

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 1; 2)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Tọa độ $\overrightarrow{AH}$ là

- *A. $(1; -1; 2)$ B. $(1; 2; 0)$ C. $(2; 0; 4)$ D. $(-1; 1; 2)$

Lời giải

Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm của tam giác ABC .

$$\overrightarrow{AH} = (x-1; y-2; z+1), \overrightarrow{BC} = (-2; 0; 1)$$

Ta có $\overrightarrow{BH} = (x-2; y-1; z-1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 3)$

$$\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] = (-1; -5; -2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + z = -3 \\ -x - y + 3z = 0 \\ -x - 5y - 2z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

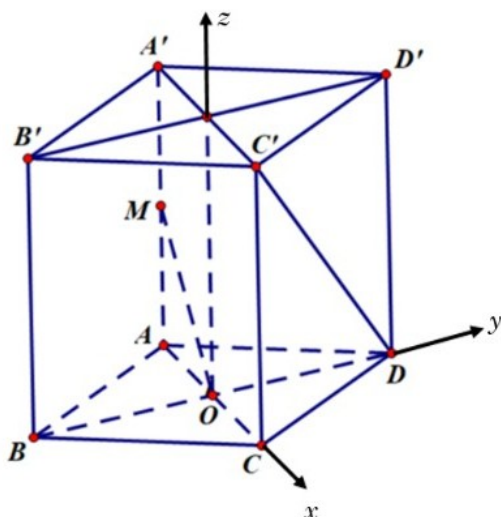
Do H là trực tâm của tam giác ABC

Vậy $\overrightarrow{AH} = (1; -1; 2)$

Câu 2. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $AA' = a$ và $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng

- *A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}a$ B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{15}a$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$

Lời giải



Do $ABCD$ là hình thoi, $\angle ABC = 60^\circ$ nên $AC \perp BD$ và ABC là tam giác đều.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

$$O(0; 0; 0), C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), D\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \text{ trục } Oz \parallel AA', M\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), C'\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

Khi đó $\vec{OM} = \left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{DC'} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

$$d(OM, DC') = \frac{\left| \left[\vec{OM}, \vec{DC'} \right] \cdot \vec{OD} \right|}{\left| \left[\vec{OM}, \vec{DC'} \right] \right|}$$

Khoảng cách hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng

Trong đó:

$$\left[\vec{OM}, \vec{DC'} \right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\left[\vec{OM}, \vec{DC'} \right] \cdot \vec{OD} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\left| \left[\vec{OM}, \vec{DC'} \right] \right| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$d(OM, DC') = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Vậy

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC và BD cắt nhau tại gốc toạ độ O . Biết $A(2;0;0), B(0;1;0), S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại N . Tính thể tích hình chóp $S.ABMN$

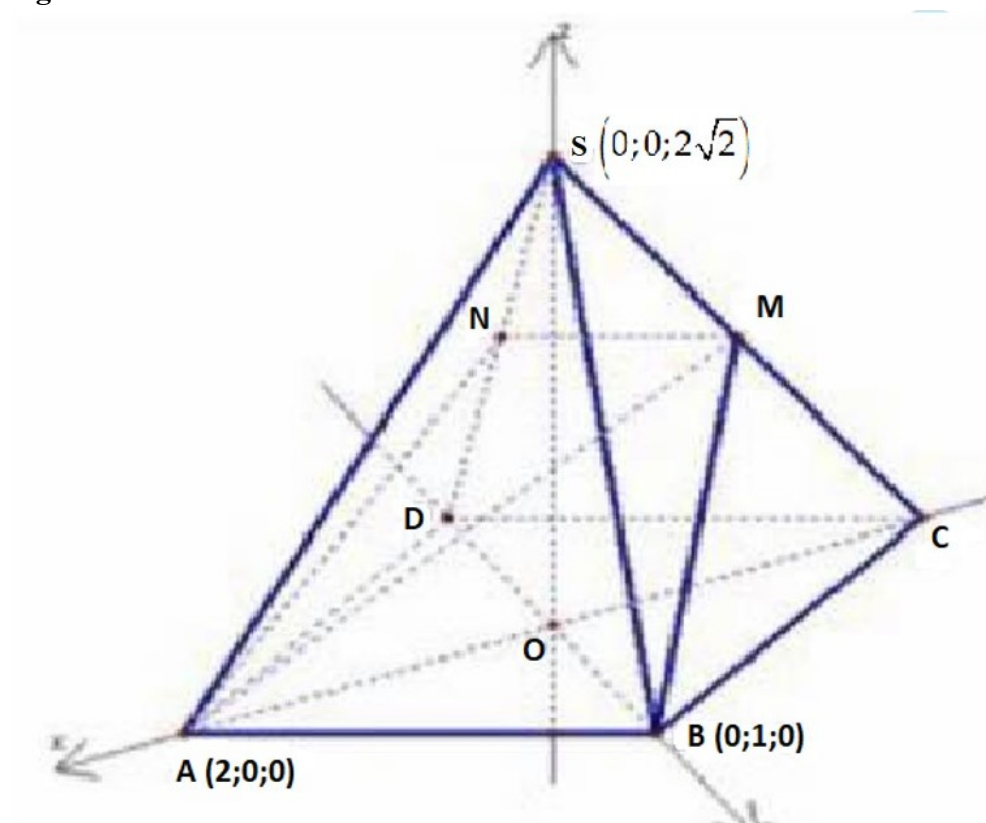
*A. $V = \sqrt{2}$.

