét trên cho các cặp tam giác $(FQN, DGE), (FMN, BEG), (FMP, AEG)$, ta suy ra các đường thẳng MN, MP, NQ cùng song song với EG, do đó M, N, P, Q thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng song song với EG.

Trở lại với bài toán.



Qua A kẻ $AH \parallel BD, AK \parallel BF, AI \parallel DE$ $(H \in EF, K \in ED, I \in BF)$. Gọi J là giao điểm của EF, BC.

Xét tứ giác toàn phần $BEFDAJ$, theo bổ đề trên, ta có C, H, I, K thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng song song với JG. Vì CH là đường chéo của hình bình hành $AHJC$ nên CH đi qua trung điểm N của AJ. MN là đường trung bình của tam giác AGJ nên $MN \parallel GJ$. Suy ra C, M, N thẳng hàng và $CM \parallel GJ$.

Mặt khác, theo một kết quả quen thuộc thì ta có JG là đường đối cực của A đối với (O), do đó $AO \perp JG$. Từ các khẳng định trên ta suy ra $CM \parallel AO$ (đpcm)

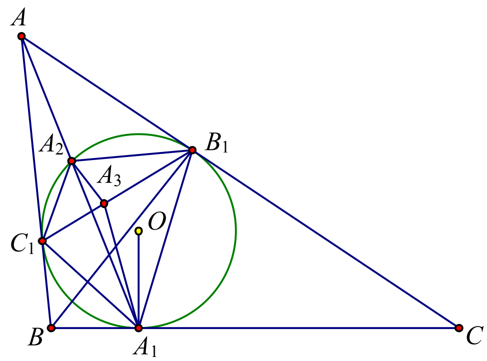
Bài 48.

Cho tam giác không cân ABC. Gọi các tiếp điểm của đường tròn (O) nội tiếp tam giác với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là A_1, B_1, C_1. Đặt $AA_1 \cap (O) = A_2, BB_1 \cap (O) = B_2$. Gọi A_1A_3, B_1B_3 là các đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$.

1. Chứng minh rằng A_2A_3 là phân giác của $\widehat{B_1A_2C_1}$.
2. Gọi P, Q là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$. Chứng minh rằng $O \in PQ$.

(Đề kiểm tra đội tuyển THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Lời giải.



1.

$A_1B_1A_2C_1$ là tứ giác điều hòa nên $\dfrac{A_2B_1}{A_2C_1}=\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1}=\dfrac{A_3B_1}{A_3C_1}$. Do đó A_2A_3 là phân giác của $\widehat{B_1A_2C_1}$.

2.

Ta có:

$$\begin{aligned}(A_1O;A_1A_3)&\equiv(A_1O;A_1C_1)+(A_1C_1;A_1A_3)\equiv\frac{\pi}{2}-(B_1C_1;B_1A_1)+\frac{1}{2}(A_1C_1;A_1B_1)\\&\equiv(A_2C_1;A_2A_3)-(A_2C_1;A_2A_1)\equiv(A_2C_1;A_2A_3)+(A_2A_1;A_2C_1)\\&\equiv(A_2A_1;A_2A_3)\left(\operatorname{mod}\pi\right)\end{aligned}$$

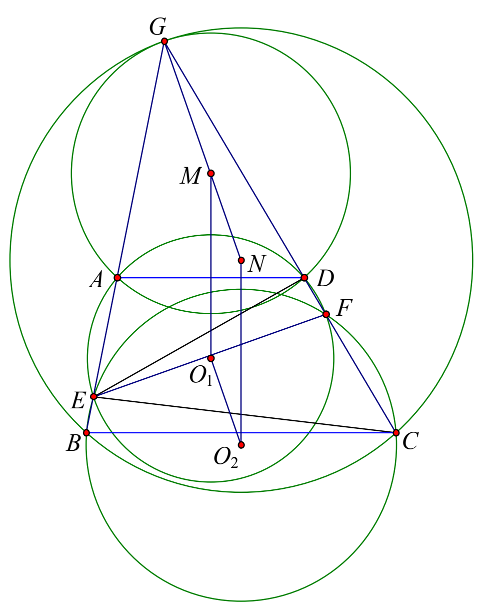
Do đó OA_1 tiếp xúc với $\left(A_1A_2A_3\right)\Rightarrow P_{O/\left(A_1A_2A_3\right)}=OA_1^2$. Tương tự, ta suy ra O nằm trên trục đẳng phương của $\left(A_1A_2A_3\right)$ và $\left(B_1B_2B_3\right)$ nên O,P,Q thẳng hàng.

