PHÒNG GD&ĐT VỤ BẢN
TRƯỜNG THCS ĐẠI AN

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán lớp 9 (vòng 1)
(Thời gian 150 phút)

Bài 1: *(4 điểm)*

a) Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ thì $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

Bài 2: *(6 điểm)* Giải phương trình

a) $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}=2(x^3+5x)$

b) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$

c) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

Bài 3: *(2 điểm)* Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình**:**

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{9}{xyz}=1$$

Bài 4: *(7 điểm)* Cho đường tròn tâm O và đường thẳng (d) cắt đường tròn tâm O tại hai điểm B,C ((d) không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh $AK.AI=AM^2=AB.AC$

b) Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn

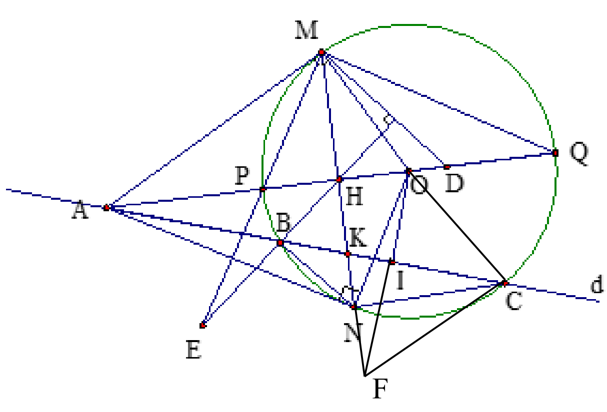
c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Bài 5: *(1 điểm)* Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\ge\frac{3}{2}$.

ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung đáp án	Điểm
1	a	Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$ Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$ Suy ra $S=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$ $=\dfrac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\dfrac{1}{xy+yz+zx}$ Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$ Suy ra $S=-\dfrac{1}{7}$	2
	b	Đặt $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=\sqrt{b}>0\\ \sqrt[3]{y}=\sqrt{c}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=b^3\\ y^2=c^3\end{cases}$ Ta có: $\sqrt{b^3+b^2c}+\sqrt{c^3+bc^2}=a$ Bình phương hai vế được: $b^3+b^2c+c^3+bc^2+2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2}=a^2$ Biến đổi ta được: $(b+c)^3=a^2$ $\Rightarrow\sqrt[3]{a^2}=b+c$ hay $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$ (đpcm)	2
2	a	a) $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}=2(x^3+5x)$ Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$ Phương trình đã cho được viết lại như sau: $2x^3-8x^2+10x-4-3x(x-2)\sqrt{2x-1}=0$ $\Leftrightarrow(x-2)(2x^2-4x+2)-3x(x-2)\sqrt{2x-1}=0$ $\Leftrightarrow(x-2)\left[(2x^2-4x+2)-3x\sqrt{2x-1}\right]=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ (2x^2-4x+2)-3x\sqrt{2x-1}=0\end{array}\right.$ Xét phương trình: $2x^2-4x+2-3x\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow 2x^2-4x+2-3\sqrt{x^2(2x-1)}=0$. Tương đương $2x^2-2(2x-1)-3\sqrt{x^2(2x-1)}=0$ Chia cho $x^2>0$	2

		Ta có: $2-2.\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)-3\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}=0$. Đặt $t=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}\ge 0$ phương trình mới là: $-2t^2-3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ Với $t=\frac{1}{2}$ ta có: $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-8x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+2\sqrt{3}\\ x=4-2\sqrt{3}\end{array}\right.$	
	b	$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$ Điều kiện: $x\ge 7$. Để đơn giản ta đặt $\sqrt[3]{x}=t\ge\sqrt[3]{7}\Rightarrow x=t^3$ Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t-(t^3-4)\sqrt{t^3-7}-3t^3+28=0\Leftrightarrow 3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}=0$ Nhẩm được $t=2$. Nên ta phân tích phương trình thành: $\Leftrightarrow 4t^3-t^2+2t-32+(t^3-4)\left(\sqrt{t^3-7}-1\right)=0$ $\Leftrightarrow (t-2)\left[\left(4t^2+7t+16\right)+(t^3-4)\left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1}\right)\right]=0$ Để ý rằng $4t^2+7t+16>0$ và $t^3\ge 7$ nên ta có $\left(4t^2+7t+16\right)+(t^3-4)\left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1}\right)>0$. Vì vậy phương trình có nghiệm duy nhất $t=2\Leftrightarrow x=8$.	2
	c	$\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$. Điều kiện $x>\frac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x-1}\\ b=\sqrt{2x+1}\\ c=\sqrt{x+1}\\ d=\sqrt{3x-1}\end{cases}$ $(a,b,c,d>0)\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$ Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\\ a^2+b^2=c^2+d^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} cd(a+b)=ab(c+d)\\ a^2+b^2=c^2+d^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c^2d^2(a+b)^2=a^2b^2(c+d)^2\\ a^2+b^2=c^2+d^2\end{cases}$ Suy ra: $c^2d^2\left(a^2+b^2+2ab\right)=a^2b^2\left(c^2+d^2+2cd\right)$ $\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(a^2b^2-c^2d^2\right)+2abcd(ab-cd)=0$ $\Leftrightarrow (ab-cd)\left[\left(a^2+b^2\right)(ab+cd)+2abcd\right]=0$	2