B. $V = 2\sqrt{3}$.

C. $V = 3\sqrt{2}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta có: $AB \parallel MN \parallel CD \Rightarrow N$ là trung điểm của $SD \Rightarrow N\left(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$

$$\vec{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2}), \vec{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2}), \vec{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2}); \vec{SN} = \left(0; \frac{-1}{2}; -\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\vec{SA}, \vec{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$$

$$\Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{6} |[\vec{SA}, \vec{SM}] \cdot \vec{SB}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}; V_{S.AMN} = \frac{1}{6} |[\vec{SA}, \vec{SM}] \cdot \vec{SN}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z = 0, (Q): x - 2y + 3z + 4 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{7}$

B. $x^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{7}$

*C. $x^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{2}{7}$

D. $x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{2}{7}$

Lời giải

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 2t \end{cases}$$

Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I \in \Delta$ nên $I(1+t; -1+t; 2t)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên

$$d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|1+t - 2(-1+t) + 3 \cdot 2t|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|1+t - 2(-1+t) + 3 \cdot 2t + 4|}{\sqrt{1+4+9}}$$

$$\Leftrightarrow |5t+3| = |5t+7| \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(0; -2; -2)$$

Khi đó mặt cầu có bán kính là $R = d(I, (P)) = \frac{|-2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{2}{7}$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}; d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = 3\sqrt{3}$ là

*A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải

• Ta có vector pháp tuyến của mp (P) là $n = (1; 1; -2)$; $A \in d_1 \Rightarrow A(-1+t; -2+2t; t)$; $B \in d_2 \Rightarrow B(2+2s; 1+s; 1+s)$

Do đó $\overline{AB} = (3 + 2s - t; 3 + s - 2t; 1 + s - t)$

$$\bullet \text{ Vi } AB // (P) \Rightarrow \overline{AB} \cdot n = 0 \Leftrightarrow (3+2s-t) + (3+s-2t) - 2(1+s-t) = 0 \Leftrightarrow s = t - 4$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (t - 5; -t - 1; -3)$

• Mặt khác $AB = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow (t-5)^2 + (-t-1)^2 + 9 = 27 \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow s = -2$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1)$

• Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;2)$ và nhận $u=(1;1;1)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$, $B(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc d và (S) đi qua hai điểm A, B . Giả sử $I(a; b; c)$. Tính $a^2 + b^2 - c$.

***B. 3.**

D. 9.

Lời giải

- Mặt cầu (S) có tâm $I \in d$, suy ra tọa độ $I(-1+t; t; 1-t)$

• Tac có: $IA = (2-t; 1-t; -3+t) \Rightarrow IA = \sqrt{(2-t)^2 + (1-t)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{3t^2 - 12t + 14}$.

$$IB = (4-t; -1-t; t-1) \Rightarrow IB = \sqrt{(4-t)^2 + (-1-t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{3t^2 - 8t + 18}$$

- Do mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên

$$IA = IB \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 14 = 3t^2 - 8t + 18 \Leftrightarrow 4t = -4 \Leftrightarrow t = -1$$

Khi đó tọa độ I là $I(-2; -1; 2)$. Suy ra $a = -2$, $b = -1$, $c = 2$.

Vậy ta có $a^2 + b^2 - c = (-2)^2 + (-1)^2 - 2 = 3$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$

là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^3 + b^3 + c^3$

*B. $T = 62$

D. $T = 13$

Lời giải

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Ta có phương trình đường thẳng

Mà $H \in d \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t)$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(2;3;3)$

$$\Rightarrow a=2; b=3; c=3 \Rightarrow T=8+27+27=62$$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

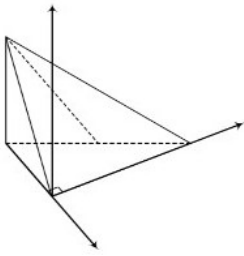
A. $\frac{2a}{\sqrt{13}}$

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{13}$

*C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$

D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Đặt $AB = x$.

Ta có: $B(0;0;0), C(0;2a;0), S(-x;0;2a\sqrt{3}), A(-x;0;0)$

Do M là trung điểm của $AC \Rightarrow M\left(-\frac{x}{2}; a; 0\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (x; 0; 0), \overrightarrow{SM} = \left(\frac{x}{2}; a; -2a\sqrt{3}\right); \overrightarrow{AM} = \left(\frac{x}{2}; a; 0\right)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}] = (0; 2ax\sqrt{3}; a^2)$

$$d(SM, AB) = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{AM} \right|}{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SM}] \right| \cdot \left| \overrightarrow{AM} \right|} = \frac{2a^2x\sqrt{3}}{\sqrt{0+12a^2x^2+a^2x^2} \cdot \frac{ax\sqrt{13}}{2}} = \frac{2a^2x\sqrt{3}}{ax\sqrt{13}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

Vậy

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) vuông góc với $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ và (α) cắt trục Ox , trục Oy và tia Oz lần lượt tại M, N, P . Biết rằng thể tích khối tứ diện $OMNP$ bằng 6. Mặt phẳng (α) đi qua điểm nào sau đây?

A. $C(1; -1; 2)$

*B. $B(1; -1; 1)$

C. $A(1; -1; -3)$

D. $D(1; -1; -2)$

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u_{\Delta} = (1; -2; 3)$

Do $(\alpha) \perp \Delta$ nên $n_{\alpha} = u_{\Delta} = (1; -2; 3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x - 2y + 3z - 6D = 0$

Theo bài ra, ta có: $M(6D; 0; 0), N(0; -3D; 0), P(0; 0; 2D)$ với $D > 0$.

Thể tích của khối tứ diện $OMNP$ là $V = \frac{1}{6} \cdot OM \cdot ON \cdot OP = \frac{1}{6} \cdot |6D| \cdot |-3D| \cdot |2D| = 6D^3$

Do $V = 6$ nên $6D^3 = 6 \Leftrightarrow D = 1$.

Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng (α) : $x - 2y + 3z - 6 = 0$.

Dễ thấy $B(1; -1; 1)$ thuộc mặt phẳng (α) .

Câu 10. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và $(Q): 2x - y + z - 6 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm $A(-1; 0; 3)$ và chứa giao tuyến của (P) và (Q) .

A. $2x + y + z - 1 = 0$
 $x + 2y + 2z - 5 = 0$ B. $x - 2y - 2z + 7 = 0$ *C. $x - 2y + 2z - 5 = 0$ D.

Lời giải

Giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng d có vector chỉ phương
 $u = \begin{bmatrix} \overline{u_P} \\ \overline{u_Q} \end{bmatrix} = (0; -3; -3)$

Trên đường thẳng d lấy điểm $B\left(\frac{7}{3}; 1; \frac{7}{3}\right)$,

khi đó $\overline{AB} = \left(\frac{10}{3}; 1; \frac{-2}{3}\right)$, $a = 3 \cdot \overline{AB} = (10; 3; -2)$.

Mặt phẳng (R) có một vector pháp tuyến là $n = [u, a] = (15; -30; 30)$

Khi đó $\overline{n'} = (1; -2; 2)$ cũng là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (R) .