Bài 49.

Cho hình thang $ABCD$ $\left(AD\parallel BC\right)$, E là điểm di động trên đường thẳng AB; O_1,O_2 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác AED,BEC. Chứng minh rằng độ dài O_1O_2 không đổi.

(Đề thi chọn đội tuyển TPHCM)

Lời giải.



Gọi G là giao điểm của AB và CD; M,N theo thứ tự là tâm ngoại tiếp các tam giác GAD,GBC; F là giao điểm khác E của hai đường tròn $(ADE),(BCE)$.

Ta có $(FD;FE)\equiv(AD;AE)\equiv(BC;BA)\equiv(FC;FE)(\bmod \pi)\Rightarrow F,C,D$ thẳng hàng.

Vì tâm ngoại tiếp và trực tâm là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác nên ta có:

$$(GM;GD)\equiv\frac{\pi}{2}-(AD;AG)\equiv\frac{\pi}{2}-(FD;FE)(\bmod \pi)\Rightarrow EF\perp GM$$

$$(GM;GD)\equiv\frac{\pi}{2}-(AD;AG)=\frac{\pi}{2}-(BC;BG)\equiv(GN;GC)(\bmod \pi)\Rightarrow G,M,N \text{ thẳng hàng } \Rightarrow EF\perp MN$$

Mà EF là trục đẳng phương của (ADE) và $(BCE)\Rightarrow EF\perp O_1O_2$, suy ra $O_1O_2 \parallel MN$.

Lại có $NO_2 \parallel MO_1$ (cùng vuông góc với BC). Do đó MNO_2O_1 là hình bình hành. Suy ra $O_1O_2=MN$ không đổi (đpcm)

Bài 50.

Cho tứ giác toàn phần $ACBDEF$, trong đó tứ giác $ABCD$ có đường tròn nội tiếp tâm I. Gọi A_1,B_1, C_1,D_1 là tiếp điểm của (I) với các cạnh AB,BC,CD,DA. Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên EF. Hình chiếu của M lên các đường thẳng $A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1$ là M_1,M_2,M_3,M_4. Chứng minh rằng M_1,M_2,M_3,M_4 thẳng hàng.

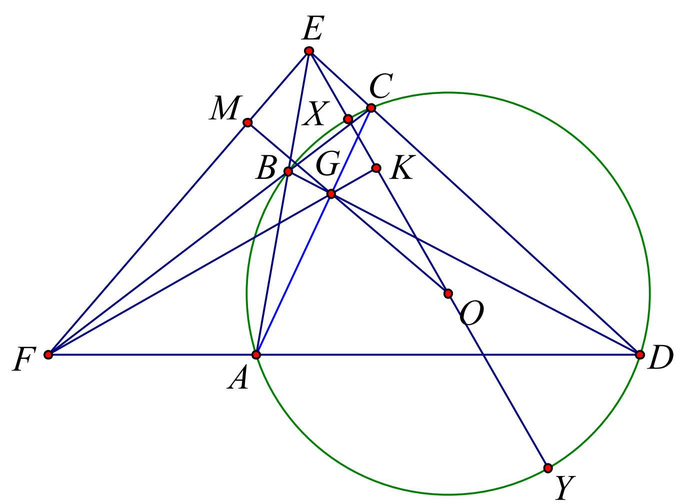
(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 3)

Lời giải.

Ta có hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: Cho tứ giác toàn phần $ACBDEF$, trong đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong (O). Gọi G là giao điểm của AC và BD. M là hình chiếu của G lên EF. Khi đó O,M,G thẳng hàng và M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ACBDEF$.

