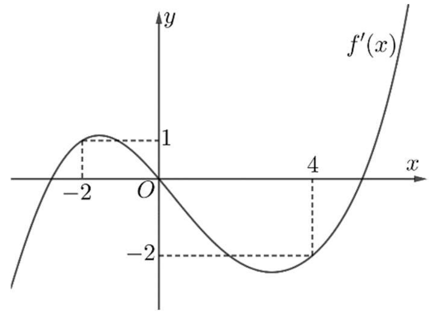
ĐỀ VDC SỐ 03 Tính đơn điệu của hàm hợp

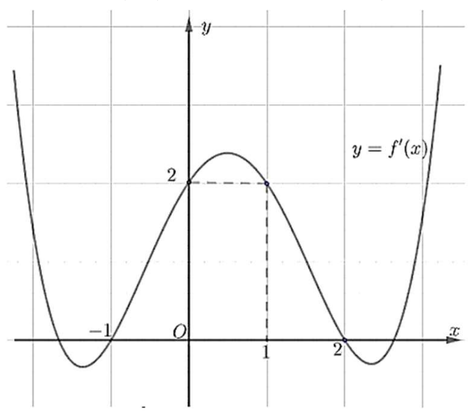
Câu 1: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x)=3f(-x^3-3x+m)+(x^3+3x-m)^2(-2x^3-6x+2m-6)$.



A. 23. **B.** 21. **C.** 5. **D.** 17.

Câu 3: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 4041. **B.** 4042. **C.** 2021. **D.** 4039.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)(x^2+2mx+9)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-4)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

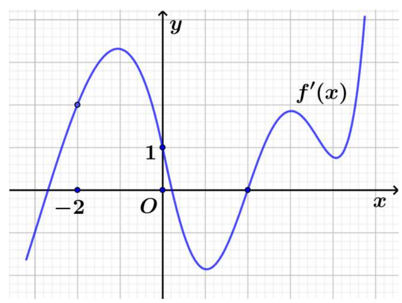
Câu 6: Cho hàm số $f(x)=-x^4-(4-m^2)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x)=g[f(x)]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 7: Cho hàm số $g(x)=f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

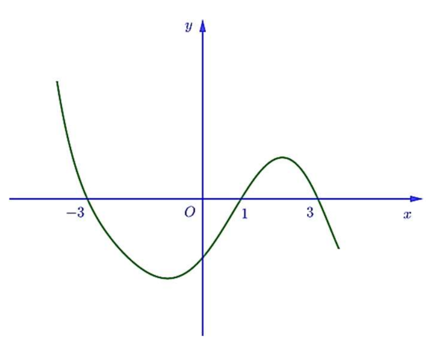


A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f(x^2+4x+7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

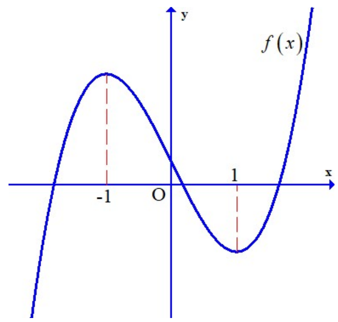
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả $f(-3)=f(3)=\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2-f(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây:

A. $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;6)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f(x^3-3x-1)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2)$ bằng:



A. 9. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

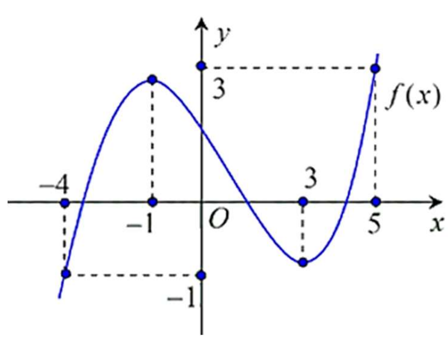
A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $f(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

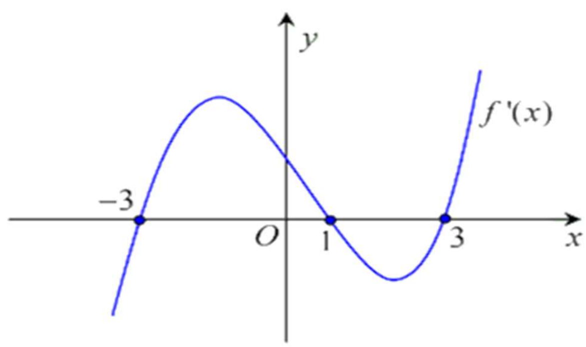


A. $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(-5;-3)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x) = x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x) = f(x^3 + m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

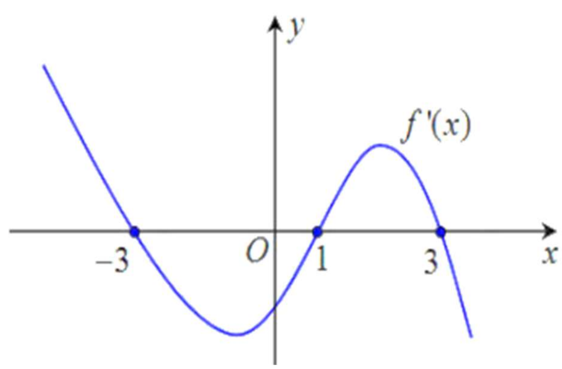
A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?



A. 19. **B.** 23. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x - m)$ đồng biến trên $[-2;-1]$.



A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 31.

Câu 18: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1}{2m - 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ đồng biến trên $(-\infty;1)$?

A. 21. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 20.

Câu 19: Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{x + 4a}{x + b}$ và $g(x) = \dfrac{x + b}{x + a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Gọi a_o và b_o lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của a và b thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T = a_o + b_o$ tương ứng bằng:

A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

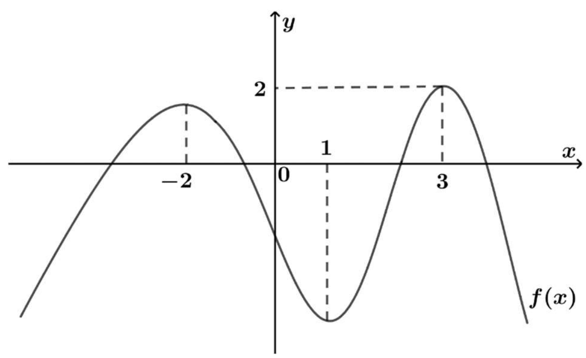
Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 3(m^2+m-1)x^2 + 3(m-1)x - m - 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng:

A. $4\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{6}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = 3m^2x^4 - 8mx^3 + 6x^2 + 12(2m-1)x + 1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$; với *a, b* là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ sẽ bằng:

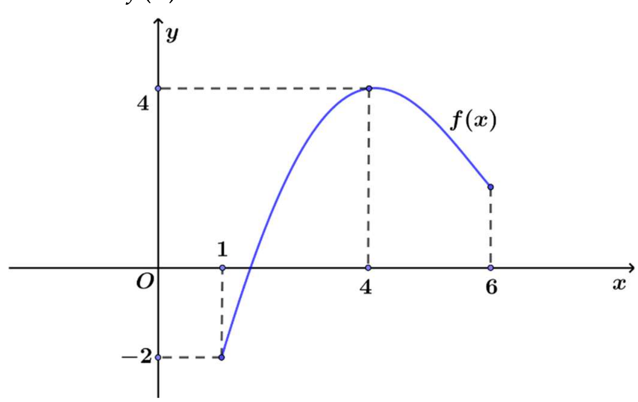
A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



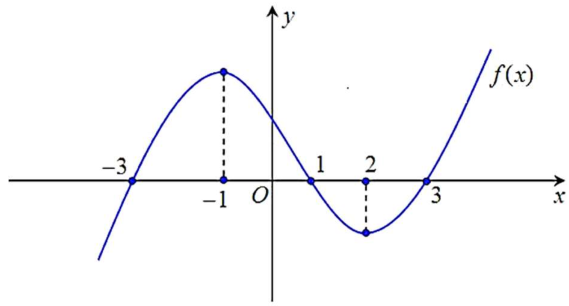
A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;2021)$ để hàm số $y = \dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