Phương trình (R) : $x - 2y + 2z - 5 = 0$

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ và điểm } A(1; 3; -1). \text{ Viết}$$

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-1}$

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$

*C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Lời giải

Cách 1:

Gọi B là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ .

Vì $B \in \Delta$ nên tọa độ $B(1+t; -t; -1+t)$. Khi đó $\overline{BA} = (-t; t+3; -t)$.

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (1; -1; 1)$.

$$d \perp \Delta \Leftrightarrow \overline{BA} \perp u \Leftrightarrow \overline{BA} \cdot u = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Suy ra $\overline{BA} = (1; 2; 1)$.

Do đó đường thẳng d đi qua điểm A và nhận $\overline{BA}$ làm vector chỉ phương có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Cách 2: Suy luận nhanh

VTCP của Δ là $u_{\Delta} = (1; -1; 1)$.

d vuông góc với đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow u_{\Delta} \cdot u_d = 0$. Chỉ có đáp án C thỏa mãn.

Câu 12. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2my - 4z - 1 = 0$ (trong đó m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để mặt cầu (S) có diện tích bằng 28π .

*A. $m = \pm 1$

B. $m = \pm 2$

C. $m = \pm 7$

D. $m = \pm 3$

Lời giải

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ 2b = 2m \\ 2c = -4 \\ d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = m \\ c = -2 \\ d = -1 \end{cases}$$

Từ phương trình của mặt cầu (S) ta có:

$$\text{Bán kính mặt cầu } (S) \text{ là } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{m^2 + 6}$$

$$\text{Diện tích mặt cầu } (S) \text{ bằng } 28\pi, \text{ tức là: } S = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 28\pi = 4\pi(m^2 + 6) \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z + 4 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Cao độ của M bằng

- A. -3. B. -1. *C. -8. D. -5.

Lời giải

Gọi $A(a; 0; 0) \in Ox$ là điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (Q) .

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{n}_Q \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - a = 2k \\ y_M - 0 = -k \\ z_M - 0 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = a + 2k \\ y_M = -k \\ z_M = 2k \end{cases} \Rightarrow M(a + 2k; -k; 2k)$$

Ta có:

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AM, \text{ suy ra: } I\left(a + k; -\frac{k}{2}; k\right)$$

$$\begin{cases} M \in (P) \\ I \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 2k) - 2k + 2k + 1 = 0 \\ 2(a + k) + \frac{k}{2} + 2k + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2k + 1 = 0 \\ 4a + 9k + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ k = -4 \end{cases}$$

Ta có:

$$\text{Vậy } z_M = -8.$$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $O, A(1; 0; 0), B(0; -2; 0), C(0; 0; 4)$ là

- A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z = 0$
 B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 8z = 0$
 *C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$
 D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = 0$

Lời giải

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \ (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Do mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $O, A(1; 0; 0), B(0; -2; 0), C(0; 0; 4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1^2 - 2a = 0 \\ (-2)^2 + 4b = 0 \\ 4^2 - 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ -2a + 1 = 0 \\ 4b + 4 = 0 \\ -8c + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và điểm N trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính của mặt cầu đó.

- A. $3\sqrt{2}$. *B. $\frac{7}{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình dạng đoạn chắn: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = 12$.

Gọi $N(x; y; z)$. Ta có: $OM \cdot ON = 12 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{OM}{ON} \overrightarrow{ON} = \frac{OM \cdot ON}{ON^2} \overrightarrow{ON} = \frac{12}{ON^2} \overrightarrow{ON}$

Suy ra: $M\left(\frac{12}{ON^2}x; \frac{12}{ON^2}y; \frac{12}{ON^2}z\right)$.

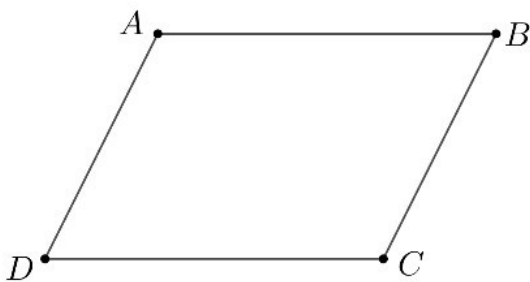
Mặt khác $M \in (ABC) \Rightarrow 6 \cdot \frac{12}{ON^2}x + 3 \cdot \frac{12}{ON^2}y + 2 \cdot \frac{12}{ON^2}z = 12$
 $\Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = ON^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 3y - 2z = 0$

Vậy điểm N thuộc mặt cầu tâm $I\left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$, bán kính $R = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{7}{2}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(-3;1;4)$. Tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

- A. $D(0;8;8)$. B. $D(6;6;0)$. C. $D\left(0; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. *D. $D(-4; -2; -6)$.

Lời giải



Gọi $D(x; y; z)$

$\overrightarrow{AB} = (1; 3; 10)$, $\overrightarrow{DC} = (-3 - x; 1 - y; 4 - z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; 10) = (-3 - x; 1 - y; 4 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = 1 \\ 1 - y = 3 \\ 4 - z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = -6 \end{cases}$$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox ; Oy ; Oz tại A ; B ; C khác O . Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$ là:

- A. 18. B. 54. *C. 9. D. 6.

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (P) đi qua M lần lượt cắt các tia $Ox; Oy; Oz$ tại $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$, với $a; b; c$ dương.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Do $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c}} \Rightarrow abc \geq 54$.

Lại có: $V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} abc \geq 9$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$ là 9.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(2;0;0), B(0;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P)

A. $4x + 3y + 5z - 8 = 0$

B. $3x - 2y + 8z - 6 = 0$

C. $2x + 3y + z - 4 = 0$

*D. $4x + 5y + 3z - 8 = 0$

Lời giải

Mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ có VTPT là $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Ta có $\overline{AB} = (-2; 1; 1)$

Vì mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có VTPT là

$\overline{[AB, \vec{n}]} = (4; 5; 3)$. Do đó phương trình của (Q) là

$$4(x - 2) + 5(y - 0) + 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y + 3z - 8 = 0$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4; -3; 2), B(6; 1; -7), C(2; 8; -1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và trọng tâm của tam giác ΔABC

A. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

*B. $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

C. $\frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$

D. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$

Lời giải

Trọng tâm của tam giác ΔABC là $G(4; 2; -2)$. Suy ra $\overline{OG} = (4; 2; -2) = 2(2; 1; -1)$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Câu 20. Trong không gian, cho đường thẳng d và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) , biết Δ cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$

*D. $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$

Lời giải

Ta có $d \cap (\alpha) = M(1; 1; 1)$.