Chứng minh:



Gọi X,Y là các giao điểm của EO với (O); K là hình chiếu của F lên XY.

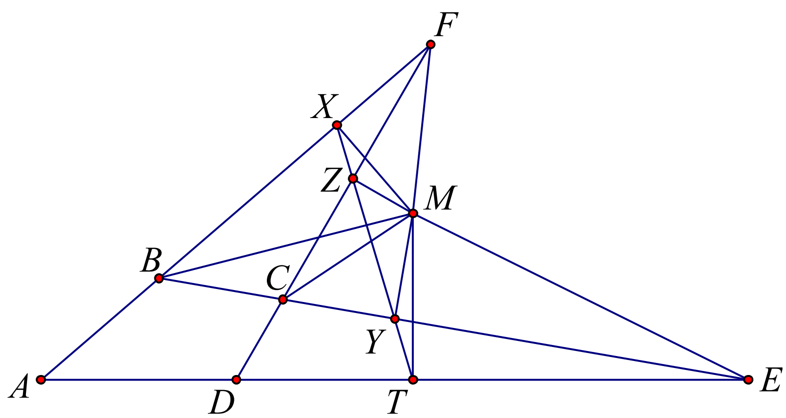
Theo định lý Brocard, ta có G là trực tâm $\Delta EOF \Rightarrow \overline{EM}\cdot\overline{EF}=\overline{EK}\cdot\overline{EO}=EO^2-\overline{OK}\cdot\overline{OE}$ (1)

Mặt khác, $(EKXY)=-1\Rightarrow \overline{OK}\cdot\overline{OE}=OX^2=R^2$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\overline{EM}\cdot\overline{EF}=P_{E/(O)}=\overline{EA}\cdot\overline{EB}=\overline{EC}\cdot\overline{ED}$, suy ra các bộ 4 điểm đồng viên (A,B,M,F) và (C,D,M,F). Do đó M là điểm Miquel của $ABCDEF$.

Bổ đề 2: Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$ và M là điểm Miquel của nó. Gọi X,Y,Z,T là hình chiếu vuông góc của M lên AB,BC,CD,DA. Khi đó X,Y,Z,T thẳng hàng.

Chứng minh:

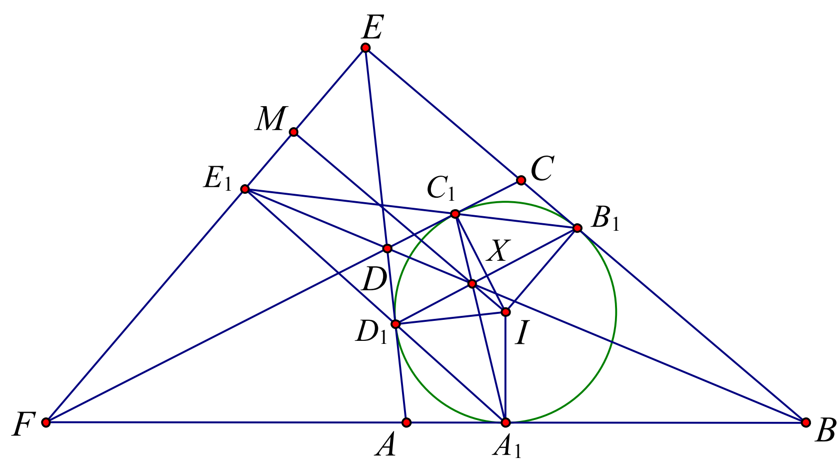


Ta có các bộ 4 điểm $(M,F,X,Z);(M,F,B,C);(M,Z,C,Y)$ đồng viên, do đó:

$$\frac{\pi}{2}-(ZF;ZX)\equiv\frac{\pi}{2}-(MF;MX)\equiv(FX;FM)\equiv(CE;CM)\equiv(ZY;ZM)\equiv\frac{\pi}{2}-(ZC;ZY)(\operatorname{mod}\pi)$$

Suy ra X,Y,Z thẳng hàng. Hoàn toàn tương tự, ta suy ra đpcm.