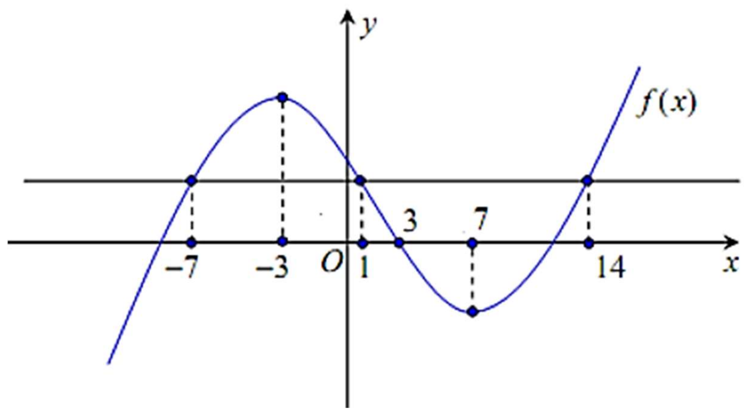
A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 22.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = (f(x))^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



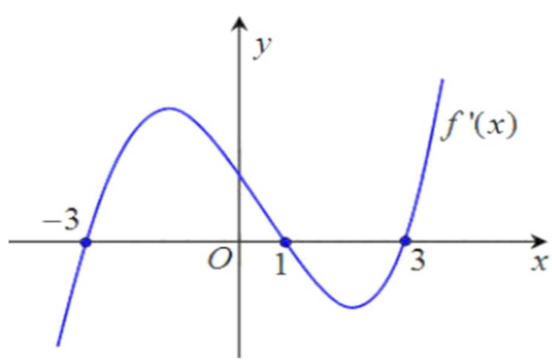
A. $(1;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=[f(x)]^2-6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



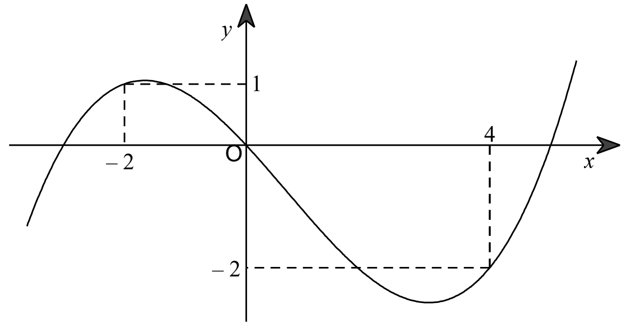
A. $(-3;1)$. **B.** $(7;14)$. **C.** $(14;+\infty)$. **D.** $(1;7)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 28. **D.** 23.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

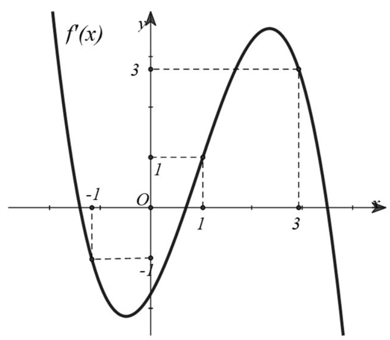


A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 28: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để hàm số $g(x)=\left|x^2-4mx+m-3\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

A. 79. **B.** 39. **C.** 80. **D.** 40.

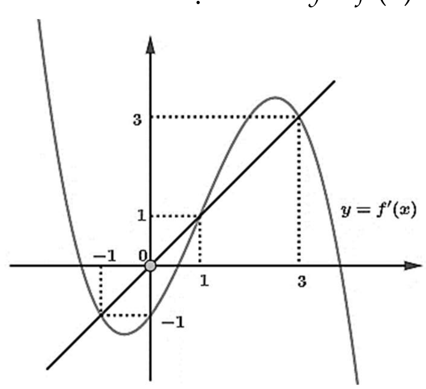
Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ



Hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

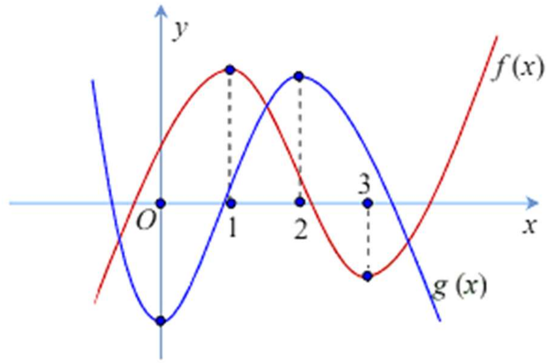
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

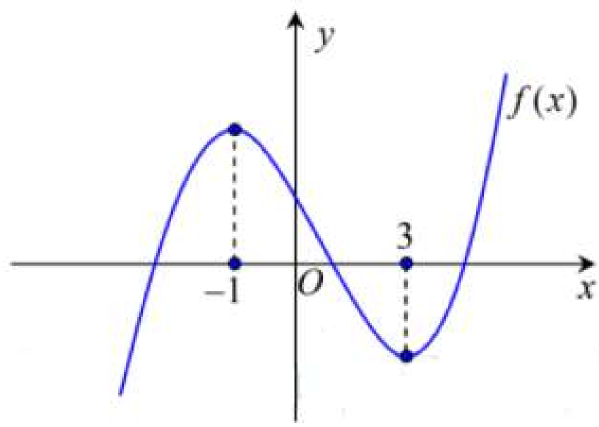
A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. 0 . **B.** -2 . **C.** -4 . **D.** 3 .

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f\left(x^3+3x-1\right)$ nghịch biến trên:



A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

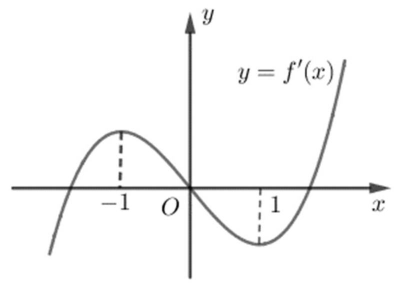
Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'\left(x\right)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

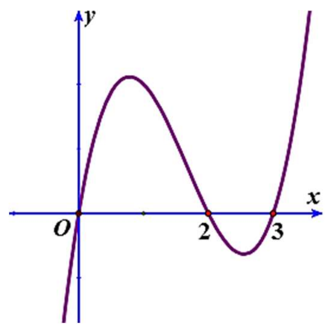
A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f\left(\sin x\right)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2 . **B.** 3 . **C.** Vô số. **D.** 5 .

Câu 35: Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y = f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-2;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

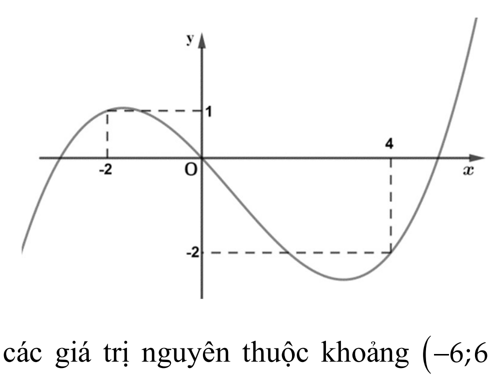
Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10 < m < 10$ và hàm số $y = f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 6 **D.** 1.

