I. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Đứng trước một bài toán ,đặc biệt là bài toán khó người làm toán luôn đặt ra phương hướng giải quyết. Tuy nhiên đối với người ham mê toán còn đi tìm các cách giải quyết khác nhau, nhất là tìm được cách giải hay ngắn gọn và mới lạ thì lại càng kích thích tính tò mò khám phá và lòng say mê học toán .

Hiện nay trong các đề thi THPT Quốc gia ,đề thi chọn học sinh giỏi thường xuất hiện bài toán hình học không gian tổng hợp (cổ điển) mà ở đó lời giải đòi hỏi vận dụng khá phức tạp các kiến thức hình học không gian như: chứng minh quan hệ song song, quan hệ vuông góc, dựng hình để tính góc và khoảng cách, tính thể tích khối đa diện… Việc tiếp cận các lời giải đó thực tế cho thấy thật sự là một khó khăn cho học sinh, nhất là học sinh có lực học trung bình, chẳng hạn bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Trong khi đó, nếu bỏ qua yêu cầu bắt buộc phải dựng hình mà chỉ dừng ở mức độ tính toán thì rõ ràng phương pháp tọa độ tỏ ra hiệu quả hơn vì tất cả mọi tính toán đều đã được công thức hóa. Với những lí do như trên, từ thực tế giảng dạy, với kinh nghiệm thu được, tôi đã tiến hành thực hiện đề tài sáng kiến cho năm 2016 với nội dung **"Sử dụng phương pháp tọa độ để tính khoảng cách trong bài toán hình học không gian"**

2. Mục đích nghiên cứu

Với việc nghiên cứu đề tài **"Sử dụng phương pháp tọa độ để tính khoảng cách trong bài toán hình học không gian"** sẽ giúp học sinh ,đặc biệt là đối tượng học sinh học ở mức độ khá, kể cả trung bình có thể tính được các bài toán về khoảng cách một cách dễ dàng thông qua công thức có sẵn.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của sáng kiến này là học sinh ở mức độ đại trà lớp 12-THPT Trần Phú –Thanh Hóa. Tất nhiên với từng đối tượng học sinh mà sẽ có những ví dụ minh họa hoặc các bài toán áp dụng sẽ là khác nhau

4. Phương pháp nghiên cứu

Sáng kiến kinh nghiệm này được trình bầy theo hình thức tổng hợp lý thuyết sách giáo khoa , bài toán minh họa điển hình theo thứ tự từ đơn giản đến phức tạp và một số bài tập áp dụng .Qua đó mong muốn khai thác thêm được cái hay cái đẹp của toán học và đồng thời góp phần tăng thêm kỹ năng giải toán cho học sinh.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

Các kiến thức được sử dụng trong sáng kiến này đều thuộc phạm vi kiến thức được trình bày trong Sách giáo khoa Hình học 12 chuẩn và nâng cao (chương III), các ví dụ được tổng hợp từ các bài tập trong Sách giáo khoa và Sách bài tập, các bài toán lấy từ các đề thi thử THPT Quốc gia, thi học sinh giỏi các cấp.

Các kí hiệu thường dùng trong sáng kiến:

+ VTPT: vectơ pháp tuyến, VTCP: vectơ chỉ phương
+ (XYZ): mặt phẳng qua 3 điểm X, Y, Z
+ d(X,(P)): khoảng cách từ điểm X đến mặt phẳng (P)
+ d((P),(Q)): khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q)

+ d(a,b): khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Các kiến thức cần nhớ

a.Khoảng cách giữa 2 điểm :

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ là:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

b.Khoảng cách từ điểm đến đoạn thẳng:

- Khoảng cách từ M đến đuờng thẳng (d)

Đường thẳng Δ đi qua M_0 có VTCP u thì khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là: $d(M,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{M_0M},u]\right|}{\left|u\right|}$

c. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

- Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α): Ax+By+Cz+D=0 cho bởi côngthức

$$d(M_0,\alpha)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

d.Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau:

- Đường thẳng (d) điqua $M(x_0;y_0;z_0)$;có VTCP $a=(a_1;a_2;a_3)$
- Đường thẳng (d')qua M'($x'_0;y'_0;z'_0$) có VTCP $\vec{a}'=(a'_1;a'_2;a'_3)$

Khi đó khoảng cách giiữa hai đuởng thẳng (d) và (d') là :

$$d(d,d')=\frac{\left|[\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[a,a']\right|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}$$

ĐẶC BIỆT: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD khi biết tọa độ của chúng $d(AB,CD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$

Để **"Sử dụng phương pháp tọa độ để tính khoảng cách trong bài toán hình học không gian"** ta có "***Ba bước cơ bản"*** sau đây:

+ Xây dựng hệ trục tọa độ thích hợp

+ Xác định tọa độ các điểm liên quan

+ Chuyển bài toán hình không gian tổng hợp về bài toán tương ứng trong không gian tọa độ và vận dụng các công thức thích hợp (chứng minh vuông góc, song song, tính thể tích, góc, khoảng cách…).