Véc tơ chỉ phương của d là $u(1; -1; -1)$, véc tơ pháp tuyến của (α) là $n(1; 1; 1)$.

Vì đường thẳng Δ nằm trong (α) cắt và vuông góc với d nên Δ đi qua M và nhận véc tơ chỉ phương là $\underline{u}_{\Delta} = [u, n] = (0; -2; 2)$.

Vậy phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 0; 2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; -1; 1)$ và $D(0; 1; 3)$. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A.
$$\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = -1 - t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

*D.
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Lời giải

Gọi n là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) .

Ta có: $\underline{BC} = (1; -3; 0)$, $\underline{BD} = (-1; -1; 2)$.

Suy ra: $[\underline{BC}; \underline{BD}] = (-6; -2; -4)$. Chọn vtpt là: $n = (3; 1; 2)$.

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (BCD) nên véc tơ chỉ phương u của đường thẳng d và véc tơ n cùng phương. Loại hai phương án B và C.

Phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) là:

(d)
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = -1 + 3t \\ -1 = t \\ -4 = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Thay tọa độ điểm $(-2; -1; -4)$ vào d ta được: . Nên loại A.

Thay tọa độ điểm $(2; 1; 4)$ vào d ta được:
$$\begin{cases} 2 = -1 + 3t \\ 1 = t \\ 4 = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$
. Chọn D

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 4; 5)$. Gọi M là điểm sao cho $MA = 2MB$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 6 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $\frac{14}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

*C. $\frac{11}{9}$.

D. $\frac{17}{9}$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$

Khi đó $MA = 2MB$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4[x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{3}x - \frac{28}{3}y - \frac{34}{3}z + 50 = 0$$

Suy ra tập hợp các điểm M thỏa $MA = 2MB$ là mặt cầu (S) tâm $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$ và bán kính $R = 2$.

Vì $d(I, (P)) = \frac{29}{9} > R$ nên (P) không cắt (S) .

Do đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 6 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất là

$$d_{\min} = d(I, (P)) - R = \frac{29}{9} - 2 = \frac{11}{9}.$$

Câu 23. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$ với α, β, γ lần lượt là ba góc tạo bởi Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

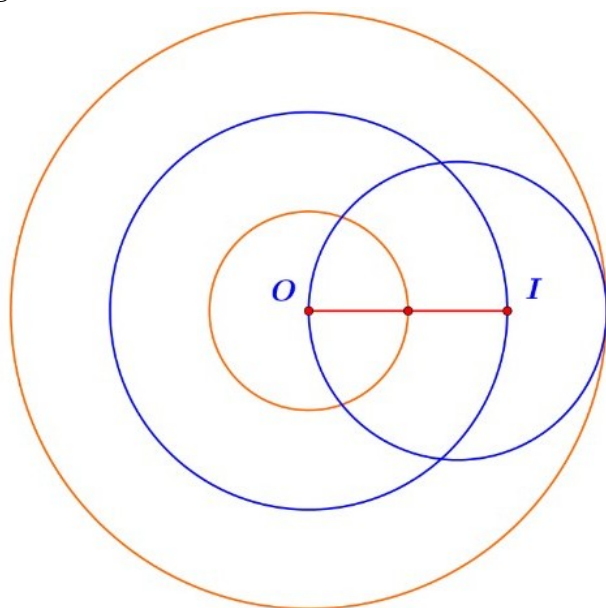
A. 36π

B. 4π

C. 20π

*D. 40π

Lời giải



• Ta có: tâm mặt cầu (S) là $I(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$, khi đó tâm $I(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ này thuộc mặt cầu (S') tâm O là gốc tọa độ, và $R = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$

Từ hình vẽ trên, ta suy ra mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ (kí hiệu màu vàng) với

- (S_1) tâm O bán kính $R_1 = |OI - R| = 2 - 1 = 1$

- (S_2) tâm O bán kính $R_2 = |OI + R| = 2 + 1 = 3$

$$\Rightarrow S = 4\pi(R_1^2 + R_2^2) = 40\pi$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 10 = 0$ song song và cách đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$ có phương trình là

A. $5x - 4y + 3z - 9 = 0$ hoặc $5x - 4y + 3z + 9 = 0$ B. $5x + 4y + 3z + 11 = 0$ hoặc $5x + 4y + 3z - 11 = 0$

*C. $5x - 4y + 3z + 9 = 0$ hoặc $5x - 4y + 3z - 11 = 0$ D. $5x + 4y + 3z + 11 = 0$ hoặc $5x + 4y + 3z - 9 = 0$

Lời giải

• Ta có $(P): 2x - y - 2z + 10 = 0$ có VTPT $n = (2; -1; -2)$

• Đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ có VTCP $u = (1; 1; -3)$ và đi qua $A(1; 0; -2)$

• Mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 10 = 0$ song song và cách đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ nên VTPT của (α) là $n_\alpha = [n; u] = (-5; 4; -3)$

• Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $(\alpha): -5x + 4y - 3z + D = 0$

$d((P); \Delta) = \sqrt{2} \Rightarrow d(A; (P)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-5 + 6 + D|}{\sqrt{25 + 16 + 9}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |D + 1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 9 \\ D = -11 \end{cases}$

• Lại có

• Vậy mặt phẳng (α) là $5x - 4y + 3z + 9 = 0$ hoặc $5x - 4y + 3z - 11 = 0$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0), B(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy để tam giác ABC vuông tại A .

A. $\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ B. $(0; 2; 0)$ C. $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ *D. $\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$

Lời giải

• Gọi $C(0; t; 0) \in Oy$

Ta có $AB^2 = 14, AC^2 = 1 + (t-1)^2, BC^2 = 13 + (t+1)^2$

• Khi đó tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow 13 + (t+1)^2 = 14 + 1 + (t-1)^2$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 14 = t^2 - 2t + 16 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Vậy $C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$

Câu 26. Trong không gian , cho đường thẳng và mặt phẳng . Đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng trên mặt phẳng . Đường thẳng đi qua điểm nào sau đây?

