Chương

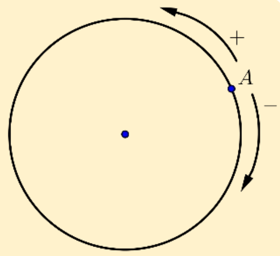
Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

A Lý thuyết

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

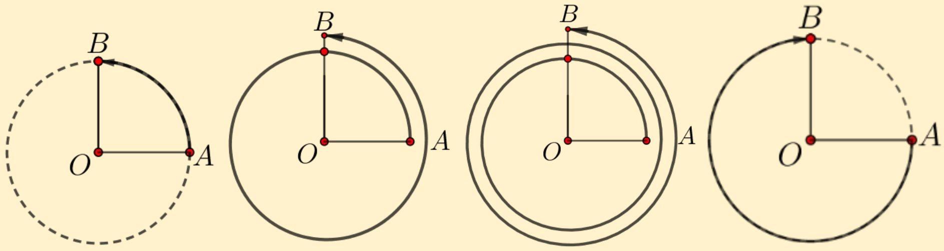
Đường tròn định hướng:

- Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn ***một chiều chuyển động*** gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.
- Qui ước chọn chiều ***ngược*** với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



Cung lượng giác:

- Trên đường tròn định hướng cho 2 điểm A, B. Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ A đến B tạo nên một ***cung lượng giác*** có điểm đầu A và điểm cuối B.
- Với 2 điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có ***vô số cung lượng giác*** có điểm đầu A, điểm cuối B.
- Kí hiệu $\overset{\text{Đ}}{AB}$.



Chú ý

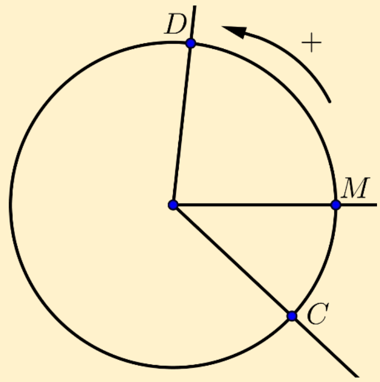
Trên một đường tròn định hướng, lấy 2 điểm A, B thì:

(1) Kí hiệu AB chỉ một cung hình học (lớn hoặc bé) hoàn toàn xác định.

(2) Kí hiệu $\overset{\text{Đ}}{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B

2. Góc lượng giác.

Góc lượng giác:



- Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác $\overset{\frown}{CD}$.
  Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến OD. Ta nói tia OM tạo nên ***góc lượng giác***, có *tia đầu* OC *và tia cuối* OD.
- Kí hiệu: (OC,OD).
- Ta quy ước: chiều quay
  + *ngược với chiều quay kim đồng hồ* là chiều dương
- Khi tia OM quay góc α thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α.
- Số đo của ***góc lượng giác*** với tia đầu OC, tia cuối OD được kí hiệu là

Nhận xét

Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu OC và tia cuối OD sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$sđ(OC,OD)=\alpha^\circ+k360^\circ \quad (k\in\mathbb{Z})$

Hệ thức Chasles:

Với 3 tia Oa, Ob, Oc bất kì ta có:

$$(Oa,Ob)+(Ob,Oc)=(Oa,Oc)+k360^\circ \quad (k\in\mathbb{Z})$$

3. Đơn vị Radian.

Đơn vị Radian:

» Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

Quan hệ giữa độ & radian:

» $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}$ và $1\,\text{rad}=\dfrac{180^\circ}{\pi}$.

Chú ý:

Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị radian, ta không viết chữ rad sau số đó.

$\boxed{180^\circ=\pi\to 60^\circ=\dfrac{\pi}{3}}$, $\boxed{180^\circ=\pi\to 45^\circ=\dfrac{\pi}{4}}$

4. Đường tròn lượng giác

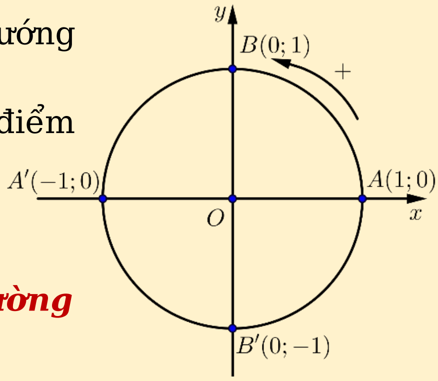
Đường tròn lượng giác:

» Trong mặt phẳng $Oxy,$ vẽ đường tròn định hướng tâm O, bán kính $R=1$.

» Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

» Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.

» Đường tròn xác định như trên được gọi là ***đường tròn lượng giác*** (gốc A).



5. Độ dài cung tròn.

» Cung có số đo a rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l=Ra$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và rađian

Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và rađian: $180^\circ = \pi$ rad

» Đổi cung a có số đo từ rađian sang độ $a.\dfrac{180^\circ}{\pi}$

» Đổi cung x° có số đo từ độ ra rađian $x^\circ.\dfrac{\pi}{180^\circ}$

Ví dụ 1.1.

(1) Đổi số đo của các góc sau ra rađian: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

(1) Đổi số đo của các góc sau ra rađian: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

Vì $1^0 = \dfrac{\pi}{180} rad$ nên $72^0 = 72.\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{5}, 600^0 = 600.\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{10\pi}{3}$,

$$-37^045'30'' = -37^0 - \left(\frac{45}{60}\right)^0 - \left(\frac{30}{60.60}\right)^0 = \left(\frac{4531}{120}\right)^0 = \frac{4531}{120}.\frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

Vì $1rad = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^0$ nên $\dfrac{5\pi}{18} = \left(\dfrac{5\pi}{18}.\dfrac{180}{\pi}\right)^0 = 50^o, \dfrac{3\pi}{5} = \left(\dfrac{3\pi}{5}.\dfrac{180}{\pi}\right)^0 = 108^o$,

$$-4 = -\left(4.\frac{180}{\pi}\right)^0 = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^0 \approx -2260^048'.$$

Ví dụ 1.2.

Đổi số đo của góc $45^032'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần

Lời giải

Trước tiên ta đổi $45^032' = \left(45 + \dfrac{32}{60}\right)^0$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \dfrac{\left(45 + \dfrac{32}{60}\right).\pi}{180} \approx 0,795$

Ví dụ 1.3.

Đổi số đo radian sang số đo độ

(1) $\pi(rad)$ (2) $\frac{\pi}{3}(rad)$ (3) $\frac{\pi}{10}(rad)$

(4) $\frac{22\pi}{3}(rad)$ (5) $-\frac{5\pi}{9}(rad)$ (6) $-\frac{12\pi}{5}(rad)$

Lời giải

(1) $\pi(rad)=\left(\frac{\pi.180}{\pi}\right)^{\circ}=180^{\circ}$

(2) $\frac{\pi}{3}(rad)=\left(\frac{\frac{\pi}{3}.180}{\pi}\right)^{\circ}=60^{\circ}$

(3) $\frac{\pi}{10}(rad)=\left(\frac{\frac{\pi}{10}.180}{\pi}\right)^{\circ}=18^{\circ}$

(4) $\frac{22\pi}{3}(rad)=\left(\frac{\frac{22\pi}{3}.180}{\pi}\right)^{\circ}=1320^{\circ}$

(5) $-\frac{5\pi}{9}(rad)=\left(\frac{-\frac{5\pi}{9}.180}{\pi}\right)^{\circ}=-100^{\circ}$

(6) $-\frac{12\pi}{5}(rad)=\left(\frac{-\frac{12\pi}{5}.180}{\pi}\right)^{\circ}=-432^{\circ}$

Ví dụ 1.4.