2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến

Trong quá trình giảng dạy nhiều năm tại trường THPT Trần Phú –Thanh hóa là một trường mới thành lập do đó có nhiều học sinh còn hạn chế về mặt tư duy đặc biệt là tư duy hình học . Khi dạy bài toán về tính khoảng cách trong hình học không gian nhiều học sinh không làm được bài này.Khi chưa áp dụng sáng kiến chỉ có một số ít em làm được nhưng phải loay hoay với sự hỗ trợ của Thầy.Qua

kiểm tra khảo sát hai lớp 12B và 12C tại trường THPT Trần Phú để đối chứng lớp 12B áp dụng sáng kiến và lớp 12C không áp dụng sáng kiến kết quả thu được như sau :

Thời gian và kết quả thực nghiệm

Thứ ngày	Môn/Lớp	Sĩ số	Số học sinh không giải được bài toán	Số học sinh giải được bài toán
Thứ tư ngày 9/3/2016	Toán – 12C	**43**	**36**	**7**
Thứ sáu ngày 11/3/2016	Toán – 12B	**44**	**12**	**32**

Qua thực tế áp dụng ở trên để so sánh ta thấy việc áp dụng sáng kiến vào giảng dạy đã mang đến hiện quả rõ rệt, không những thế việc áp dụng sáng kiến còn tạo ra sự hứng thú học tập cho học sinh đặc biệt tạo ra tư duy tìm tòi sáng tạo trong quá trình học tập của các em . Sau những năm trực tiếp giảng dạy ôn thi tốt nghiệp, đại học cao đẳng trước đây cũng như ôn thi THPT Quốc gia hiện nay và bồi dưỡng học sinh khá giỏi ,học sinh dự thi học sinh giỏi trường , giỏi tỉnh tôi đã đi tìm tòi các cách giải phù hợp trong đó **"Sử dụng phương pháp tọa độ để tính khoảng cách trong bài toán hình học không gian"** là những phương pháp như thế và tôi đã mạnh dạn cải tiến phương pháp này đồng thời áp dụng sáng kiến này trong các năm học từ 2005- 2006 đến nay ở trường THPT Trần Phú Thanh Hoá.

3.Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

3.1 . Các ví dụ minh

Để làm sáng tỏ điều này tôi xin đưa ra 10 ví dụ điển hình và 8 bài tập áp dụng cho sáng kiến như sau

Ví dụ 1 . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1 và I là tâm của ABCD. Gọi P là trung điểm của A'D'.Tính theo a khoảng cách giữa cặp đường thẳng A'B, B'D và cặp đường thẳng PI, AC'.

Giải

Tương tự ví dụ 1, ta chọn hệ trục O*xyz* sao cho:

O ≡A, tia AB ≡tia O*x*, tia AD ≡tia O*y*,

tia AA' ≡tia O*z*.

Khi đó, ta có:

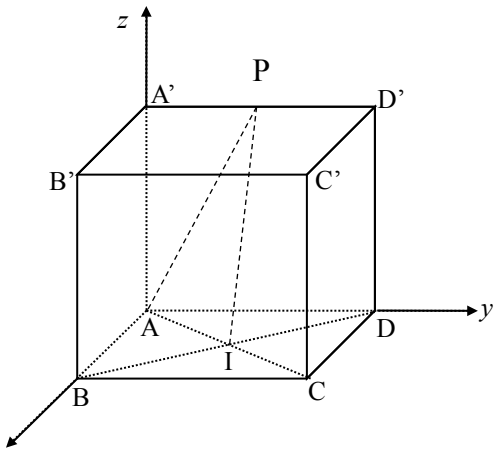
A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1),

C(1;1;0), B'(1;0;1), D'(0;1;1), C'(1;1;1).

Vì P lần lượt là trung điểm của A'D' nên ,

$P(0;\frac{1}{2};1)$ và I là tâm của ABCD $\Rightarrow I(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$

Ta có: $\overrightarrow{A'B}=(1;0;-1), \overrightarrow{B'D}=(-1;1;-1), \overrightarrow{A'B'}=(1;0;0)$



$$\Rightarrow d(A'B,B'D)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Mặt khác, $\overrightarrow{PI}=(\frac{1}{2};0;-1),\overrightarrow{AC'}=(1;1;1),\overrightarrow{AP}=(0;\frac{1}{2};1)$

$$\Rightarrow d(PI,AC')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PI},\overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{PI},\overrightarrow{AC'}\right]\right|}=\frac{\sqrt{14}}{28}.$$

Nhận xét: *Việc sử dụng phương pháp tọa độ vào việc giải bài toán ta có cách làm đơn giản dễ hiểu và có thể dùng cho mọi đối tượng học sinh.*

Ví dụ kế tiếp ta chuyển sang một đối tượng hình không gian khác, đó hình chóp đặc biệt hình tứ diện có ba cạnh xuất phát từ một đỉnh đôi một vuông góc nhau (gọi tắt là tam diện vuông) phương án tọa độ hóa còn hiệu quả hơn.

Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABC* có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác *ABC* vuông tại *A*. Các điểm *M*, *N* lần lượt di động trên tia *AS* và *CB* sao cho $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$.