		$\Leftrightarrow ab = cd$ (do $a,b,c,d > 0$) Với $ab = cd$, ta có: $\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{3x-1}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 1 = (x+1)(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.	
3		Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} = \mathbf{1}$ Vai trò của x, y, z như nhau nên không làm mất tính tổng quát giả sử $1 \le x \le y \le z \Rightarrow x2 \le xy \le xz \le yz \le xyz$ $\Rightarrow 1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^2}$ $\Leftrightarrow 1 \le \frac{12}{x^2} \Rightarrow x2 \le 12 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$ Nếu x = 1 $\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{z} + \frac{9}{yz} = 1$ $\Rightarrow z + 1 + y + 9 = yz \Rightarrow yz - z - y + 1 = 11$ (y- 1) (z - 1) = 11 $\Rightarrow$ y = 2 ; z = 12 hoặc z =2 ; y = 12 Nếu x = 2 $\Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{2z} + \frac{9}{2yz} = 1$ $\Rightarrow$ (2y - 1) (2z-1) = 23 $\Rightarrow$ y = 1; z = 12 hoặc y = 12; z = 1 Nếu x = 3 $\Rightarrow$ (3y – 1) (3z - 1) = 37 vô nghiệm Vậy (x, y, z) = (1; 2, 12) và các hoán vị của nó	2
	a	 a, Chứng minh $AK.AI = AM^2 = AB.AC$	2

		* Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$. Mà ΔOMN cân tại O nên $OA \perp MN$. Ta có ΔAMO vuông tại M có đường cao MH nên suy ra $AH.AO = AM^2$. Ta có ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (vì $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^o$ và $\widehat{OAI}$ chung) nên $AK.AI = AH.AO$. Vậy $AK.AI = AM^2$. (đpcm)	
	b	b, Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn Gọi F là giao điểm của MN với OI $\Delta OHF \sim \Delta OIA (gg) \left.\begin{array}{l} \Rightarrow OI.OF = HO.OA \\ OH.OA = OM^2 = OC^2 \end{array}\right\} \Rightarrow OI.OF = OC^2$ $\Rightarrow \Delta OIC \sim \Delta OCF \Rightarrow \widehat{OCF} = \widehat{OIC} = 90^o$ Cmtt ta có $\widehat{OBF} = 90^o$ mà $\widehat{OHF} = 90^o$ Vậy bốn điểm B, C O, H thuộc đường tròn đường kính OF	2
	c	c, Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME. Ta có M thuộc đường tròn (O) nên $\widehat{PMQ} = 90^o$. Xét ΔMHE và ΔQDM có $\widehat{MEH} = \widehat{DMQ}$ (cùng phụ với $\widehat{DMP}$), $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{MPO}$). Suy ra $\Delta MHE \sim \Delta QDM$. Do đó ta được $\frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$. Tương tự ta có $\Delta PMH \sim \Delta MQH \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$. Suy ra $ME = 2MP$. Vậy P là trung điểm ME. (đpcm).	3
5		Cho $a,b,c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{2}$. **Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{a}{b^3+ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+1\right)$. Tương tự: $\frac{b}{c^3+bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+1\right); \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+1\right)$	1

Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:

$$\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3$$

Bài toán được quy về chứng minh:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)+\left(\frac{1}{c}+c\right) \geq 3+a+b+c=6$$

. Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{a}+a \geq 2, =; \frac{1}{b}+b \geq 2; \frac{1}{c}+c \geq 2$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

.