A. B. *C. D.

Lời giải

• Ta có: ;

• Gọi là mặt phẳng chứa đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng :

Mặt phẳng có một vtppt là:

• Đường thẳng là giao tuyến của mặt phẳng và mặt phẳng :

Đường thẳng có một vtcp là:

Gọi là giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng . Tọa độ của là nghiệm của hệ:

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \Rightarrow$$

Phương trình tham số của đường thẳng là:

Với $\Rightarrow$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB với $O(0;0;0)$, $A(-1;8;1)$, $B(7;-8;5)$. Phương trình đường cao OH của tam giác OAB là:

A.
$$\begin{cases} x=6t \\ y=4t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=5t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x=5t \\ y=4t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=6t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x=5t \\ y=-4t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=6t \end{cases}$$

*D.

$$\begin{cases} x=8t \\ y=-16t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=4t \end{cases}$$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (8; -16; 4) \Rightarrow \overrightarrow{u} = (2; -4; 1)$ là một vector chỉ phương của AB

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của AB là:
$$\begin{cases} x=-1+2t_1 \\ y=8-4t_1 \\ z=1+t_1 \end{cases}$$

Vì $H \in AB$ nên $H(-1+2t_1; 8-4t_1; 1+t_1) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = (-1+2t_1; 8-4t_1; 1+t_1)$

Do $OH \perp AB$ nên $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1+2t_1) - 4 \cdot (8-4t_1) + 1 \cdot (1+t_1) = 0$

$\Leftrightarrow t_1 = \frac{11}{7} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \left(\frac{15}{7}; \frac{12}{7}; \frac{18}{7} \right) \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = (5; 4; 6)$ là một vector chỉ phương của OH

Vậy phương trình tham số của OH là:
$$\begin{cases} x=5t \\ y=4t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=6t \end{cases}$$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(-2;1;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng

$(P): x-2y+z+4=0$ sao cho $MA=MB=\frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó, giá trị $a+b+c$ bằng

*A. $a+b+c=\frac{1}{2}$.

B. $a+b+c=1$.

C. $a+b+c=\frac{3}{2}$.

D. $a+b+c=2$.

Lời giải

Ta có: $A, B \in (P)$ và $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ nên M là trung điểm của AB suy ra $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $a+b+c=\frac{1}{2}$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc với (α) và (β) là

A. $2x - y + 2z = 0$.

*B. $2x + y - 2z = 0$.

C. $2x + y - 2z + 1 = 0$.

D. $x - y - 2z = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$

Mặt phẳng $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$

Do mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với (α) và (β) nên (P) nhận véc tơ $\vec{n}_1$ và véc tơ $\vec{n}_2$ làm cặp véc tơ chỉ phương $\Rightarrow$ mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = (-6+8; 10-9; -12+10) = (2; 1; -2)$$

Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ và có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; -2)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $2x + y - 2z = 0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=3+2t \\ z=-2-t \end{cases}$, $d_2: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_3: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d song song với d_3 cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

*B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$.

Lời giải

Giả sử đường thẳng d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B .

Gọi $A(3+t; 3+2t; -2-t)$, $B(5+3t'; -1-2t'; 2-t')$.

Ta có $\vec{AB} = (3t' - t + 2; -2t' - 2t - 4; -t' + t + 4)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d_3 là $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

Do d song song với d_3 nên $\vec{AB}, \vec{u}$ cùng phương.

$$\frac{3t' - t + 2}{1} = \frac{-2t' - 2t - 4}{2} = \frac{-t' + t + 4}{3}$$

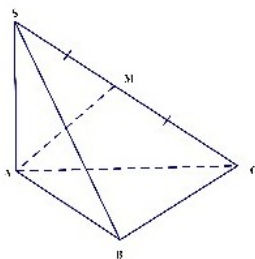
Khi đó

$$\begin{cases} \frac{3t' - t + 2}{1} = \frac{-2t' - 2t - 4}{2} \\ \frac{3t' - t + 2}{1} = \frac{-t' + t + 4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t' = -8 \\ 10t' - 4t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Ta có $A(1; -1; 0)$

Phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông với $AB = AC = 2$. Cạnh bên $SA \perp$ đáy và $SA = 3$. Gọi M là trung điểm của SC .



Tính khoảng cách giữa AM và BC .

A. $d(AM, BC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $d(AM, BC) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

*C. $d(AM, BC) = \frac{3\sqrt{22}}{11}$.

D. $d(AM, BC) = \frac{\sqrt{22}}{6}$.

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ ta có $A(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ, $S(0; 0; 3), B(2; 0; 0), C(0; 2; 0)$.

Điểm $M\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(0; 1; \frac{3}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (-2; 2; 0)$.

Gọi $n = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}] = (-3; -3; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua $B(2; 0; 0)$ nhận $n = (-3; -3; 2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

$(P): -3x - 3y + 2z + 6 = 0$.

$$d(AM, BC) = d(A, (P)) = \frac{|-3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

Ta có

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(-1; 1; 2)$ và song song với hai đường

thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}, \Delta': \frac{x}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{1}$ có phương trình là

*A. $x + y - 4z + 8 = 0$

B. $x - y + 4z - 6 = 0$

C. $x + y + 4z - 8 = 0$

D. $x - y - 4z + 10 = 0$

Lời giải

- Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $u_1 = (2; 2; 1)$
- Đường thẳng Δ' có vector chỉ phương $u_2 = (1; 3; 1)$
- Mặt phẳng cần tìm có vector pháp tuyến là $n = [u_1, u_2] = (-1; -1; 4)$
- Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$-1(x+1)-(y-1)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow -x-y+4z-8=0 \Leftrightarrow x+y-4z+8=0$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết B thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

- *A. $x - y - z = 0$. B. $x - y + z = 0$ C. $x - y + 2z = 0$ D. $x - y - 2z = 0$

Lời giải

Gọi $B(x; y; z)$ và H là trung điểm của OA . Khi đó $H(1; 1; 0)$.

$$\overline{BH} \perp \overline{OA} \Rightarrow x + y - 2 = 0 \quad (1)$$

Do tam giác OAB đều nên $OA = OB \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$, kết hợp B thuộc mặt cầu nên có pt:
 $x + y + z = 4 \quad (2)$

Từ $(1), (2) \Rightarrow z = 2$. Từ đó có $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (do B có hoành độ dương).

$$\overline{OA}(2; 2; 0), \overline{OB}(2; 0; 2) \Rightarrow [\overline{OA}, \overline{OB}] = (4; -4; -4) = 4(1; -1; -1)$$

Vậy ptmp $(OAB): x - y - z = 0$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 6 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc và cắt d .

Phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

*C. $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

Lời giải

Tọa độ giao điểm M của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \\ x - y + 2z + 6 = 0 \Rightarrow (-3 + 2t) - (-1 + t) + 2(-t) + 6 = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow M(5; 3; -4) \end{cases}$$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 2)$, đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$.

Gọi $\vec{u}_\Delta$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ cần tìm thì $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}, \vec{u}_d]$

Ta có $[\vec{n}, \vec{u}_d] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 5; 3) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (1; -5; -3)$

Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(5; -1; 2), C(3; 2; -4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = 0$ là

*A. $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. B. $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. C. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$, ta có :

$$\begin{aligned} \overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = 0 &\Leftrightarrow 2\overline{MB} + \overline{CA} = 0 \Leftrightarrow 2\overline{MB} = \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AC} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x = \frac{1}{2}(3 - 1) \\ -1 - y = \frac{1}{2}(2 - 1) \\ 2 - z = \frac{1}{2}(-4 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right) \end{aligned}$$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(2; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với (P) , cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B và C khác O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

A. 16. *B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. 8.

Lời giải

Gọi $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$

Phương trình mặt phẳng (α) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bc.x + 2c.y + 2b.z - 2bc = 0$

Ta có biểu thức liên hệ của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α)

$$\frac{1}{d^2[O; (\alpha)]} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{9}{16}$$

Hai mặt phẳng (α) và (P) vuông góc với nhau nên $2.2c - 1.2b = 0 \Leftrightarrow b = 2c > 0$.

Mà $a = 2$ nên ta có hệ
$$\begin{cases} b = 2c > 0 \\ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c > 0 \\ \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{5}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $V = \frac{1}{6}abc = \frac{8}{3}$.

Câu 37. Trong không gian cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overline{MC}(\overline{MO} - 2\overline{MA} + \overline{MB}) = 0$ là

ng *A. một mặt phẳng. B. một điểm. C. tập hợp rỗng. D. một đường thẳng.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của OB

Ta có
$$\begin{aligned} \overline{MC}(\overline{MO} - 2\overline{MA} + \overline{MB}) &= 0 \Leftrightarrow \overline{MC}(\overline{MO} - \overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MA}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MC}(\overline{AO} + \overline{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\overline{MC} \cdot \overline{AI} = 0 \Leftrightarrow \overline{MC} \perp \overline{AI} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp những điểm M là mặt phẳng qua C và vuông góc với AI .

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2m - 3 = 0$ không có điểm chung với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.

*A. $\begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$

C. $\frac{3}{2} < m < \frac{15}{2}$

D. $-1 < m < 3$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và bk $R = 2$

(P) không có điểm chung với $(S) \Leftrightarrow d(I; (P)) > R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2(-1) - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} > 2$$

$$\Leftrightarrow |2m - 9| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 9 < -6 \\ 2m - 9 > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$$

Câu 39. Cho điểm $A(2; 3; 1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-2}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A cắt d_1, d_2 là

*A. $\frac{x-2}{55} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-1}{7}$

B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 3 \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 35t \\ y = 3 - 10t \\ z = 1 + 11t \end{cases}$

D. $\frac{x-2}{35} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-1}{11}$

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua $M(-2; 2; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1; -2)$

Đường thẳng d_2 đi qua $N(1; 0; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-3; 1; -1)$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(2; 3; 1)$ và đường thẳng d_1 .

(Q) là mặt phẳng đi qua $A(2; 3; 1)$ và đường thẳng d_2 .

$$\Rightarrow d = (P) \cap (Q)$$

Vector pháp tuyến của $(P): \vec{n} = [\vec{AM}, \vec{u}_1] = (1; -9; 5)$

Vector pháp tuyến của $(Q): \vec{n}' = [\vec{AN}, \vec{u}_2] = (2; -4; -10)$

Do vậy đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}; \vec{n}'] = (110; 20; 14)$

Chọn một vector chỉ phương của d là $\vec{u}_3 = (55; 10; 7)$

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x-2}{55} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-1}{7}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;0), B(3;1;-2), C(6;0;-5)$ và $D(-1;3;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa B, C và cách đều hai điểm A, D ?

- A. vô số. B. 1. *C. 2. D. 0.

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu AD, BC chéo nhau thì có đúng 2 mặt phẳng đi qua B, C và cách đều với AD . Bao gồm một mặt phẳng đi qua BC và song song với AD và một mặt phẳng chứa BC và đi qua trung điểm AD .

Trường hợp 2: Nếu AD, BC đồng phẳng với nhau thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa B, C và cách đều hai điểm A, D .

Ở bài này ta thấy mặt phẳng (ABC) có phương trình là $-x - z + 2 = 0$

Thế tọa độ điểm D vào mặt phẳng (ABC) ta thấy thỏa nên suy ra 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng

Như vậy suy ra sẽ có vô số mặt phẳng chứa B, C và cách đều hai điểm A, D

$$d: \begin{cases} x = -2 \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{1} \quad (P): x + y - z + 2 = 0.$$

Câu 41. Cho hai đường thẳng d và Δ lên mặt phẳng (P) . Gọi d' và

Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P) . Gọi $M(a; b; c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ' . Biểu thức $a + b + c$ bằng

- A. 4. B. 2. *C. 5. D. 3.

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow (\alpha): 3x - 2y + z + 4 = 0$.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với $(P) \Rightarrow (\beta): y + z - 5 = 0$.

$$d_1 = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow d_1: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Gọi

Khi đó $M = d' \cap \Delta' \Rightarrow M = d_1 \cap (P) \Rightarrow M(-1; 2; 3)$

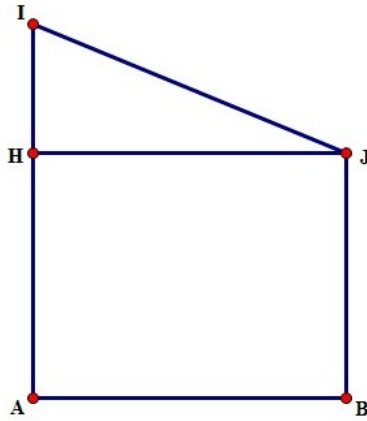
Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;3), B(1;4;3), C(5;1;3)$. Ba mặt cầu tiếp xúc nhau từng đôi một và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại ba đỉnh A, B, C . Tổng bán kính của ba mặt cầu trên bằng

- A. 6. *B. $\frac{769}{120}$. C. $\frac{769}{60}$. D. $\frac{37}{5}$.