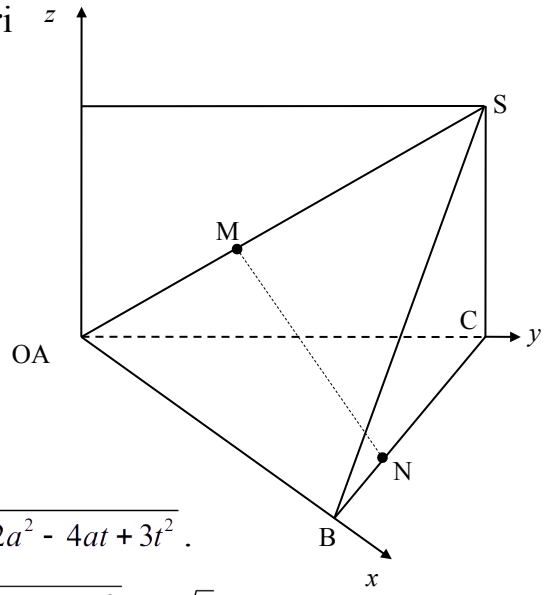
a) Tính độ dài đoạn *MN* theo *a* và *t*. Tìm *t* sao cho *MN* ngắn nhất;

b) Khi đoạn *MN* ngắn nhất, chứng minh *MN* là đường vuông góc chung của *BC* và *SA*.

Giải

Nhận xét: Tại vị trí điểm A hoặc điểm C ta nhận thấy đã có một cặp cạnh vuông góc ($AB \perp AC$, $CS \perp CA$, $CS \perp CB$) nhưng chưa đạt đủ điều kiện cần thiết là phải có ba cạnh đôi một vuông góc cùng xuất phát từ một đỉnh, do đó ta *dựng đường thẳng qua A và vuông góc với (ABC)* (đường thẳng này song song với SC).

Khi đó, chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, với $A \equiv O(0;0;0)$, $B(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$, $S(0;a\sqrt{2};a\sqrt{2})$.



a). Tính độ dài đoạn MN theo a và t.
Tìm t sao cho MN ngắn nhất.

Theo giả thiết *M* thuộc tia *AS* và $AM = t$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{t}{2a}\overrightarrow{AS}\Rightarrow M(0;\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2})$$

Tương tự, *N* thuộc tia *CB* và $CN = t$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN}=\frac{t}{2a}\overrightarrow{CB}\Rightarrow N(\frac{t\sqrt{2}}{2};a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};0).$$

Vậy ta có $MN=\sqrt{\frac{t^2}{2}+(a\sqrt{2}-t\sqrt{2})^2+\frac{t^2}{2}}=\sqrt{2a^2-4at+3t^2}$.

Hơn nữa, $MN=\sqrt{2a^2-4at+3t^2}=\sqrt{(\sqrt{3}t-\frac{2a}{\sqrt{3}})^2+\frac{2a^2}{3}}\geq\frac{a\sqrt{6}}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{2a}{3}$ (thỏa $0 < t < 2a$). Vậy $MN_{\min}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow t=\frac{2a}{3}$.

b) Khi đoạn MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

Khi *MN* ngắn nhất, ta có $t = \frac{2a}{3}$ nên $M(0;\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3}), N(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{2a\sqrt{2}}{3};0)$

$\Rightarrow \vec{MN} = (\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};-\frac{a\sqrt{2}}{3})$

Mặt khác $\vec{AS} = (0;a\sqrt{2};a\sqrt{2}), \vec{CB} = (a\sqrt{2};-a\sqrt{2};0)$

$\Rightarrow \vec{MN}.\vec{AS} = \vec{MN}.\vec{CB} = 0 \Rightarrow MN \perp AS, MN \perp CB$

hay *MN* là đường vuông góc chung của *SA* và *BC*.

Nhận xét: *Qua ví dụ đã trình bày, ta nhận thấy một yếu tố thuận lợi cho việc tọa độ hóa là điều kiện đôi một vuông góc của ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của đa diện, thông thường điều kiện này được ẩn chứa ngay trong các giả thiết cho trước. Tuy vậy, không phải lúc nào điều kiện trên cũng được thỏa mãn nên trong một số trường hợp ta cần phải có cách xây dựng hệ trục tọa độ một cách khéo léo hơn. Ta xét ví dụ sau đây.*

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, BA = BC = *a*, AD = 2*a*. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB.

Tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Giải

Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* như hình vẽ, với *A* ≡O(0;0;0), *B*(*a*;0;0), *D*(0;2*a*;0), *C*(*a*;*a*;0), *S*(0;0;$a\sqrt{2}$). Khi đó $\vec{SC} = (a;a;-a\sqrt{2}), \vec{CD} = (-a;a;0)$

Do đó: (*SCD*) có VTPT là $\left[\vec{SC},\vec{CD}\right] = (a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2)$

$\Rightarrow (SCD): 1.(x-a)+1.(y-a)+\sqrt{2}.(z-0) = 0$

hay (*SCD*): $x + y + \sqrt{2}z - 2a = 0$.

Đường thẳng SB có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases}$$

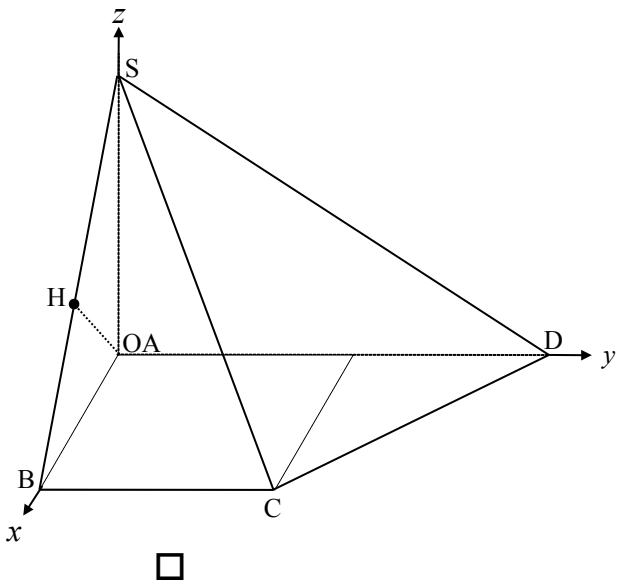
$H \in SB \Rightarrow H(a+t;0;-\sqrt{2}t)$.