Trở lại với bài toán ban đầu.



Gọi E_1 là giao điểm của A_1D_1 và B_1C_1; F_1 là giao điểm của A_1B_1 và C_1D_1. Áp dụng định lý Brianchon cho lục giác DD_1ABB_1C, ta có AC, BD,B_1D_1 đồng quy tại X. Tương tự, ta suy ra AC,BD,A_1C_1,B_1D_1 đồng quy. Mặt khác, các đường thẳng AC,BD,A_1C_1,B_1D_1 tương ứng là đường đối cực của E_1,F_1,F,E. Do đó E,F,E_1,F_1 thẳng hàng.

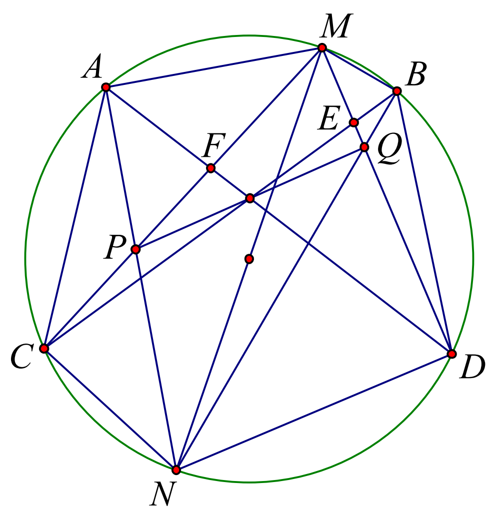
Xét tứ giác toàn phần $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Ta có $IM\perp EF\Rightarrow IM\perp E_1F_1$ và tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp (I). Theo bổ đề 1, ta có M là điểm Miquel của $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Theo bổ đề 2, ta có M_1,M_2,M_3,M_4 thẳng hàng (đpcm)

Bài 51.

Cho lục giác lồi $AMBDNC$ nội tiếp trong đường tròn đường kính MN, $AC = BD$. Gọi F, P là giao điểm của MC với AD, AN; E, Q là giao điểm của MD với BC, BN. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} + \frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} + \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} + \frac{\overline{EQ}}{\overline{EM}}$ là một hằng số.

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHKHTN HN, vòng 3)

Lời giải.



Ta có $(MPFC) = A(AM, AN, AD, AC) = B(BM, BN, BD, BC) = (MQDE)$.

Suy ra $\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} : \frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{EQ}}{\overline{EM}} : \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} = k \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} + \frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} + \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} + \frac{\overline{EQ}}{\overline{EM}} = (k+1)\left(\frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} + \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}}\right)$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{FP}{FM} = \frac{S_{FAP}}{S_{FAM}} = \frac{AP \sin \widehat{NAD}}{AM \sin \widehat{MAD}} = \frac{AP}{AM} \cdot \frac{\cos \widehat{MAD}}{\sin \widehat{MAD}} = \frac{\tan \widehat{AMC}}{\tan \widehat{MAD}}$$

$$\frac{DQ}{DM} = \frac{ND \tan \widehat{BND}}{ND \tan \widehat{MND}} = \frac{\tan \widehat{AMC}}{\tan \widehat{MND}}$$

Từ giả thiết, ta suy ra F nằm giữa P, M; Q nằm giữa D, M. Do đó $\frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} = -\frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}}$.

Vậy $\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} + \frac{\overline{FP}}{\overline{FM}} + \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} + \frac{\overline{EQ}}{\overline{EM}} = 0$, ta có đpcm.

Bài 52.

Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ có bán kính khác nhau và có hai tiếp tuyến chung trong Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại I. Một tiếp tuyến chung ngoài Δ_3 tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại M, N. Đường tròn (O_3) nằm trong phần mặt phẳng giới hạn bởi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ và tiếp xúc với ba đường thẳng này theo thứ tự tại P, Q, R. Biết rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (C).

