

Bài 11. Hàm số liên tục

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Xét tính liên tục của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = -1$$
Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 - 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^4 + x^2 - 1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 2) = -1$

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{neá } x \neq 2; \\ m + 1 & \text{neá } x = 2 \end{cases} ; x_0 = 2$$

Câu 2. Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm được chỉ ra:

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(2) = m + 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{neá } x \neq 1; \\ m^2 x & \text{neá } x = 1 \end{cases} ; x_0 = 1$$

Câu 3. Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm được chỉ ra

Lời giải

Lời giải

$$f(1) = m^2; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}$$

$$\text{Ta có: } = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 4. Tìm giá trị của hàm số a để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$
Lời giải

Lời giải

Trên các khoảng $(0; +\infty), (-\infty; 0)$, hàm số $f(x)$ là các hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

$$\text{Ta có: } f(0) = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + 2) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + a) = a$$

Ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ khi $a = 2$.

Vậy, với $a = 2$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 9}{x - \sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 26 \sin \frac{\pi}{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{tại điểm } x_0 = \sqrt{3}.$$

Câu 5. Xét tính liên tục của hàm số

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(\sqrt{3}) = 26 \sin \frac{\pi}{3} = 26 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13\sqrt{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x^2 - 3)(x^2 + 3)}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} [(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)] = 12\sqrt{3}$$

Suy ra $f(\sqrt{3}) \neq \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$, vì vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

Câu 6. Tìm giá trị của tham số a để hàm số

liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(1) = a - \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(ax - \frac{1}{2} \right) = a - \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$$

Câu 7. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Lời giải

Xét $x \in (4; +\infty)$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ là hàm phân thức nên hàm số liên tục.

Xét $x \in (-\infty; 4)$ thì $f(x) = mx + 1$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Xét $x = 4$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$ và

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (mx + 1) = 4m + 1; f(4) = 4m + 1$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

$$v(t) = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ t^2 - 5t + 10 & \text{khi } t > 5 \end{cases}$$

Câu 8. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t=5$ hay không?

Lời giải

Lời giải

Ta có: $v(5) = 10$ và $\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 10 = 10; \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (t^2 - 5t + 10) = 10$

Suy ra $\lim_{t \rightarrow 5} v(t) = v(5)$

Vậy hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t=5$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 5x^2 - 5x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1$$

Câu 9. Xét tính liên tục của hàm số

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(x_0) = f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{4mx - 1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Câu 10. Cho hàm số

Tìm m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = 2$

Lời giải

Lời giải

$$f(x_0) = f(2) = \frac{8m - 1}{3}$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} = 1$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\Rightarrow \frac{8m - 1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \neq 4 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$$

Câu 11. Cho hàm số

Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 4$

Lời giải

Lời giải

$$f(x_0) = f(4) = 2a + 1$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x + 1) = 21$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 4$ thì $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$
 $\Rightarrow 2a + 1 = 21 \Leftrightarrow a = 10$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 1)$$

Câu 12. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3 = 3 + m \Leftrightarrow m = 0$

Câu 13. Tìm các giá trị của m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 2$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3; f(2) = m$$

Ta có

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$

Câu 14. Tìm các giá trị của m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + 1) = m + 1; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2; f(1) = 2$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 2)$$

Câu 15. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Rightarrow m = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (\text{tại } x=1)$$

Câu 16. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

Lời giải

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Suy ra
$$3 + m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases} \quad (\text{tại } x=3).$$

Câu 17. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

Lời giải

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $(-1; +\infty)$.

Theo giả thiết thì ta phải có:

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)(\sqrt{x+1} + 2)}{x - 3} = - \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1} + 2) = -4$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 18. Tìm m để hàm số liên tục trên tập xác định:

Lời giải

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 1$.

Do đó, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Ta có: $f(1) = 3 \cdot 1 + m = m + 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow 3 = m + 3 \Leftrightarrow m = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 19. Tìm m để hàm số liên tục trên tập xác định:

Lời giải

Lời giải

Ta có: $f(1) = 2m \cdot 1 - 3 = 2m - 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2mx - 3); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1^2 = 1.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m - 3 = 1 = 2m - 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

---HẾT---