$AH \perp SB \Leftrightarrow \vec{AH}.\vec{SB} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{a}{3}$.

Vậy $H(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3})$.

Từ đó suy ra khoảng cách từ *H* đến (*SCD*) là

$$d(H,(SCD)) = \frac{\left|\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}-2a\right|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{a}{3}.$$

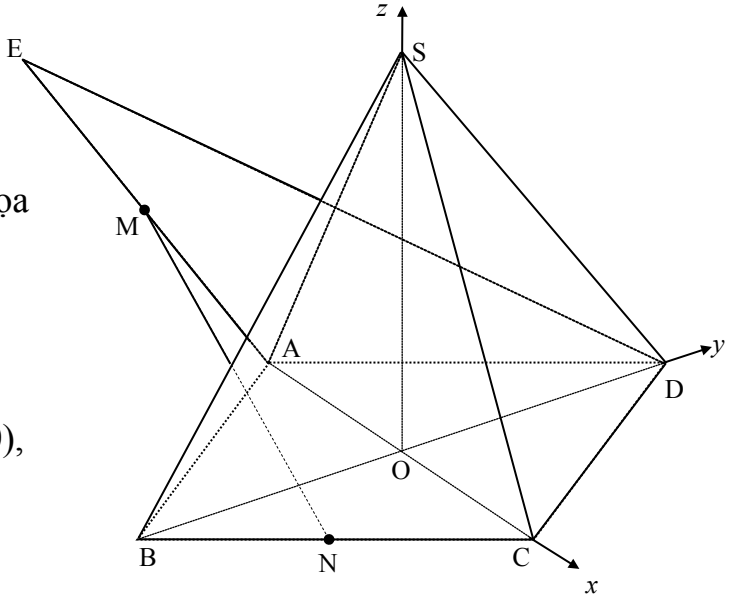


□

Nhận xét: *Nếu so với cách tổng hợp trong việc tính d(H,(SCD)) thì lời giải này rõ ràng và trực tiếp hơn, dễ hiểu hơn kể cả với học sinh học ở mức độ trung bình.*

Ví dụ 4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh *a*. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo *a*) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải



Gọi O là tâm của đáy ABCD.

Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên SO $\perp$ (ABCD).

Ta chọn hệ trục O*xyz* với O là gốc tọa độ,

tia OC $\equiv$ tia O*x*, tia OD $\equiv$ tia O*y*,

tia OS $\equiv$ tia O*z*.

Khi đó ta có

O(0;0;0), A($-\frac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0), C($\frac{a\sqrt{2}}{2}$;0;0),

B(0;$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$;0), D(0;$\frac{a\sqrt{2}}{2}$;0),

S $\in$ tia O*z* $\Rightarrow$ $S(0;0;x)$ $(x>0)$.

E đối xứng với D qua trung điểm của SA

$\Rightarrow$ ADSE là hình bình hành $\Rightarrow$ $E(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};x)$

M là trung điểm của AE $\Rightarrow$ $M(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{x}{2})$

N là trung điểm của BC $\Rightarrow$ $N(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0) \Rightarrow \vec{MN}=(\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\frac{x}{2})$

Mặt khác $\vec{BD}=(0;a\sqrt{2};0) \Rightarrow \vec{MN}.\vec{BD}=0 \Rightarrow MN \perp BD$.

Lại có $\vec{AC}=(a\sqrt{2};0;0) \Rightarrow \left[\vec{MN},\vec{AC}\right]=(0;\frac{ax\sqrt{2}}{2};0)$.

Mà $\vec{AN}=(\frac{3a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0)$ $\Rightarrow d(MN,AC)=\frac{\left|\left[\vec{MN},\vec{AC}\right].\vec{AN}\right|}{\left|\left[\vec{MN},\vec{AC}\right]\right|}=\frac{\frac{a^2x}{4}}{\frac{ax\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. □

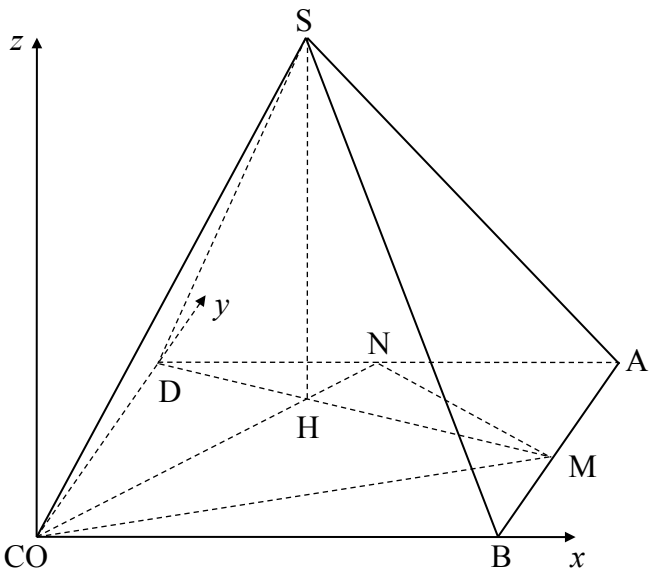
Nhận xét: *Bài toán này có thể được tọa độ hóa với gốc tọa độ là một đỉnh của đáy bằng việc kẻ thêm đường thẳng qua đỉnh, song song với SO, tạo thành bộ ba đường thẳng đôi một vuông góc tại đỉnh đó. Cái hay của việc tọa độ hóa ở lời giải chính là việc chọn biến x chưa biết đối với tọa độ điểm S, nhưng kết quả lại không phụ thuộc vào x.*

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH $\perp$ (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo *a*.