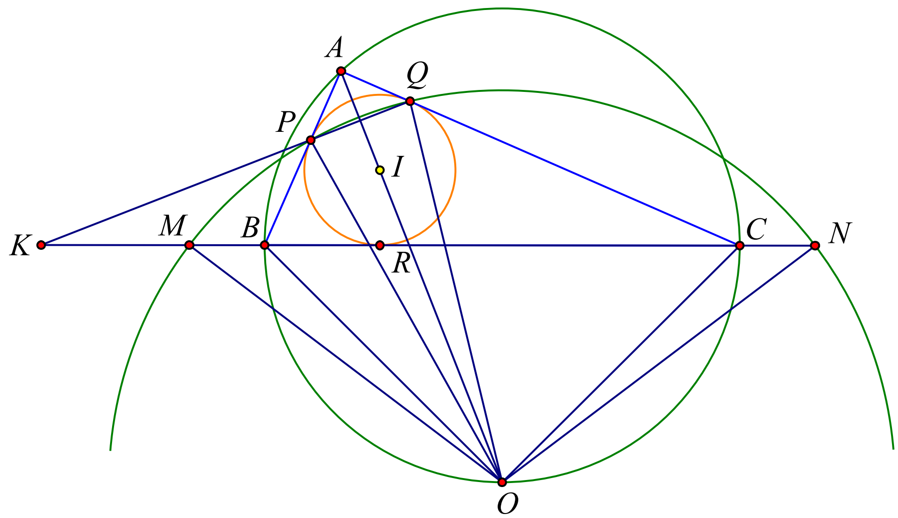
1. Chứng minh rằng tâm của đường tròn (C) nằm trên đường tròn đi qua ba giao điểm của $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

2. Chứng minh $\Delta_1 \perp \Delta_2$

(Đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên Đại học Vinh)

Lời giải.

Ta phát biểu lại bài toán như sau: Cho tam giác ABC không cân tại A; $(O_1),(O_2)$ là hai đường tròn bàng tiếp trong các góc C,B của tam giác. $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc với BC tại M,N. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh AB,AC,BC tại P,Q,R theo thứ tự. Biết rằng M,N,P,Q đồng viên. Chứng minh rằng tâm của $(MNPQ)$ nằm trên (ABC) và tam giác ABC vuông tại A.



1.

Gọi O là trung điểm cung BC không chứa A của (ABC).

Theo một kết quả quen thuộc, ta có $BM = CN = p - a$. Từ đó suy ra $\Delta OBM = \Delta OCN$ (c.g.c)

Ta cũng có $\Delta OAP = \Delta OAQ$ (c.g.c)

Vậy O là giao điểm hai đường trung trực của các đoạn thẳng MN và PQ và MN không song song với PQ nên O là tâm của $(MNPQ)$.

2.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b > c$. Gọi K là giao điểm của PQ và BC.

Ta có AR, BQ, CP đồng quy nên $(KRBC) = -1 \Rightarrow \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{RB}{RC} = \dfrac{p-b}{p-c}$.

Lại có $KB - KC = a$, suy ra $KB = \dfrac{a(p-b)}{b-c}, KC = \dfrac{a(p-c)}{b-c}, KR = \dfrac{2(p-b)(p-c)}{b-c}$

$\Rightarrow KM = KB - BM = \dfrac{2p(p-b) - ac}{b-c}, KN = KC + CN = \dfrac{2p(p-c) - ab}{b-c}$

Vậy ta có M,N,P,Q đồng viên

$\Leftrightarrow KM \cdot KN = KP \cdot KQ = KR^2$

$\Leftrightarrow (2p(p-b) - ac)(2p(p-c) - ab) = 4(p-b)^2(p-c)^2$

$\Leftrightarrow (b-c)^2(a^2 - b^2 - c^2) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (vì tam giác ABC không cân tại A)

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (đpcm)

Bài 53.

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O), với $AB = CD = EF$. Gọi I giao điểm của BE và AD. Gọi H, K lần lượt là trực tâm tam giác ADF, BCE. Biết rằng $\widehat{AIB} = 60°$. Chứng minh rằng H, O, K thẳng hàng.