Câu 37: Cho hàm số $y = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

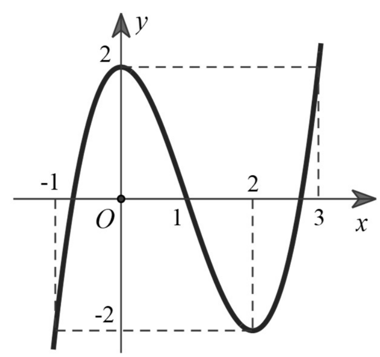
Câu 38: Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y = mx^9 + \left(m^2 - 3m + 2\right)x^6 + \left(2m^3 - m^2 - m\right)x^4 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - \left(m^2 - m - 20\right)x + 1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 40: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Đặt $g\left(x\right) = f\left(x - m\right) - \frac{1}{2}\left(x - m - 1\right)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(5;6\right)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:

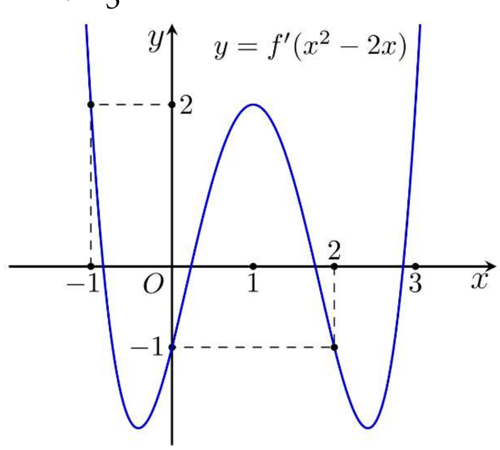


A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = 2\left(m+1\right)x^3 + 3\left(m^2 - 5m - 4\right)x^2 - 6\left(3m^2 - 6m - 19\right)x - 32\sqrt{\left(x+1\right)^3} + 1$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$. Số phần tử của tập hợp S là

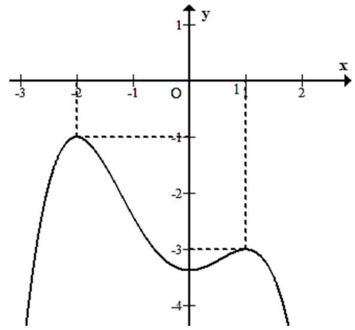
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 42: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x^2 - 2x\right)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right) + \frac{2}{3}x^3 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

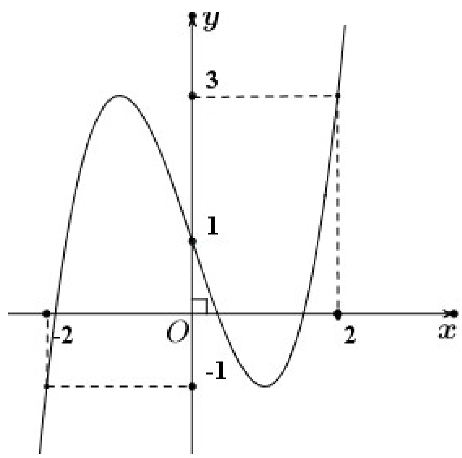
Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3x+1\right)-3\left(2x^3+2x^2-3x+5\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

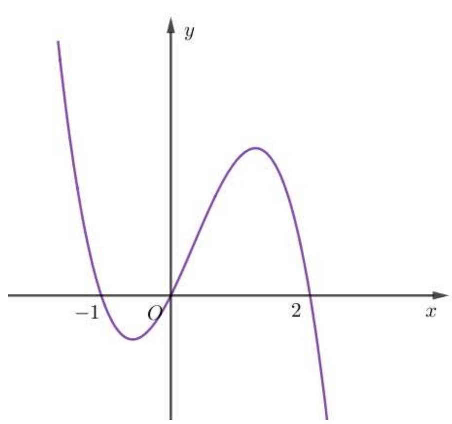
A. $\left(-\infty;-2\right),\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-3;0\right)$. **C.** $\left(-\infty;-1\right)$. **D.** $\left(-1;2\right)$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+1\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$. Đồng biến trên khoảng nào sau đây?



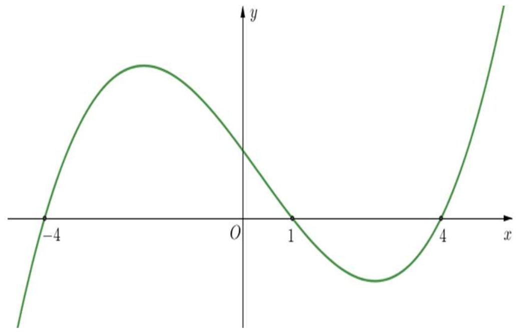
A. $\left(-\infty;-3\right)$. **B.** $\left(-3;0\right)$. **C.** $\left(1;4\right)$. **D.** $\left(4;+\infty\right)$.

Câu 45: Cho hàm số bậc bốn $f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(3-2x\right)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=f\left(x^2+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

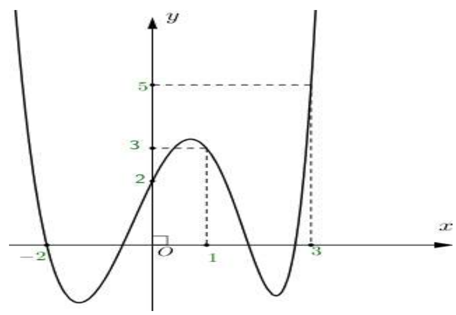
Câu 46: Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x) = (f(2-x))'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như dưới



Hàm số $y = f(x^2+2) - x^3 + 2x^2 - x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

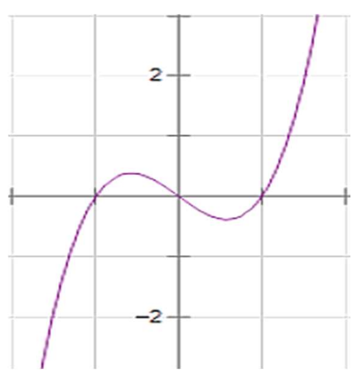
Câu 47: Cho hai hàm số $f(x); g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'(x^2+4x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2-4) - \frac{2}{3}x^3 + 2021$ nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(2,3)$. **D.** $(4;6)$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = \left[f(x^2-4)\right]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $h(x) = f(x^2+x+m)$ đồng biến trên $(0;1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y = f(x^2-1)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(2x^3 - x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x^2 - 2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 3)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2)$. **B.** $(-2; 1)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(-1; +\infty)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.B	5.B	6.D	7.C	8.C	9.C	10.D
11.B	12.C	13.D	14.A	15.B	16.C	17.C	18.A	19.B	20.D
21.C	22.A	23.C	24.D	25.B	26.A	27.A	28.C	29.A	30.A
31.B	32.B	33.C	34.B	35.D	36.C	37.B	38.B	39.B	40.C
41.D	42.C	43.C	44.D	45.D	46.C	47.B	48.D	49.A	50.C

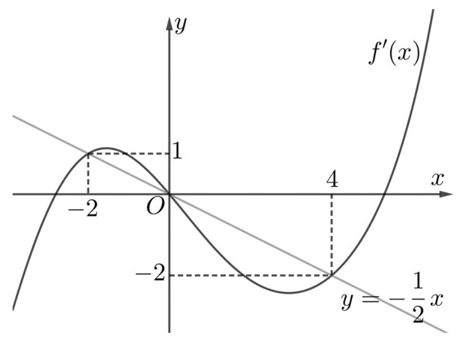
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét hàm số $h\left(x\right)=4f\left(x\right)+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

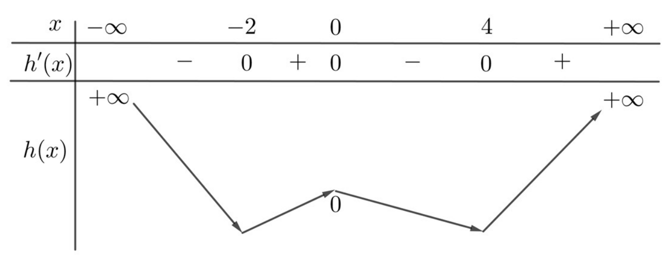
Vì $f\left(x\right)$ là hàm số đa thức nên $h\left(x\right)$ cũng là hàm số đa thức và $h\left(0\right)=4f\left(0\right)=0$.

Ta có $h'\left(x\right)=4f'\left(x\right)+2x$. Do đó $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}x$.

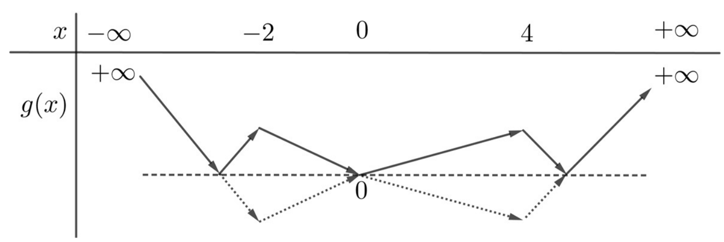


Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x$, ta có $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;0;4\right\}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)$ như sau:



Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=\left|h\left(x\right)\right|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;4\right)$.