Giải

Để tính khoảng cách giữa haiđường thẳng DM và SC bằng phương pháp tọa độ như sau:

Chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, ta có C ≡O(0;0;0), B(*a*;0;0), D(0;*a*;0), A(*a*;*a*;0).



M là trung điểm AB $\Rightarrow M(a;\frac{a}{2};0)$

N là trung điểm AD $\Rightarrow N(\frac{a}{2};a;0)$

$H\in(Oxy)\Rightarrow H(x;y;0)$

$H=DM\cap CN$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH},\overrightarrow{CN}$ cùng phương và $\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DM}$ cùng phương

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}}=\frac{y}{a}$ và $\frac{x}{a}=\frac{y-a}{-\frac{a}{2}}\Rightarrow x=\frac{2a}{5},y=\frac{4a}{5}$.

Vậy $H(\frac{2a}{5};\frac{4a}{5};0)\Rightarrow S(\frac{2a}{5};\frac{4a}{5};a\sqrt{3})$

Khi đó, $\overrightarrow{CS}=(\frac{2a}{5};\frac{4a}{5};a\sqrt{3}),\ \overrightarrow{DM}=(a;-\frac{a}{2};0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DM}\right]=(\frac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\sqrt{3};-a^2)$

Mặt khác $\overrightarrow{CM}=(a;\frac{a}{2};0)\ \Rightarrow d(SC,DM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DM}\right]\right|}=\frac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{2}}=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 3*a*, BC = 4*a*, mặt phẳng (SBC) vuông góc (ABC). Biết SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^\circ$.

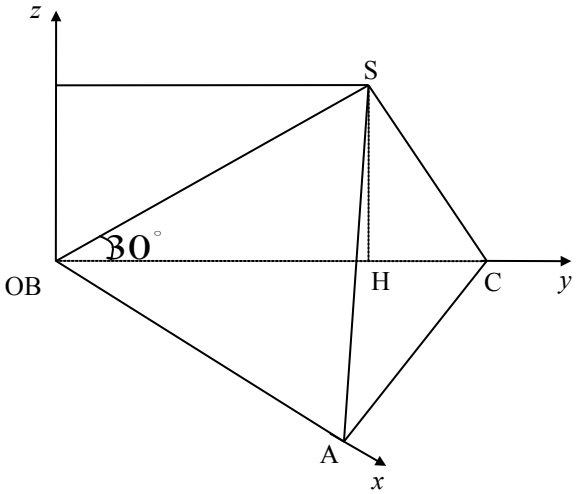
Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo *a*.

Giải

Ta có : SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^\circ$.

Để ta tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục O*xyz* với B là gốc tọa độ, tia BA là tia O*x*, tia BC là tia O*y*, tia O*z* là tia B*z* song song và cùng hướng với tia HS.



Khi đó: B(0;0;0), A(3*a*;0;0), C(0;4*a*;0), S(0;3*a*;$a\sqrt{3}$).

$\Rightarrow \overrightarrow{AS}=(-3a;3a;a\sqrt{3}),\overrightarrow{AC}=(-3a;4a;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-4a^2\sqrt{3};-3a^2\sqrt{3};-3a^2\right)=-\sqrt{3}a^2.(4;3;\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (SAC) có phương trình là

$$4(x-3a)+3(y-0)+\sqrt{3}(z-0)=0\Leftrightarrow 4x+3y+\sqrt{3}z-12a=0.$$

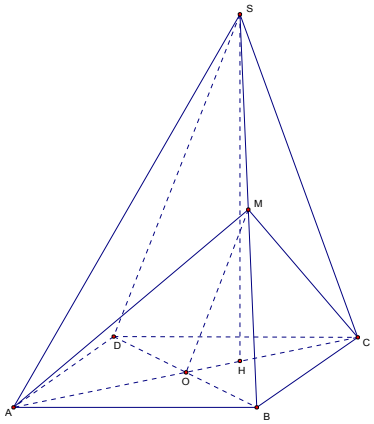
Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là

$$d(B,(SAC)) = \frac{|-12a|}{\sqrt{4^2+3^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

Nhận xét: *Nếu so với cách tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC) thông qua khoảng cách từ điểm H thì cách trên là trực tiếp, dễ định hướng hơn và dễ thực hiện hơn.*

Ví dụ 7.Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm *S* trên mp(*ABCD*) trùng với trọng tâm tam giác *BCD*. Đường thẳng *SA* tạo với mp(*ABCD*) một góc 45^0. Tính khoảng từ điểm D đến mặt phẳng *(ACM)* theo a.