Lời giải

Gọi I, J và K lần lượt là tâm của ba mặt cầu tiếp xúc nhau đôi một và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại các điểm A, B, C tương ứng với các bán kính R_1, R_2 và R_3 .

Ta có: $AB = 3, AC = 4$ và $BC = 5$.



Dựng $JH \perp IA$ tại H .

Xét $\triangle IHJ$ vuông tại H , ta có: $IJ^2 = IH^2 + HJ^2 \Leftrightarrow (R_1 + R_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + AB^2 \Leftrightarrow R_1 R_2 = \frac{9}{4}$.

Tương tự ta được: $R_2 R_3 = \frac{25}{4}$ và $R_3 R_1 = 4$.

Từ đó, ta có:
$$\begin{cases} R_1 = \frac{6}{5} \\ R_2 = \frac{15}{8} \\ R_3 = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = \frac{769}{120}$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Khi đó z_0 gần nhất với số nào trong các số sau:
A. 3. **B.** -1. **C.** 2. ***D.** 5.

Lời giải

+ Mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$ và có VTPT $\overrightarrow{OM}$ nên có phương trình dạng: $x_0 x + y_0 y + z_0 z - x_0 - y_0 - 2z_0 = 0$

+ Gọi H là giao điểm của OM với (ABC) . Xét tam giác MAO vuông tại A và có đường cao AH . Ta có:

$$OH \cdot OM = OA^2 \Leftrightarrow \frac{|x_0 + y_0 + 2z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 9 \Leftrightarrow |x_0 + y_0 + 2z_0| = 9$$

$$\Rightarrow |3t - 6| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow M(0; -1; 5) \\ t = 5 \Rightarrow M(6; 11; -13) \end{cases}$$

Vậy z_0 gần nhất với 5.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) , đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

*A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -4 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Lời giải

Tọa độ giao điểm A của Δ và (P) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+1}{1} \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1; -2)$$

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (2; -3; 1)$

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $n = (2; -1; -1)$

Ta có: $\vec{[u, n]} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (4; 4; 4)$

$\Rightarrow$ Chọn $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng cần tìm

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$. Phương trình đường thẳng đi qua M , cắt cả d_1 và d_2 là:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{8}$

B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}$

*C. $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$

D.

$\frac{x}{-9} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{16}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

$\Delta \cap d_1 = A(t_1 + 1; -t_1 - 2; 2t_1 + 3)$, $\Delta \cap d_2 = B(2t_2 - 1; -t_2 + 4; 4t_2 + 2)$

$\vec{MA} = (t_1 + 1; -t_1 - 1; 2t_1 + 1)$, $\vec{MB} = (2t_2 - 1; -t_2 + 5; 4t_2)$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} = k\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 1 = k(2t_2 - 1) \\ -t_1 - 1 = k(-t_2 + 5) \\ 2t_1 + 1 = 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ kt_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

Ta có M, A, B thẳng hàng

Suy ra $\vec{MB} = (-9; 9; -16)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0; -1; 2)$, một VTCP $u = (9; -9; 16)$ có phương trình là:

$\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$

*C. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là $(\alpha): 3x + y - 7 = 0$.

Đường thẳng cần tìm d cách đều hai điểm A, B nên d thuộc mặt phẳng (α) .

Lại có $d \subset (P)$, suy ra $d = (P) \cap (\alpha)$ hay $d: \begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases}$. Chọn $x = t$, ta được $\begin{cases} z = 2t \\ y = 7 - 3t \end{cases}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$. Biết rằng đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , cắt các đường thẳng d, d' lần lượt tại M, N sao cho $MN = \sqrt{11}$ (điểm M có tọa độ nguyên). Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-4}$.

*C. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$.

Lời giải

Gọi $M(-1+a; -1+2a; 1+a) \in d$ ($a \in \mathbb{C}$), $N(-1+2b; 3-b; 1-2b) \in d'$.

$MN = (2b-a; -b-2a+4; -2b-a)$. Một vector pháp tuyến của (P) là $n = (2; 1; 1)$.

Ta có $\Delta // (P) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot n = 0 \Leftrightarrow -5a + b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = 5a - 4 \Rightarrow MN = (9a-8; -7a+8; -11a+8)$

$$MN = \sqrt{11} \Leftrightarrow \sqrt{251a^2 - 432a + 192} = \sqrt{11} \Leftrightarrow 251a^2 - 432a + 181 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{181}{251} \end{cases} (I)$$

Suy ra Δ có một vector chỉ phương của $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} = (1; 1; -3)$ và Δ đi qua $M(0; 1; 2)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho $HK = \sqrt{27}$. Phương trình của đường thẳng Δ là

*A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

D. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$.

Lời giải

$H \in \Delta_1 \Leftrightarrow H(3+2t; t; 1+t)$, $K \in \Delta_2 \Leftrightarrow K(1+m; 2+2m; m)$.

Ta có $\overrightarrow{HK} = (m-2t-2; 2m-t+2; m-t-1)$. Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -2)$.

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u_d} \cdot \vec{HK} = 0 \Leftrightarrow m - t + 2 = 0 \Leftrightarrow m = t - 2 \Rightarrow \vec{HK} = (-t - 4; t - 2; -3).$$

Ta có $HK^2 = (-t - 4)^2 + (t - 2)^2 + (-3)^2 = 2(t + 1)^2 + 27 \geq 27, \forall t \in \mathbb{R}$

$HK = \sqrt{27} \Leftrightarrow t = -1, m = -3$. Khi đó $\vec{HK} = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1)$, $H(1; -1; 0)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x + y + z - 7 = 0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình đường thẳng Δ là:

*A. $\begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 12 - t \\ y = 5 \\ z = -9 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2} - t \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = \frac{5}{2} + t \\ z = \frac{-9}{2} + t \end{cases}$

Lời giải

$A \in d_1 \Rightarrow A(1 + 2a; a; -2 - a), B \in d_2 \Rightarrow B(1 + b; -2 + 3b; 2 - 2b)$