Câu 2: **Chọn A**

$$g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2\left(-x^3-3x+m-3\right)$$
$$=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^3-6\left(-x^3-3x+m\right)^2$$

Ta có

$$g'(x)=-9\left(x^2+1\right)f'\left(-x^3-3x+m\right)-18\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)^2+36\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)$$

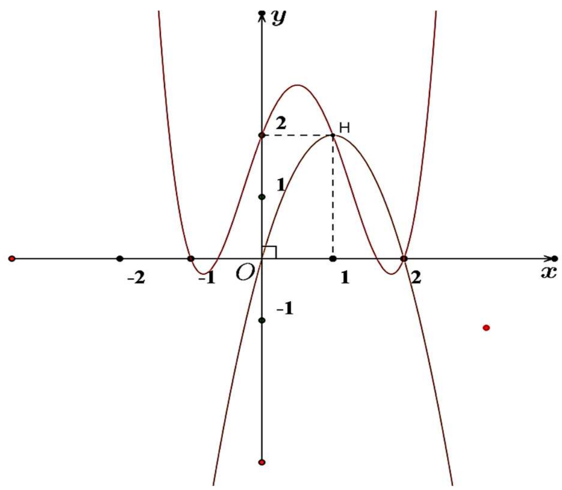
Để hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$

$$g'(x)\le 0\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2-4\left(-x^3-3x+m\right)\ge 0\ \forall x\in(-1;2)$$
$$\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)\ge -2\left(-x^3-3x+m\right)^2+4\left(-x^3-3x+m\right)\ \forall x\in(-1;2)$$

Đặt $t=-x^3-3x+m$. Với $x\in(-1;2)$ có $t'=-3x^2-3<0\ \forall x\in(-1;2)\Rightarrow t\in(m-14;m+4)$

Xét bất phương trình (1) $f'(t)\ge -2t^2+4t \quad (1)$

Đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t^2+4t$ trên cùng hệ trục tọa độ:



Để (1) luôn đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ t\ge 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ t\le 1\end{cases} \\ \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ t\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+4\le 1 \\ m-14\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ m\ge 16\end{array}\right.$.

Do $m\in[-20;20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.

Câu 3: **Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ có $f'(x)=3x^2-6mx-3(m+2)$

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3) \\ \begin{cases} f(x)\le 0 \\ f'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0)\ge 0 \\ 3x^2-6mx+3(m+2)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3) \\ \begin{cases} f(0)\le 0 \\ 3x^2-6mx+3(m+2)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m-2\ge 0\\ m\le \dfrac{x^2-2}{2x+1},\forall x\in(0;3)\end{cases}\\ \begin{cases}-m-2\le 0\\ m\ge \dfrac{x^2-2}{2x+1},\forall x\in(0;3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le -2\\ m\le -2\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge -2\\ m\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 1\end{array}\right.. \text{ Vì } m\in[-2021;2021]\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2021\le m\le -2\\ 1\le m\le 2021\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 4041 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 4: Chọn B

Ta đặt: $y=g(x)=f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$.

$\Rightarrow g'(x)=6f'(2x-1)-12x^2+30x-18=6\left[f'(2x-1)-2x^2+5x-3\right]$.

Có $f'(2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=1\\ 2x-1=2\\ 2x-1=3\\ 2x-1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}\\ x=2\\ x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0		?	$-$		?		?		?	

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 5: Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+3)f'(x^2+3x-4)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi

$(2x+3)f'(x^2+3x-4)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+3x-4)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-4)^2(x^2+3x)\left[(x^2+3x-4)^2+2m(x^2+3x-4)+9\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)(1)$

Đặt $t=x^2+3x-4\ (t>0)$ do $x\in(1;+\infty)$

$(1)\Rightarrow t^2(t+4)(t^2+2mt+9)\ge 0,\forall t>0\Leftrightarrow t^2+2mt+9\ge 0,\forall t>0$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{9}{t}\right),\forall t>0\Leftrightarrow m\ge -3$

Do m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 6: Chọn D

Ta có $h(x)=g\left[f(x)\right]\Rightarrow h'(x)=g'\left[f(x)\right].f'(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g'\left[f(x)\right]=0\\ f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3f^2(x)+10f(x)-2020=0(vn)\\ -4x^3-\left(4-m^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x^3=\frac{m^2-4}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}\le 2\Leftrightarrow -6\le m\le 6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 7: Chọn C

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-f'(1-x)\Rightarrow f'(1-x)=-g'(x)$.

Suy ra $f'(1-x)=-(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m++6\right]$

$$\Leftrightarrow f'(1-x)=-\left[2+(1-x)\right]^{2021}\left[3-(1-x)\right]^{2020}\left[(1-x)^2-m(1-x)-2m+5\right]$$

Vậy $f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-m.x-2m+5\right)$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-m.x-2m+5\right)\le 0\quad\forall x\in(0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2-mx-2m+5\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\le\frac{x^2+5}{x+2}\ \forall x\in(0;+\infty).(*)$$

Xét $h(x)=\frac{x^2+5}{x+2}=x-2+\frac{9}{x+2}$, $x\in(0;+\infty)$

$$\Rightarrow h'(x)=1-\frac{9}{(x+2)^2}\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{9}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=3\\ x+2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-5\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$(*)\Leftrightarrow m\le 2$, mà m nguyên dương suy ra $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 8: Chọn C

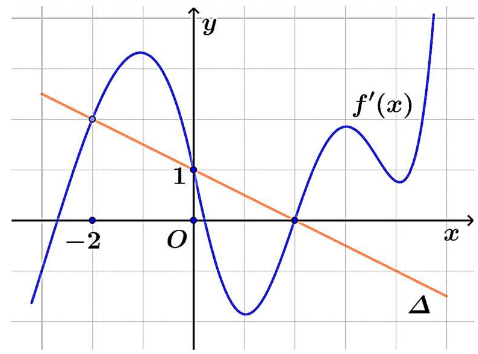
Xét hàm số: $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021\Rightarrow g'(x)=4.f'(x)+2x-4=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right)\right]$

Để hàm số nghịch biến thì: $g'(x)=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)\right]\le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)$

Trên hệ trục ta nhận thấy đường thẳng $\Delta: y=-\dfrac{x}{2}+1$ đi qua ba điểm $(-2;2),(0;1),(2;0)$.

Để $f'(x)\le\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)$ thì đồ thị hàm số $\left(y=f'(x)\right)$ phải nằm dưới đường thẳng Δ.

Tương ứng với miền $\left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ 0\le x\le 2\end{array}\right.$.



Câu 9: Chọn C

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4\end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+4=0 \\ f'\left(x^2+4x+7\right)=0\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+4x+7=3 \\ x^2+4x+7=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ (x+2)^2=0 \\ x=-1 \\ x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-3\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 10: Chọn D

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Suy ra $f\left(x\right)\le\frac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$

Mặt khác: $g'\left(x\right)=-2f'\left(3-x\right)f\left(3-x\right)+f'\left(3-x\right)=-f'\left(3-x\right)\left(2f\left(3-x\right)-1\right)$

Ta có $g'\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow\ -f'\left(3-x\right)\left(2f\left(3-x\right)-1\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow f'\left(3-x\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x>3\\-3<3-x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2<x<6\end{array}\right.$$

Do đó hàm số g đồng biến trên khoảng $\left(2;6\right)$.

Câu 11: Chọn B

Đặt $u=x^3-3x-1\Rightarrow g\left(x\right)=f\left(u\right)=f\left(x^3-3x-1\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x-1\right)$

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\x^3-3x-1=-1\\x^3-3x-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\x=0\\x=\pm\sqrt{3}\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
u'		+	|	+	0	−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$f'(u)$		+	0	−	0	−	0	+	0	+	0	−	0	+	
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right),\left(0;1\right),\left(\sqrt{3};2\right)$.