Giải:



*Gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Theo giả thiết ta có $SH \perp (ABCD)$.Chọn hệ tọa độ Oxyz, với A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; $2\sqrt{2}a$; 0),

$C(a;2\sqrt{2}a;0), S(\frac{2a}{3};\frac{4\sqrt{2}a}{3};2a), M(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a)$. Từ đó viết phương trình mp(ACM) là

$2\sqrt{2}x - y - \sqrt{2}z = 0$. Vậy $d(D,(ACM)) = \frac{|-2\sqrt{2}a|}{\sqrt{8+1+2}} = \frac{2\sqrt{22}a}{11}$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2*a*; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo *a*.

Giải

Theo giả thiết (SAB), (SAC) cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.

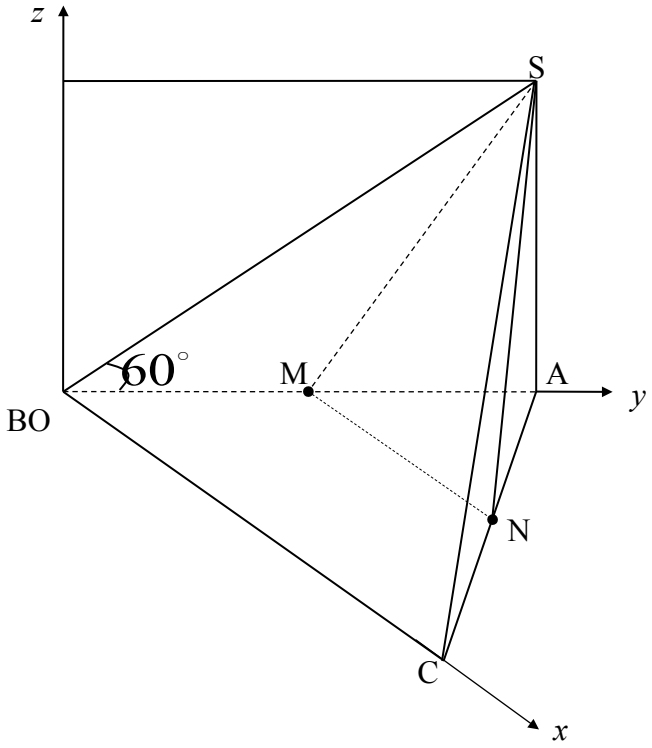
$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Mặt phẳng qua SM, song song BC, cắt AC tại N $\Rightarrow$ MN // BC $\Rightarrow$ N là trung điểm AC.Do đó tam giác AMN vuông cân tại M.Chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, với B là gốc tọa độ, khi đó $C(2a;0;0), A(0;2a;0), S(0;2a;2a\sqrt{3})$.

N là trung điểm AC $\Rightarrow N(a;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SN} = (a;-a;-2a\sqrt{3})$.

Mặt khác $\overrightarrow{BA} = (0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{BA}\right] = (4a^2\sqrt{3};0;2a^2)$.Lại có

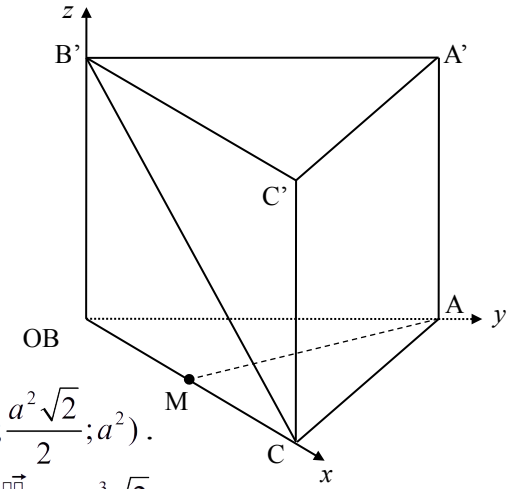
$$\overrightarrow{BN}=(a;a;0)\Rightarrow d(SN,AB)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{BA}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{BA}\right]\right|}=\frac{4a^3\sqrt{3}}{2a^2\sqrt{13}}=\frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$



*** Tiếp theo ta đề cập một số ví dụ về hình lăng trụ:**

Ví dụ 9. Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* vuông, *AB = BC = a*, cạnh bên *AA' =* $a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Tính theo *a* khoảng cách giữa hai đường thẳng *AM*, *B'C*.

Giải



Từ giả thiết ta có tam giác đáy ABC vuông cân tại B, kết hợp với tính chất của lăng trụ đứng, ta chọn hệ trục O*xyz* như hình vẽ, với B ≡O(0;0;0), C(*a*;0;0), A(0;*a*;0), B'(0;0;$a\sqrt{2}$).
Bây giờ ta tính khoảng cách giữa AM và B'C.
M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{2};0;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)$$

Mặt khác, $\overrightarrow{B'C}=(a;0;-a\sqrt{2})\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(a^2\sqrt{2};\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\right).$

Lại có $\overrightarrow{AC}=(a;-a;0)\Rightarrow d(AM,B'C)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}=\frac{a\sqrt{7}}{7}.$ □

Nhận xét: *Theo phương pháp tổng hợp việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C trong bài toán này hoàn toàn không dễ, đòi hỏi dựng được mặt*