$\vec{AB}(b - 2a; 3b - a - 2; -2b + a + 4)$

(P) có vtp $\vec{n}(1; 1; 1)$

$\Delta // (P) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow b = a - 2 \Rightarrow \vec{AB}(-a - 1; 2a - 5; -a + 6)$

$\Rightarrow AB^2 = 6a^2 - 30a + 62 \geq 6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2} \geq \frac{49}{2}$

$a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; \frac{-9}{2}\right), \vec{AB} = \frac{7}{2}(-1; 0; 1) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{-9}{2} + t. \end{cases}$

$AB_{\min}$ khi

$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ và

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $(d_2): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song song với đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(1; 1; -4)$

*B. $N(0; -5; 6)$

C. $P(0; 5; -6)$

D. $Q(-2; -3; -2)$

Lời giải

Gọi $\begin{cases} A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(a; -1 + 2a; a) \\ B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(b; 1 - 2b; 1 + 3b) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} = (-a + b; -2a - 2b + 2; -a + 3b + 1).$

$$\overrightarrow{AB} // \vec{u}_d \Rightarrow \frac{-a+b}{1} = \frac{-2a-2b+2}{4} = \frac{-a+3b+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} -2a+6b=2 \\ 3a-5b=1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow A(2; 3; 2), B(1; -1; 4).$$

$\Rightarrow \Delta$ qua $B(1; -1; 4)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 4; -2)$

$$\Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+4t \\ z=4-2t \end{cases} \text{ đi qua điểm } N(0; -5; 6).$$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5} \text{ và } d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1} \text{ là}$$

*A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$

Lời giải

Gọi MN là đường vuông góc chung của d và d' . Ta có $M \in d$ suy ra $M(2+2m; 3+3m; -4-5m)$. Tương tự $N \in d'$ suy ra $N(-1+3n; 4-2n; 4-n)$. Từ đó ta có $\overrightarrow{MN} = (-3+3n-2m; 1-2n-3m; 8-n+5m)$.

Mà do MN là đường vuông góc chung của d và d' nên $\begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp d' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3+3n-2m)+3(1-2n-3m)-5(8-n+5m)=0 \\ 3(-3+3n-2m)-2(1-2n-3m)-1(8-n+5m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -38m+5n=43 \\ -5m+14n=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}$$

Suy ra $M(0; 0; 1)$, $N(2; 2; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2; 2; 2)$ nên đường vuông góc chung MN là $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0; 2; 0)$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \quad \Delta_2: \begin{cases} x=3+2s \\ y=-1-2s \\ z=s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M song song với trục Ox , sao cho (P) cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2

lần lượt tại A, B thỏa mãn $AB=1$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây?

A. $F(1; -2; 0)$

B. $E(1; 2; -1)$

C. $K(-1; 3; 0)$

*D. $G(3; 1; -4)$

Lời giải

Ta có: $A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1+2t; 2-2t; -1+t)$; $B \in \Delta_2 \Rightarrow B(3+2s; -1-2s; s)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2+2(s-t); -3-2(s-t); 1+(s-t))$

$$AB^2 = 1 \Leftrightarrow 9(s-t)^2 + 22(s-t) + 14 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = -1 \\ s-t = -\frac{13}{9} \end{cases}$$

+ Với $s-t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0; -1; 0) \Rightarrow (P)$ có một vtpt $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AB}; i] = (0; 0; 1)$, suy ra $(P): z = 0$ (loại do (P) chứa trục Ox).

+ Với $s-t = -\frac{13}{9} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{8}{9}; -\frac{1}{9}; -\frac{4}{9}\right)$, suy ra (P) có một vtpt $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AB}; i] = \left(0; -\frac{4}{9}; \frac{1}{9}\right)$,

suy ra $(P): 4y - z - 8 = 0$ (thỏa mãn bài toán).

+ Kiểm tra các đáp án ta chọn **D**

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$. Phương trình đường thẳng đi qua M , cắt cả d_1 và d_2 là:

A. $\frac{x}{-9} = \frac{y+1}{9} = \frac{z+3}{8}$ B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}$ *C. $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$ D. $\frac{x}{-9} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{16}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

$$d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-t \\ z = 3+2t \end{cases}$$

Phương trình tham số của đường thẳng

$$d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 4-t \\ z = 2+4t \end{cases}$$

Phương trình tham số của đường thẳng

$$\Delta \cap d_1 = A(t_1+1; -t_1-2; 2t_1+3), \Delta \cap d_2 = B(2t_2-1; -t_2+4; 4t_2+2)$$

$$\overrightarrow{MA} = (t_1+1; -t_1-1; 2t_1+1), \overrightarrow{MB} = (2t_2-1; -t_2+5; 4t_2)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+1 = k(2t_2-1) \\ -t_1-1 = k(-t_2+5) \\ 2t_1+1 = 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ kt_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

Ta có: M, A, B thẳng hàng

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = (-9; 9; -16)$$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0; -1; 2)$, một VTCP là $\overrightarrow{u} = (9; -9; 16)$ có phương trình là:

$$\Delta: \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$$

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

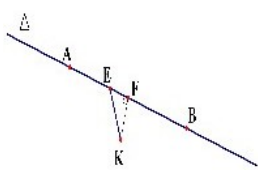
A.
$$\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$$

*C.
$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$$

Lời giải



Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R=6$.

Ta có: $\vec{EI} = (1;1;2) \Rightarrow EI = |\vec{EI}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < 6 = R$. Do đó điểm E nằm trong mặt cầu (S) .

Ta lại có: $E \in (P)$ và $\begin{cases} E \in \Delta \\ \Delta \subset (P) \end{cases}$ nên giao điểm của (Δ) và (S) nằm trên đường tròn giao tuyến (C) tâm K của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) , trong đó K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) .

Giả sử $\Delta \cap (S) = \{A; B\}$. Độ dài AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(K, \Delta)$ lớn nhất.

Gọi F là hình chiếu của K trên (Δ) khi đó $d(K; \Delta) = KF \leq KE$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $F \equiv E$.

Ta có $\begin{cases} IK \perp (P) \\ KE \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \perp \Delta \\ KE \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow IE \perp \Delta$

Ta có: $[\vec{n}_{(P)}, \vec{EI}] = (5; -5; 0)$, cùng phương với $\vec{u} = (1; -1; 0)$.

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp IE \end{cases}$ nên Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 0)$.

$$\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng

---HẾT---