Vậy giá trị của biểu thức $\left(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)=12$

Câu 12: Chọn C

Cách 1: Tập xác định của hàm số $f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ là $\left[-2;2\right]$

Đạo hàm: $g'\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$

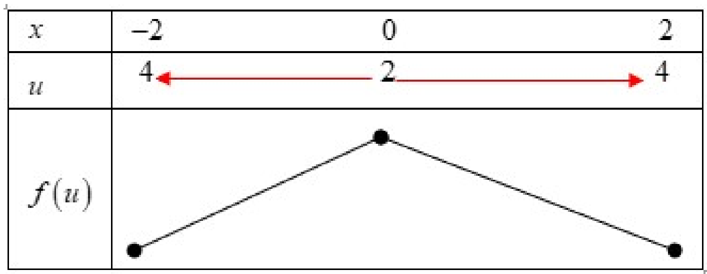
Hàm số đồng biến thì $g'\left(x\right)\ge 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\in\left(0;2\right)\\f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\ge 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\in\left(-2;0\right)\\f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\in\left(0;2\right)\\\left[\begin{array}{l}-3\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\4-\sqrt{4-x^2}\ge 4\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\in\left(-2;0\right)\\\left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 4\\4-\sqrt{4-x^2}\le -3\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\in\left(0;2\right)\\\left[\begin{array}{l}4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\VN\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\in\left(-2;0\right)\\\left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\\VN\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\in\left(0;2\right)\\\sqrt{4-x^2}\ge 3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\in\left(-2;0\right)\\\sqrt{4-x^2}\le 3\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (0;2) \\ VN \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;0) \\ \forall x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-2;0).$$

Cách 2: Sử dụng pp ghép trục: $g(x) = f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right) = f(u), u = 4-\sqrt{4-x^2}$, với $x \in [-2;2]$

Bảng biến thiên kép



Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 13: Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x) = f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D = [-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x) = \dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}} f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x) \le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-1;3) \\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;7) \\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-1;3) \\ -1 \le -1+\sqrt{7+6x-x^2} \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;7) \\ \left[\begin{array}{l} -1+\sqrt{7+6x-x^2} \le -1 \\ -1+\sqrt{7+6x-x^2} \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-1;3) \\ \sqrt{7+6x-x^2} \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;7) \\ \sqrt{7+6x-x^2} \ge 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-1;3) \\ \left[\begin{array}{l} x \le 3-\sqrt{7} \\ x \ge 3+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;7) \\ 3-\sqrt{7} \le x \le 3+\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x \le 3-\sqrt{7} \\ 3 < x \le 3+\sqrt{7} \end{array}\right..$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục

$g(x) = f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right) = f(u)$ với $u = -1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x \in [-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-1		$3-\sqrt{7}$		3		$3+\sqrt{7}$		7
u	-1	←	2	←	3	→	2	→	4
$f(u)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

Câu 14: Chọn A

Xét hàm số: $g(x)=f\left(f(x)\right)\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$

Hàm số đồng biến khi $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\ge 0\\ f'\left[f(x)\right]\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\le 0\\ f'\left[f(x)\right]\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\le -1\\ f(x)\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 3\\ -1\le f(x)\le 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\le -4\\ x\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le\le 3\\ -4\le x\le 5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -4\\ -1\le x\le 3\\ x\ge 5\end{array}\right.$$

Câu 15: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ có biểu thức đạo hàm:

$g'(x)=3x^2.f'\left(x^3+m\right)=3x^2.\left(x^3+m\right)\left(x^3+m-2\right)\left(x^3+m+1\right)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{m+1}$		$-\sqrt[3]{m}$		$-\sqrt[3]{m-2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì ta phải có: $\sqrt[3]{m-2}\le 1\Leftrightarrow m\ge 1\Leftrightarrow m\in\left[1;+\infty\right)$

Câu 16: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)\Rightarrow g'(x)=2(x-1).f'\left(x^2-2x-m\right)$

Với $\forall x\in(1;3)\Rightarrow x-1\ge 0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì:

$g'(x)=2(x-1).f'\left(x^2-2x-m\right)\ge 0\Leftrightarrow f'\left(x^2-2x-m\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-m\ge 3\\ -3\le x^2-2x-m\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le x^2-2x-3\\ x^2-2x-1\le m\le x^2-2x+3\end{array}\right.,\forall x\in(1;3)$$

Suy ra với $\forall x\in(1;3)$ ta có:

$$\left[\begin{array}{l} m\le \min\left(x^2-2x-3\right)\\ \max\left(x^2-2x-1\right)\le m\le \min\left(x^2-2x+3\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\le 4\\ 2\le m\le 2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} -20\le m\le -4\\ m=2\end{array}\right.$$

Do đó có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 17: Chọn C

Ta có: $g'(x)=3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x-m\right)$. Với $\forall x\in[-2;-1]\Rightarrow x^2-1\ge 0$

Để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$ thì:

$3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x-m\right)\ge 0,\forall x\in[-2;-1]$

$$\Leftrightarrow f'\left(x^3-3x-m\right)\ge 0,\forall x\in[-2;-1]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3-3x-m\le -3,\forall x\in[-2;-1]\\ 1\le x^3-3x-m\le 3,\forall x\in[-2;-1]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3-3x\le m-3,\forall x\in[-2;-1]\\ \begin{cases} m+1\le x^3-3x\\ m-3\ge x^3-3x\end{cases},\forall x\in[-2;-1]\end{array}\right.\quad(1)$$

Xét hàm số $h(x)=x^3-3x\Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\notin[-2;-1]\\ x=-1\in[-2;-1]\end{array}\right.$

Ta có: $h(-2)=-2$ và $h(-1)=2\Rightarrow \max\limits_{[-2;-1]}h(x)=2$ và $\min\limits_{[-2;-1]}h(x)=-2$

$$\text{Từ }(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \max\limits_{[-2;-1]}h(x)\le m-3\\ \begin{cases} m+1\le \min\limits_{[-2;-1]}h(x)\\ m+3\ge \max\limits_{[-2;-1]}h(x)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2\le m-3\\ \begin{cases} m+1\le -2\\ m+3\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\ge 5\\ \begin{cases} m\le -3\\ m\ge -1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 5.$$

Mà $m\in[-30;30]\Rightarrow 5\le m\le 30$, do đó có 26 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Chọn A

Đặt $u=\sqrt{x^2-2x+2}$. Xét trên $(-\infty;1)$ thì $u\in(1;+\infty)$

Để $(-\infty;1)$ nằm trong TXĐ của hàm số đã cho thì: $2m-3\ne\sqrt{x^2-2x+2},\forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow 2m-3\le 1\Leftrightarrow m\le 2$

Ta có hàm số $y=\dfrac{u+1}{2m-3-u}\longrightarrow y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot u'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ thì $y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}>0,\ \forall x\in(-\infty;1)$

Suy ra $2m-2<0\Leftrightarrow m<1$

Từ, suy ra $m<1$, mà $m\in[-20;20]$, $m\in\mathbb{Z}\longrightarrow m=\{-20,-19,...,0\}$.

Vậy có 21 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 19: Chọn B

Ta có: $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{b-4a}{(x+b)^2} > 0 \Rightarrow b > 4a(*) \\ g'(x) = \dfrac{a^2-b}{(x+a^2)} > 0 \Rightarrow a^2 > b(**) \end{cases} \Rightarrow a^2 > 4a \Rightarrow a > 4 \Rightarrow a_o = 5$

Từ $(*) \Rightarrow b > 4a_0 = 20 \Rightarrow b_o = 21 \Rightarrow T = 26$.

Câu 20: Chọn D

Ta có $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 6(m^2+m-1)x + 3(m-1)$

Hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$ nên

$f'(x) = 3(m-1)x^2 - 6(m^2+m-1)x + 3(m-1) \le 0 \ \forall x \in (a;b)$

$\Rightarrow (m-1)x^2 - 2(m^2+m-1)x + (m-1) \le 0 \ \forall x \in (a;b)$

$\Rightarrow -2xm^2 + (x^2-2x+1)m - x^2 + 2x - 1 \le 0 \ \forall x \in (a;b)$

$\Rightarrow 2xm^2 - (x^2-2x+1)m + x^2 - 2x + 1 \ge 0 \ \forall x \in (a;b)$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \Delta = (x-1)^4 - 8x(x-1)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)^2(x^2-10x+1) \le 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[5-2\sqrt{6}; 5+2\sqrt{6}\right]$

$\Rightarrow (b-a)_{\max} = 5+2\sqrt{6} - (5-2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$

Câu 21: Chọn C

Hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$ suy ra:

$f'(x) = 12m^2x^3 - 24mx^2 + 12x + 12(2m-1) \ge 0 \ \forall x \in [a;b]$

$\Leftrightarrow m^2x^3 - 2mx^2 + x + (2m-1) \ge 0 \ \forall x \in [a;b]$

$\Leftrightarrow m^2x^3 + (2-2x^2)m + x - 1 \ge 0 \ \forall x \in [a;b]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta = (1-x^2)^2 - x^3(x-1) = (x-1)(x^2-x-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $1 \le a \le b \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (2b-a)_{\max} = \sqrt{5}$.