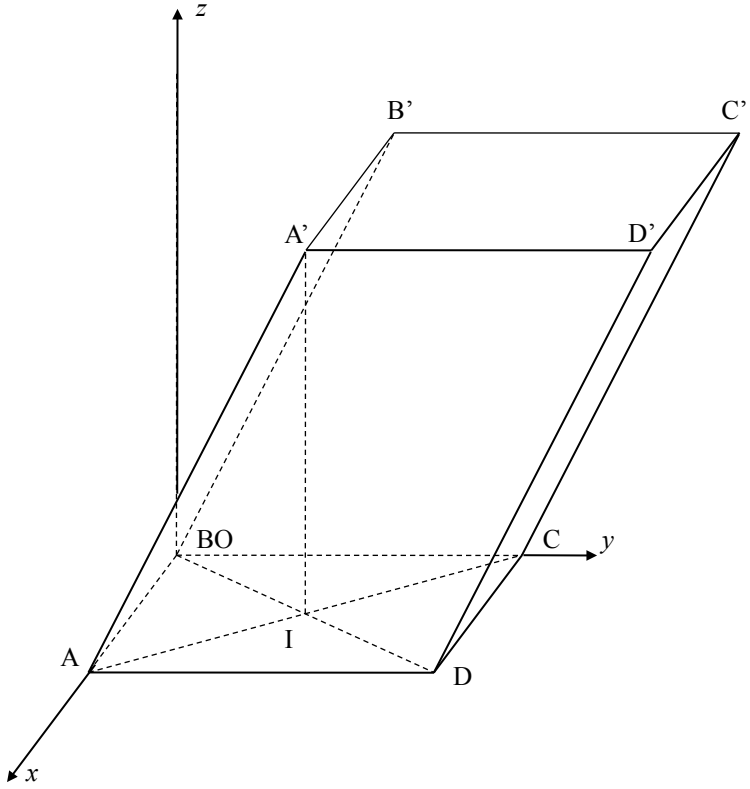
phẳng chứa AM và song song với B'C, rồi qui việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng này về khoảng cách từ C, rồi lại từ B đến mặt phẳng mới dựng đó. Lời giải bằng tọa độ rõ ràng là rất ngắn gọn và trực tiếp.

Ví dụ 10. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BD) theo a.

Giải

Gọi I = AC ∩ BD. Ta có $A'I \perp (ABCD)$.

Chọn hệ trục Oxyz với B là gốc tọa độ, tia BA là tia Ox, tia BC là tia Oy, tia Oz là tia Bz song song và cùng hướng với tia IA'.



Khi đó

B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;$a\sqrt{3}$;0),

D(a; $a\sqrt{3}$;0), I($\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0$).

A' có hình chiếu lên (Oxy) là I nên

A'($\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};z$) $(z>0)$.

Ta tìm z:

+ Mặt phẳng (ABCD) chính là mặt phẳng (Oxy) nên có VTPT là $k=(0;0;1)$.

+ $\vec{AD}=(0;a\sqrt{3};0)$, $\vec{AA'}=(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};z)$

$\Rightarrow \left[\vec{AD},\vec{AA'}\right]=(az\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2})$

$=\frac{a\sqrt{3}}{2}.(2z;0;a)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ADD'A') có VTPT là $n=(2z;0;a)$.

+ Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0 nên ta có

$$\frac{|k.n|}{|k|.|n|}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{4z^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=\frac{a\sqrt{3}}{2}\quad(z>0).$$

Vậy A'($\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}$).

Do đó mặt phẳng (A'BD) có VTPT là $\left[\vec{BA'},\vec{BD}\right]=(-\frac{3a^2}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{2};0)=-\frac{a^2}{2}.(3;-\sqrt{3};0)$

$\Rightarrow (A'BD):3x-\sqrt{3}y=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x-y=0$.

Mặt khác $\vec{BB'}=\vec{AA'}\Rightarrow B'(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2})$.

Vậy khoảng cách từ B' đến (A'BD) là

$$d(B',(A'BD)) = \frac{\left| -\frac{a}{2}.\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right|}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

3.2 Các bài tập áp dụng

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, AB = a $\sqrt{2}$, AC = a $\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB = $a\sqrt{3}$.

Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh đều bằng a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD)

Bài 3.Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC cân với AB = AC = a và góc $BAC = 120^0$, cạnh bên BB'= a . Gọi I là trung điểm của CC' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC'.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi M là trung điểm của SC. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

Bài 5.Cho hình chóp S.ABC có ABC, SBC là các tam giác đều cạnh a. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60 độ. Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính khoảng cách từ B đến (SAC) theo

Bài 6.Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AB= 2a , $AC = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là H, H là trung điểm của AB. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30 độ. Tính theo a khoảng cách từ điểm M là trung điểm cạnh BC đến (SAC)

Bài 7.Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, tam giác SAB cân tại S và nằm tring mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu của S lên ABCD là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABCD) bằng 45 độ. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC)

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SD = $\frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên (ABCD) là trung điểm của AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa HK và SD theo a

4. Hiệu quả của sáng kiến đối với các hoạt động dạy và học

Nội dung sáng kiến này đã được trình bày cho các em học sinh khối 12 ôn thi THPT Quốc gia , các em học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi Toán và máy tính cầm tay khối 11, 12. Sự hứng thú và tự tin của học sinh đối với việc học Toán, đặc biệt là hình học không gian, thật sự được cải thiện đã góp phần vào thành tích chung trong các kì thi của nhà trường trong các năm học qua.