Đổi số đo độ sang số đo radian:

(1) 170° (2) 1000° (3) 3100°

(4) -90° (5) -240° (6) -125°

Lời giải

(1) $170^{\circ}=\frac{\pi.170}{180}\text{rad}=\frac{17\pi}{18}(rad)$

(2) $1000^{\circ}=\frac{\pi.1000}{180}\text{rad}=\frac{50\pi}{9}(rad)$

(3) $3100^{\circ}=\frac{\pi.3100}{180}\text{rad}=\frac{155\pi}{9}(rad)$

(4) $-90^{\circ}=\frac{\pi(-90)}{180}\text{rad}=-\frac{\pi}{2}(rad)$

(5) $-240^{\circ}=\frac{\pi(-240)}{180}\text{rad}=-\frac{4\pi}{3}(rad)$

(6) $-125^{\circ}=\frac{\pi(-125)}{180}\text{rad}=-\frac{25\pi}{36}(rad)$

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Phương

Cung tròn bán kính R *có số đo* $\alpha\ (0 \le \alpha \le 2\pi)$, *có số đo độ* $a^\circ\ (0^\circ \le a \le 360^\circ)$ *và có độ dài* l *thì:* $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ *do đó* $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$

$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{rad}$

Ví dụ 2.1.

Một đường tròn có bán kính 36 m. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

3π 1

Lời giải

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

(1) 51^0

Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8\text{m}$.

(2) 51^0

Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04\text{m}$.

(3) $\frac{1}{3}$

Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12\text{m}$.

Ví dụ 2.2.

Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^0 = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

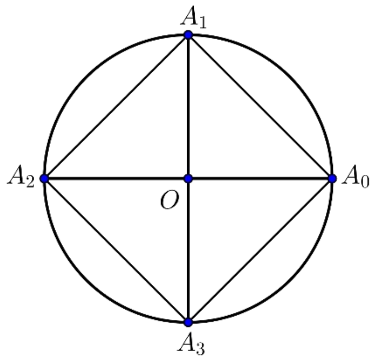
Lời giải

Một hải lí dài $\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852\text{km}$

Ví dụ 2.3.

Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{A_0A_i}, \overset{\frown}{A_iA_j} (i,j = 0,1,2,3, i \neq j)$

Lời giải



Ta có $\widehat{A_0OA_0} = 0$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_2} = \pi$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_2} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_3} = \frac{\pi}{2}$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Như vậy sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0,1,2,3, k \in \mathbb{Z}$

Theo hệ thức salơ ta có sđ $\overset{\frown}{A_iA_j} =$ sđ $\overset{\frown}{A_0A_j}$ - sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} + k2\pi = (j-i)\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

Phương pháp

Để biểu diễn góc lượng giác có số đo a trên đường tròn lượnggiác ta cần thực hiện các bước sau:

» **Bước 1:** Vẽ đường tròn lượng giác. Chọn gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu.

» **Bước 2:** Chọn điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA,OM)=\alpha$.

Điểm cuối M chính là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo a.

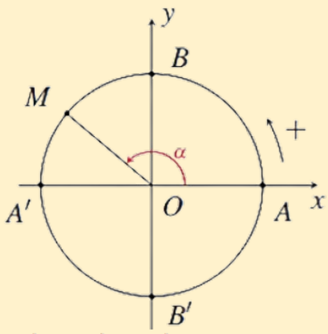
⁂ Kiến thức cần lưu ý:

✓ Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng với:

» Chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ),

» Chiều quay âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ).

» Lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.



Các điểm $B(0;1), A(1;0), B'(0;-1)$ nằm trên đường tròn lượng giác.

✓ Nếu $|\alpha|>2\pi$ (hoặc $|\alpha|>360^\circ$) ta phân tích $\alpha=\beta+k2\pi$ hoặc $\alpha=\beta+k360^\circ$ với $-\pi<\beta<\pi$. Khi đó, điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo α sẽ trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo là β.

Ví dụ 3.1.