Câu 22: Chọn A

Ta luôn có: $f(x) \le 2 < 3 \to$ phương trình mẫu số $f(x) - 3 = 0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)-3}$ có tập xác đinh là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$

Hàm số nghịch biến thì: $y' = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -2) \\ x \in (1;3) \end{array}\right.$

Câu 23: Chọn C

Tập xác định của hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $D=\{x\in R\,|\,f(x)\neq -m\}$

Để khoảng $(1;4)\subset D\rightarrow$ phương trình $f(x)=-m$ phải không có nghiệm $x\in(1;4)$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}-m\geq 4\\ -m\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -4\\ m\geq 2\end{array}\right.\quad(1)$

Đạo hàm: $y'=g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}$; Để ý rằng trên luôn có $f'(x)>0$

Để hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên thì:

$g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0$ với $\forall x\in(1;4)$

Suy ra: $\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0\Leftrightarrow m-5<0\Leftrightarrow m<5\quad(2)$

Kết hợp (1) và (2) và điều kiện m nguyên $m\in[-20;2021)$.

Ta suy ra: $\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\ 2\leq m<5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\ 2\leq m\leq 4\end{array}\right.$. Có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

Đạo hàm: $y'=2f'(x).f(x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$f(x)$		−	0	+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$f'(x).f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1),(1;2),(3;+\infty)$.

Câu 25: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-6f(x)$.

$g'(x)=2f(x).f'(x)-6f'(x)=2f'(x)\left(f(x)-3\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)-3\right)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\geq 0\\ f(x)-3\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\leq 0\\ f(x)-3\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -3 \\ x \ge 7 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ 1 \le x \le 14 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} -7 \le x \le 1 \\ x \ge 14 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ 7 \le x \le 14 \end{array}\right. \\ -3 \le x \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ 7 \le x \le 14 \\ -3 \le x \le 1 \end{array}\right..$$

Câu 26: Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x-m)$

Để hàm số $g(x) = f(x^3-3x-m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ thì:

$g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (-1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (-1;1) \\ 2(x-1)f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (1;2) \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x^2-2x-m) \ge 0, \forall x \in (-1;1) \\ f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-m \ge 3 \\ -3 \le x^2-2x-m \le 1 \end{array}\right., \forall x \in (-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \le x^2-2x-m \le 3 \\ x^2-2x-m \le -3 \end{array}\right., \ \forall x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x \ge m+3 \\ m-3 \le x^2-2x \le m+1 \end{array}\right., \forall x \in (-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} m+1 \le x^2-2x \le m+3 \\ x^2-2x \le m-3 \end{array}\right., \ \forall x \in (1;2) \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $h(x) = x^2-2x \Rightarrow h'(x) = 2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $\forall x \in (-1;1) \Rightarrow h'(x) = 2x-2 < 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(-1) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 3, \forall x \in (-1;1)$

Với $\forall x \in (1;2) \Rightarrow h'(x) = 2x-2 > 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(2) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 0, \forall x \in (1;2)$

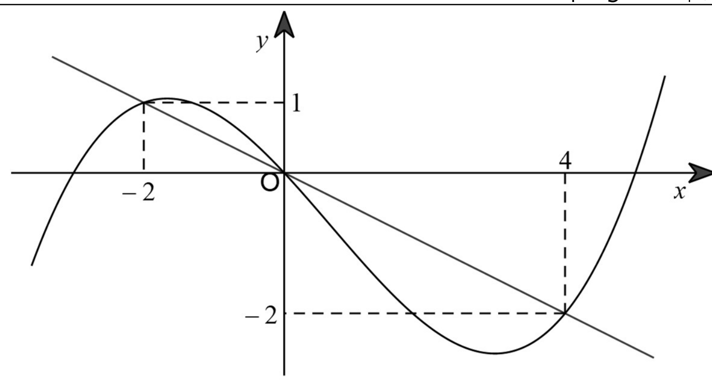
Câu 27: Chọn A

Ta có : $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x \ \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$

Đặt $t = 1-2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$

$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0 \Rightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le t\le 0 \\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge \dfrac{1-2x}{-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le 1-2x\le 0 \\ 4\le 1-2x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2} \\ x\le -\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\subset\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

$$\text{Từ } (2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -1\ge m+3 \\ \left\{\begin{array}{l} m-3\le -1 \\ 3\le m+1\end{array}\right.\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m+1\le -1 \\ 0\le m+3\end{array}\right. \\ 0\le m-3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -4\ge m \\ \left\{\begin{array}{l} m\le 2 \\ 2\le m\end{array}\right.\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\le -2 \\ -3\le m\end{array}\right. \\ 3\le m\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ m=2\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -3\le m\le -2 \\ m\ge 3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Vậy không có giá trị nguyên của $m\in[-30;30]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=\left|x^2-4mx+m-3\right|$ có $f'(x)=2x-4m$

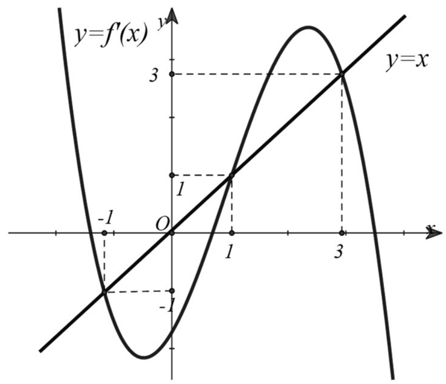
Để hàm số nghịch biến trên $(1;3)$ thì $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(-1)\ge 0 \\ f'(x)=2x-4m\le 0\end{array}\right., \forall x\in(-2;-1) \\ \left\{\begin{array}{l} f(-1)\le 0 \\ f'(x)=2x-4m\ge 0\end{array}\right., \forall x\in(-2;-1)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 5m-2\ge 0 \\ m\ge \dfrac{x}{2}\end{array}\right., \forall x\in(-2;-1) \\ \left\{\begin{array}{l} 5m-2\le 0 \\ m\le \dfrac{x}{2}\end{array}\right., \forall x\in(-2;-1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m\ge \dfrac{2}{5} \\ m\ge -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} m\le \dfrac{2}{5} \\ m\le -1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge \dfrac{2}{5} \\ m\le -1\end{array}\right. \xrightarrow{m\in Z, m\in[-40;40]} \left[\begin{array}{l} 1\le m\le 40 \\ -40\le m\le -1\end{array}\right..$$

Vậy có 80 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 29: Chọn A

Ta có đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm $x = -1;\ x = 1;\ x = 3$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x) > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{array}\right.$ và $f'(x) < x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f\left(1 - x\right) - x^2 + 2x + 2020$.

Ta có $g'(x) = -2f'\left(1 - x\right) + 2(1 - x)$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'\left(1 - x\right) + 2(1 - x) > 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - x\right) < 1 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 1 - x < 1 \\ 1 - x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, khi đó ta có $g(x) = 2f\left(x - 1\right) - x^2 + 2x + 2020$.

$g'(x) = 2f'\left(x - 1\right) - 2(x - 1)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'\left(x - 1\right) - 2(x - 1) > 0 \Leftrightarrow f'\left(x - 1\right) > x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 < -1 \\ 1 < x - 1 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 4 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy hàm số $g(x) = 2f\left(\left|x - 1\right|\right) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 30: Chọn A

Với $x > 1$, ta có $g\left(x\right) = 2f\left(x - 1\right) - \left(x - 1\right)^2 + 2021 \Rightarrow g'\left(x\right) = 2f'\left(x - 1\right) - 2\left(x - 1\right)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'\left(x - 1\right) - 2\left(x - 1\right) > 0 \Leftrightarrow f'\left(x - 1\right) > x - 1 \qquad \left(*\right)$.