(Đề thi HSG Hưng Yên)

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC có góc A bằng $60°$. Gọi I, H, O là tâm nội tiếp, trực tâm, tâm ngoại tiếp của tam giác. Khi đó $IH = IO$ và $AH = AO$.

Chứng minh:

Ta có $AH = 2R\cos A$ với tam giác ABC bất kì và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Khi đó $AH = AO \Leftrightarrow 2R\cos A = R \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60°$.

Để chứng minh $IH = IO$, ta sẽ sử dụng các kết quả sau mà không chứng minh lại:

$IO^2 = R^2 - 2Rr; IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2; \dfrac{p}{R} = \sum \sin A; 1 + \dfrac{r}{R} = \sum \cos A$ và

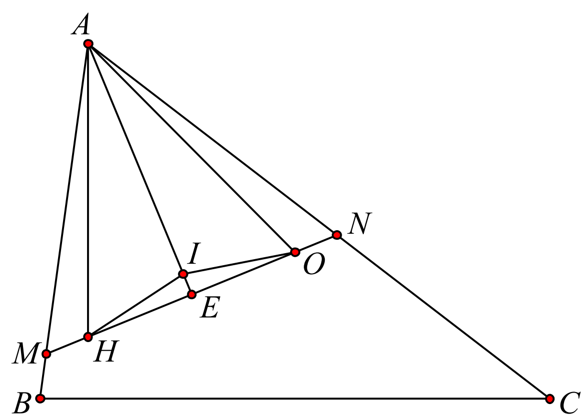
$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = -4\sin x \sin y \sin z$ với $x + y + z = 0$. Khi đó:

$$IO = IH \Leftrightarrow IO^2 = IH^2 \Leftrightarrow 3R^2 + 6Rr + 3r^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow p = \sqrt{3}(R + r) \Leftrightarrow \frac{p}{R} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum \sin A = \sqrt{3}\sum \cos A \Leftrightarrow \sum \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \prod \sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ (đpcm).}$$

Bổ đề 2: Cho tam giác ABC có góc A bằng $60°$. Đường thẳng Euler của tam giác cắt các cạnh AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng tam giác AMN đều.

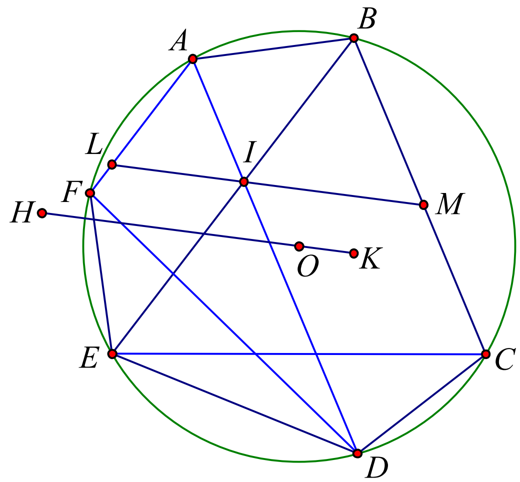
Chứng minh:



Gọi E là trung điểm OH. Từ bổ đề 1, ta suy ra A, I, E thẳng hàng vì cùng nằm trên trung trực của OH. Suy ra AE là phân giác của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{MAN}$. Từ đó suy ra $\Delta HAM = \Delta OAN \Rightarrow AM = AN$.

Tam giác AMN cân tại A và có $\widehat{MAN} = 60°$ nên là tam giác đều (đpcm)

Vậy cả hai bổ đề đã được chứng minh, trở lại với bài toán ban đầu.



Gọi L, M là giao điểm của phân giác ngoài của góc $\widehat{AIB}$ với các đường thẳng AF, BC.

Từ giả thiết $AB = CD$, ta có $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{AIB} = 60^\circ$. Theo bổ đề 2 suy ra $OK \parallel IM$. Tương tự, ta có $OH \parallel IL$. Mà L, I, M thẳng hàng nên H, O, K thẳng hàng (đpcm)