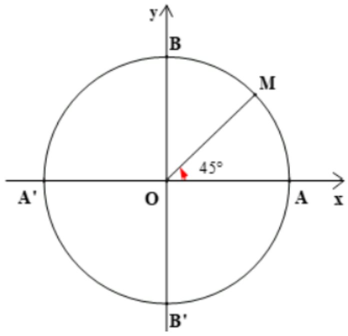
Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng

$-\frac{9\pi}{4}$

✍ Lời giải

(1) $-\frac{9\pi}{4}$

Ta có $(OA,OM)=45^\circ$ là góc lượng giác có tia đầu là tia OA, tia cuối là tia OM và quay theo chiều dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ) một góc 45°. Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng 45° được xác định như hình dưới đây:



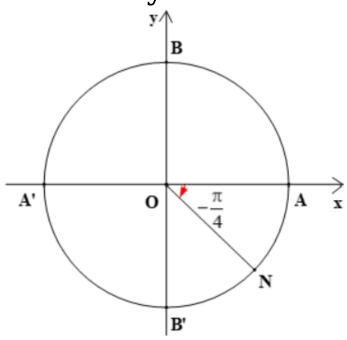
Vậy điểm M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$

(2) $-\dfrac{9\pi}{4}$

Vì $(OA,ON)=-\dfrac{9\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)\cdot 2\pi$, do vậy điểm N trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo bằng $-\dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó, góc (OA,ON) là góc lượng giác có tia đầu là tia OA, tia cuối là tia ON và quay theo chiều âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ) một góc $\dfrac{\pi}{4}$.

Điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $-\dfrac{9\pi}{4}$ được biểu diễn như hình dưới đây:



Vậy điểm N là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{B'A}$.

Ví dụ 3.2.

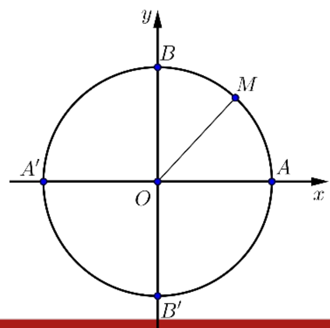
Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo:

(1) $\dfrac{9\pi}{4}$ (2) -765^0 (3) $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Lời giải

(1) -765^0

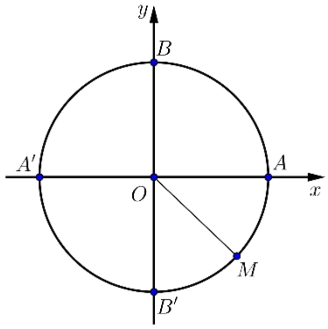
Ta có $\dfrac{9\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2.2\pi$.



Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{9p}{4}$ trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{p}{4}$.

Vậy điểm cuối của cung $\frac{9p}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$.

(2) $x = kp\ (k \in ¢)$



Ta có $-765^0 = -45^0 - 2.360^0$.

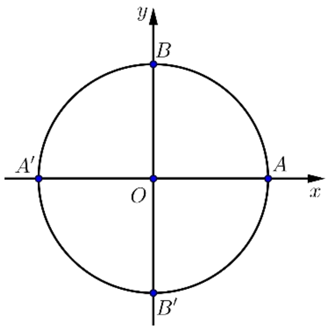
Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác -765^0 trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -45^0.

Lại có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$.

Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn góc có số đo -765^0.

(3) $x = kp\ (k \in ¢)$



Ta có $x = kp = \frac{k2p}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo kp.

Với $k = 0; x = 0$, được biểu diễn bởi điểm A.

Với $k = 1; x = p$, được biểu diễn bởi điểm A'.

Ví dụ 3.3.

Cho cung lượng giác có số đo $x = \frac{p}{4} + kp$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2p; 5p]$?

Lời giải

Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{p}{4} + kp > 2p \\ \frac{p}{4} + kp < 5p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}$.

Từ đó để $x \in [2p; 5p]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$. Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k là $2,3,4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3.4.

Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{p}{3} + \frac{kp}{4}$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{3p}{5}; 4p\right]$?

Lời giải

Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} -\dfrac{p}{3}+\dfrac{kp}{4}>-\dfrac{3p}{5} \\ -\dfrac{p}{3}+\dfrac{kp}{4}\le 4p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>-\dfrac{16}{15} \\ k\le\dfrac{52}{3} \end{cases}$.

Từ đó, để $x\in\left(-\dfrac{3p}{5};4p\right]$ thì $-\dfrac{16}{15}<k\le\dfrac{52}{3}$. Vì $k$là số nguyên nên có 19 giá trị của $k(-1,0,1,...,16,17)$ thỏa mãn ycbt.