Đặt $t = x - 1$, khi đó $\left(*\right) \Leftrightarrow f'\left(t\right) > t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < t < 3 \\ t < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x < 0 \quad (loai) \end{array}\right.$.

Với $x < 1$, ta có $g\left(x\right) = 2f\left(1 - x\right) - \left(1 - x\right)^2 + 2021 \Rightarrow g'\left(x\right) = -2f'\left(1 - x\right) + 2\left(1 - x\right)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'\left(1 - x\right) + 2\left(1 - x\right) > 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - x\right) < 1 - x \qquad \left(**\right)$.

Đặt $t = 1 - x$, khi đó $\left(**\right) \Leftrightarrow f'\left(t\right) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right), \left(0;1\right), \left(2;4\right)$.

Câu 31: Chọn B

Xét hàm số $y=f(2x-1)\Rightarrow\left(f(2x-1)\right)'=2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'(x)<0$

$\Leftrightarrow\left(f(2x-1)\right)'=2.f'(2x-1)<0\Leftrightarrow f'(2x-1)<0\Leftrightarrow 1<2x-1<3\Leftrightarrow 1<x<2$.

Xét hàm số $y=g(ax+b)\Rightarrow\left(g(ax+b)\right)'=a.g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ g'(ax+b)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ g'(ax+b)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \left[\begin{array}{l}ax+b<0\\ ax+b>2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ 0<ax+b<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-b}{a}\\ x>\dfrac{2-b}{a}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ -\dfrac{b-2}{a}<x<-\dfrac{b}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Nếu $a>0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $(1;2)$.

Nếu $a<0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a};\dfrac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên $\begin{cases}-\dfrac{b-2}{a}=1\\ \dfrac{-b}{a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}\Rightarrow 4a+b=-4$.

Câu 32: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x-1\right)$

Đạo hàm hàm hợp $g'(x)=\left(3x^2+3\right).f'\left(x^3+3x-1\right)=3\left(x^2+1\right).f'\left(x^3+3x-1\right)$.

Để hàm số nghịch biến thì $g'(x)=3\left(x^2+1\right).f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0$

$f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0\Leftrightarrow -1\le x^3+3x-1\le 3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+3x\ge 0\\ x^3+3x-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x^2+3\right)\ge 0\\ (x-1)\left(x^2+x+4\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1.$

Câu 33: Chọn C

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 34: Chọn B

Đặt $g(x)=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right| \Rightarrow g(x)=\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}$.

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{\left[4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}}$.

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0, \sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-a\geq 0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\geq a, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\geq a, \forall t\in(0;1)$.

Xét $h(t)=4f(t)+1-2t^2\Rightarrow h'(t)=4f'(t)-4t=4\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $\Leftrightarrow a\leq h(1)=4f(1)+1-2.1^2=3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Câu 35: Chọn D

Đặt $t=1-x\Rightarrow f(t)=f(1-x)\Rightarrow f'(t)=-f'(1-x)$

Ta có $f'(t)=0\Rightarrow f'(1-x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\\ x=3\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-1\\ t=-2\end{array}\right.$

$f'(t)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0\\ 2<x<3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t>1\\ -2<t<-1\end{array}\right.$

BBT của $f(t)$

t	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Mặt khác $g'(x)=2x.f'(x^2-3)$

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ f'(x^2-3)=0\end{array}\right.$

Ta có $f'\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=1 \\ x^2-3=-1 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

$$f'\left(x^2-3\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3>1 \\ -2<x^2-3<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \\ -\sqrt{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$

Câu 36: Chọn C

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét $y=g(x)=f(x^2+2x+m)$

Ta có: $y'=g'(x)=2(x+1)f'(x^2+2x+m)$

Vì $x+1>0 \forall x\in(0;1)$ nên để hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2+2x+m)>0 \forall x\in(0;1)$, do hàm số x^2+2x+m luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên

Đặt $t=x^2+2x+m$. Vì $x\in(0;1)$ nên $t\in(m;m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} m+3\le -2 \\ \begin{cases} m\ge 0 \\ m+3\le 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m=0 \end{array}\right.$

Mà $-10<m<10$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;0\}$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 37: Chọn B

Xét $g'(x)=-2f'\left(3-2x+m\right)+2x-\left(m+3\right)$. Xét phương trình $g'(x)=0$

Đặt $t=3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t)-\dfrac{-t}{2}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \\ t=0 \end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{5+m}{2}, x_2=\dfrac{m+3}{2}, x_3=\dfrac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x>x_1$ thì $t<t_1$ nên $f(x)>0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[x_2;x_1\right]\cup\left(-\infty;x_3\right]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l}\frac{3+m}{2}\le 0<1\le\frac{5+m}{2}\\ 1\le\frac{-1+m}{2}\end{array}\right.$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của m là -3; 3; 4; 5.

Câu 38: Chọn B

Ta có: $y'=9mx^8+6(m^2-3m+2)x^5+4(2m^3-m^2-m)x^3$

$=x^3\left(9mx^5+6(m^2-3m+2)x^2+4(2m^3-m^2-m)\right)$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y'=0$ có nghiệm bội lẻ $x=0$, do đó để $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $9mx^5+6(m^2-3m+2)x^2+4(2m^3-m^2-m)=0$ có nghiệm $x=0$

$$\Rightarrow 2m^3-m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\frac{1}{2}\\ m=0\end{array}\right..$$

Thử lại:

Với $m=0\Rightarrow y'=12x^5$.

Với $m=1\Rightarrow y'=9x^8\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Với $m=-\frac{1}{2}\Rightarrow y'=-\frac{9}{2}x^8+\frac{45}{2}x^5$.

Vậy có 1 giá trị của m.

Câu 39: Chọn B

Ta có: $f(x)=\frac{2}{5}m^2x^5-\frac{8}{3}mx^3-(m^2-m-20)x+1$.

$\Rightarrow f'(x)=2m^2x^4-8mx^2-m^2+m+20$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2m^2x^4-8mx^2-m^2+m+20\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=x^2, t\ge 0$ ta có: $2m^2t^2-8mt-m^2+m+20\ge 0\ (*)$, $\forall t\ge 0$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m=0$: khi đó bpt $(*)$ trở thành $20\ge 0$. Nên $m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases}m\ne 0\\ \Delta=64m^2+8m^4-8m^3-160m^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ m^2-m-12\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ -3\le m\le 4\end{cases}$.

Trường hợp 3: $\begin{cases}m\ne 0\\ \Delta=64m^2+8m^4-8m^3-160m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ m^2-m-12>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<-3\end{array}\right.$.

Khi đó: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2-8mt-m^2+m+20=0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1<t_2\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}S<0\\ P\ge 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{m} < 0 \\ \dfrac{-m^2+m+20}{2m^2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2+m+20 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \le m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m < 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-4 \le m < -3$

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\left[\begin{array}{l} -3 \le m \le 4 \\ -4 \le m < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4 \le m \le 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}.$$

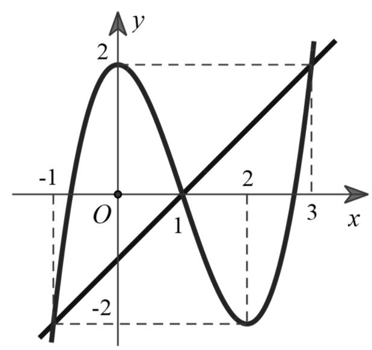
Câu 40: Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$

Đặt $x - m = t \Rightarrow f'(t) = t-1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và và đường thẳng $y = t-1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$

Hay $\left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x-m < 1 \\ x-m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 < x < m+1 \\ x > m+3 \end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ thì $\left[\begin{array}{l} m-1 \le 5 < 6 \le m+1 \\ m+3 \le 5 < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \le m \le 6 \\ m \le 2 \end{array}\right.$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1;2;5;6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1+2+5+6=14$.