Sau hơn mười năm được phân công trực tiếp giảng dạy các đội tuyển học sinh giỏi ở trường THPT Trần Phú , tôi đã áp dụng sáng kiến này trong việc giảng dạy đại trà ở lớp , bồi dưỡng học sinh khá giỏi , ôn luyện các đội tuyển và tôi đã rút ra kết luận sau :

**** Kết quả kiểm nghiệm cuối năm trong quá trình giảng dạy cho học sinh đại trà cả lớp:***

(Lớp 12B ,12C,12G trường THPT Trần Phú -Thanh Hoá)

Lớp	**Sĩ số**	**Số học sinh làm được bài dạng này khi chưa dạy phương pháp**		**Số học sinh làm được bài dạng này khi đã dạy phương pháp**	
		Số lượng	**Phần trăm**	**Số lượng**	**Phần trăm**
12B	44	8	18 %	36	82 %
12C	43	9	21 %	34	79 %
12G	43	11	26 %	32	74 %

**** Kết quả kiểm nghiệm về tính hiệu quả cho học sinh khi dạy sử dụng phương pháp:***

- Giúp học sinh rèn luyện kỹ năng phân tích bài toán để tìm mối liên hệ với các kiến thức đã được học ,từ đó áp dụng để giải các bài toán tương tự ,có liên quan.
- Làm cho học sinh yêu thích hơn và gây sự thích thú tò mò khám phá về môn học.
- Có cách giải hợp lí ,hay ,ngắn gọn dễ hiểu dành cho mọi đối tượng học sinh.
- Sau khi sử dụng phương pháp này vào việc giảng dạy tôi nhận thấy số học sinh khá giỏi ngày càng được tăng lên ở các năm và học sinh không còn ‘‘ e ngại’’ khi gặp các bài toán về dạng này.

**** Bài học kinh nghiệm rút ra.***

Sau một thời gian đưa vào sử dụng , bồi dưỡng học sinh tôi đã rút ra một số kinh nghiệm sau:

- Giáo viên phải nghiên cứu kỹ kiến thức sách giáo khoa , tài liệu tham khảo.
- Lựa chọn đúng phương pháp giảng dạy bộ môn phù hợp với đối tượng học sinh.
- Để áp dụng và làm tốt các bài tập cần cho học sinh nắm vững cơ sở lý thuyết của vấn đề tránh được những thiếu sót và không chặt chẽ trong quá trình giải bài tập của học sinh.
- Khi cho bài tập cần nâng cao dần về mức độ khó.
- Sau mỗi bài tập cần chốt lại cái cơ bản của vấn đề và nhận xét nhằm lôi cuốn học sinh có lòng say mê học toán.

III. KẾT LUẬN,KIẾN NGHỊ

1.Kết luận

Trên đây là sáng kiến của tôi trong quá trình trực tiếp giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi . Sau nhiều năm tôi đã hệ thống thành chuyên đề về : **“Sử dụng phương pháp tọa độ để tính khoảng cách trong bài toán hình học không gian”.**

Đây là phương pháp rất hữu ích giúp học sinh biết chuyển từ bài toán phức tạp thành bài toán đơn giản để giải quyết và đặc biệt làm cho học sinh không còn

“ngại” khi học loại toán hình học không gian. Dạng toán này cũng là một chuyên đề quan trọng giúp cho giáo viên bồi dưỡng các kỳ thi học sinh giỏi hàng năm.

Thông qua các ví dụ minh họa các trường hợp đơn giản và lời giải 10 ví dụ minh họa và 8 bài toán áp dụng ta nhận thấy phương pháp tọa độ hóa thật sự là một công cụ rất hiệu quả để giải các bài toán hình học không gian tổng hợp. Các lời giải là hoàn toàn tự nhiên, trực tiếp và dễ định hướng. Yêu cầu duy nhất chính là sự chính xác trong việc xác định tọa độ các điểm và thực hiện các phép tính đối với các công thức có sẵn. Hiển nhiên đây không nên là cách làm duy nhất. Để có óc tư duy trừu tượng tốt thì giáo viên cũng cần phải tạo cho học sinh một nền tảng cơ bản các quan hệ hình học trong không gian, hiểu được các bước dựng hình cơ bản và biết phối hợp các kiến thức để có lời giải tốt, hiệu quả vẫn luôn là mong muốn của người viết sáng kiến này.

2. Đề xuất

Mặc dù bản thân đã dành thời gian nghiên cứu, tuy vậy thời gian nghiên cứu còn hạn chế , bản thân kinh nghiệm chưa nhiều nên bài viết không tránh khỏi những thiếu sót .Các phép tính trong sáng kiến là khá nhiều, hình vẽ khá phức tạp nên không tránh khỏi các thiếu sót, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các bạn đồng nghiệp và các em học sinh. Hi vọng đây là một đề tài nho nhỏ góp phần cho công tác giảng dạy, nghiên cứu và học tập của mọi người. Đề tài về phương pháp vectơ và tọa độ còn rất phong phú, mong nhận được sự trao đổi thêm và sự góp ý chân thành của quý Thầy Cô giáo.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	*Thanh hóa,ngày 14 tháng 5 năm 2016* Tôi xin cam đoan trên đây là sáng kiến kinh nghiệm của bản thân mà trong quá trình giảng dạy tôi đã tích lũy được .Tôi không sao sao chép của bất kỳ ai. **Trịnh Văn Hoan**