Câu 41: Chọn D

Ta có $f'(x)=6.\left[(m+1)x^2+(m^2-5m-4)x-8\sqrt{x+1}-3m^2+6m+19\right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in(-1;+\infty)$

$(m+1)x^2+(m^2-5m-4)x-8\sqrt{x+1}-3m^2+6m+19\ge 0,\forall x\in(-1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\left[x-3\right].\left[(m+1)x+m^2-2m-1-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right]\ge 0\Leftrightarrow(x-3).g(x)\ge 0,\forall x\in(-1;+\infty)$

Với $g(x)=(m+1)x+m^2-2m-1-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}$

Điều kiện cần: $g(3)=0\Leftrightarrow 3(m+1)+m^2-2m-1-2=0\Leftrightarrow m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

Với $m=0$ ta có $f'(x)=(x-3)\left(x-1-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)$

$=(x-3)\left[(x-3)+\left(2-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)\right]=(x-3)\left[(x-3)+\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt{x+1}+2}\right]$

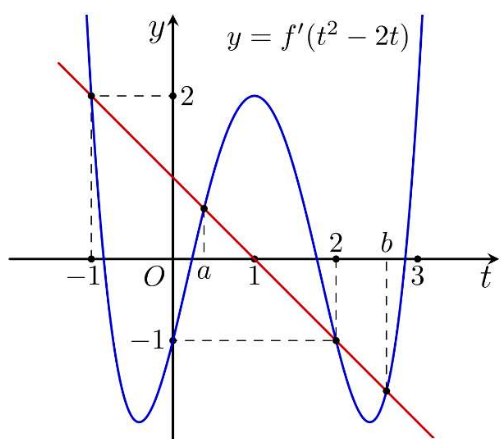
$=(x-3)^2\left[1+\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2}\right]\ge 0,\forall x\in(-1;+\infty)\Rightarrow m=0$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có:

$f'(x)=(x-3)\left(2-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)=(x-3).\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{2(x-3)^2}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2}\ge 0,\forall x\in(-1;+\infty)$

$\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn.

Câu 42: Chọn C



Đặt $t=x+1\Leftrightarrow t-1=x$.

Khi đó $y(t)=f\left(t^2-2t\right)+\dfrac{2}{3}(t-1)^3+1$.

$y'(t)=2(t-1)f'\left(t^2-2t\right)+2(t-1)^2=2(t-1)\left[f'\left(t^2-2t\right)+t-1\right]$

$$y'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ f'(t^2-2t)=1-t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \\ t=a\in(0;1) \\ t=2 \\ t=b\in(2;3) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=a-1\in(-1;0) \\ x=1 \\ x=b-1\in(1;2) \end{array}\right.$$

Với $x=2\Rightarrow t=3$, ta có $\begin{cases} t-1>0 \\ f'(t^2-2t)>0 \end{cases} \Rightarrow y'>0$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$a-1$		0		1		$b-1$	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

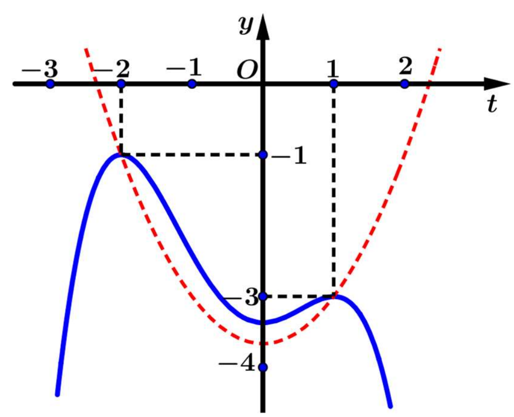
Câu 43: Chọn C

Ta có, $g'(x)=3f'(3x+1)-(18x^2+12x-9)<0$

$\Leftrightarrow f'(3x+1)<6x^2+4x-3=\dfrac{2}{3}(9x^2+6x+1)-\dfrac{11}{3}=\dfrac{2}{3}(3x+1)^2-\dfrac{11}{3}$.

Đặt $t=3x+1$, ta được $f'(t)<\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{11}{3}$.

Vẽ Parabol $(P): y=\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{11}{3}$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty với đồ thị hàm số $y=f'(t)$ như hình vẽ sau.



Ta thấy, $f'(t)<\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{11}{3}$ với mọi $t\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1<-2 \\ 3x+1>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>0 \end{array}\right.$.

Câu 44: Chọn D

Ta có $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x$ có $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

Cho: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ (1)

Đặt $x = 2t+1$, phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(2t+1) = \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(2t+1) = t+1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(2x+1)$ phương trình có các nghiệm:

$$f'(2t+1) = t+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;1)$, $(5;+\infty)$.

Câu 45: Chọn D

Đặt $t = 3-2x \Rightarrow f'(t) = f'(3-2x)$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow t=5 \\ x=0 \Rightarrow t=3 \\ x=2 \Rightarrow t=-1 \end{array}\right.$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(5)$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $g(x) = f(x^2+1)$, ta có $g'(x) = 2xf'(x^2+1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=-1 \\ x^2+1=3 \\ x^2+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(-\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó hàm số $f(x^2+1)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Câu 46: Chọn C

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng:

$g(x)=\left(f(2-x)\right)'=a(x+4)(x-1)(x-4), a>0 \Rightarrow f'(2-x)=-a(x+4)(x-1)(x-4)$

Đặt $t=2-x \Rightarrow f'(t)=a(t-6)(t+2)(t-1)$

Đạo hàm của hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ là

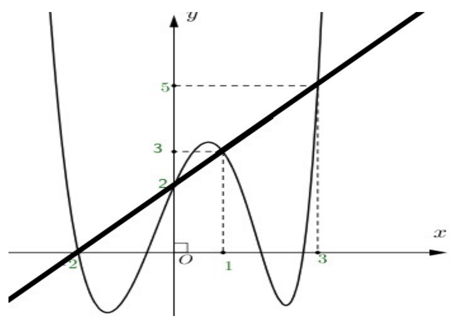
$y'=2xf'\left(x^2+2\right)-3x^2+4x-1=2ax\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)+\left[-3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$2xf'\left(x^2+2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x^2+4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 47: Chọn B



Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2-4\right)-2x^2=2x\left[f'\left(x^2-4\right)-x\right]$. Đặt $t=x-2 \Rightarrow x=t+2$

Suy ra: $g'(t)=2(t+2)\left[f'\left(t^2+4t\right)-t-2\right]$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(t^2+4t\right)=t+2 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l} t<0 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2<0 \\ 1<x-2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ 3<x<5 \end{array}\right.$

Câu 48: Chọn D

Ta có: $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]'=2xf'\left(x^2-4\right)$

Dựa trên đồ thị ta có $g(x)=kx(x-1)(x+1)=kx\left(x^2-1\right)$; $k>0$

Vì vậy, $f'\left(x^2-4\right)=\frac{k}{2}\left(x^2-1\right)$; $k>0$. Đặt $t=x^2-4, t\geq -4$ ta có $f'(t)=\frac{k}{2}(t+3)$; $k>0$

Phương trình đạo hàm: $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-3$. Bảng xét dấu

t	-4		-3		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	

Hàm số $h(x)=f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi:

$h'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)>0, \forall x\in(0;1)$ mà $2x+1>0$, $\forall x\in(0;1)$ nên:

$h'(x)>0$, $\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow f'\left(x^2+x+m\right)>0, \forall x\in(0;1) \Leftrightarrow x^2+x+m>-3$, $\forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow m>-x^2-x-3$, $\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow m\geq \max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3$ vì $\max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3$ tại $x=0$

Kết luận: có 3 giá trị nguyên âm của m thỏa đề là $m=-1;-2;-3$.

Câu 49: Chọn A

Xét $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=2xf'\left(x^2-1\right)$; $y'=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-1\right)=0 \end{array}\right.$.

Có $x=\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội lẻ của $f'\left(x^2-1\right)=0$ và $f'(1)=0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Xét $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$, cho $g'(x)=\left(6x^2-1\right)f'\left(2x^3-x\right)$

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 2x^3-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 50: Chọn C

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-2\right)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ do đó

$f'\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Xét $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+3\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(3x^2-3\right)=0 \\ f'\left(x^3-3x+3\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm1 \\ x^3-3x+3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.