SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA

TRƯỜNG THPT SẦM SƠN

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

KỸ THUẬT NHÂN BIỂU THỨC LIÊN HỢP TRONG GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN DƯỚI DẤU CĂN THỨC

Người thực hiện: Nguyễn Thị Bích Huệ

Chức vụ: Giáo viên

SKKN thuộc môn: Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU..... 1
2. NỘI DUNG..... 3
2.1. Cơ sở lý luận..... 3
2.2. Thực trạng..... 3
2.3. Kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp..... 5
2.3.1. Dùng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp để khử mẫu trong các bài toán chứa căn thức ở mẫu thức..... 5
2.3.2. Dùng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp để phân tích thành bất phương trình tích trong các bài toán về bất phương trình chứa nhiều căn thức..... 6
2.3.3. Kỹ thuật chọn biểu thức nhân liên hợp..... 8
2.3.4. Nhận dạng các bài toán sử dụng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp..12
2.4. Hiệu quả..... 14
3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ 15

1. MỞ ĐẦU

- Lý do chọn đề tài

Mục tiêu của giáo dục trung học phổ thông theo Luật Giáo dục quy định: " Giáo dục trung học phổ thông nhằm giúp học sinh củng cố và phát triển những kết quả của giáo dục trung học cơ sở, hoàn thiện học vấn phổ thông, có những hiểu biết thông thường về kỹ thuật và hướng nghiệp, có điều kiện chọn lựa hướng phát triển và phát huy năng lực cá nhân, tiếp tục học đại học, cao đẳng, trung học chuyên nghiệp, học nghề hoặc đi vào cuộc sống lao động."

Thực hiện mục tiêu chung của giáo dục, chương trình Toán Trung học phổ thông (THPT) tiếp nối chương trình Trung học cơ sở (THCS), cung cấp có hệ thống vốn văn hóa toán học phổ thông tương đối hoàn chỉnh bao gồm kiến thức, kỹ năng, phương pháp tư duy. Chương trình Đại số 10 có nhiệm vụ tổng kết, hệ thống lại những kiến thức đã biết ở bậc THCS (về hàm số, về phương trình, về bất phương trình) tạo cơ sở vững chắc cho việc học tập toàn bộ chương trình Đại số và Giải tích ở các lớp sau.

Trong các chuyên đề trên, bất phương trình là một trong những chuyên đề khó, đặc biệt là bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức (hay *bất phương trình vô tỷ*). Song các bài toán về bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức lại sử dụng rộng rãi trong các kỳ thi, đặc biệt là kỳ thi Trung học phổ thông quốc gia (THPTQG). Mặt khác, trong đề thi THPTQG bài toán này có mức độ vận dụng cao nên học sinh gặp rất nhiều khó khăn khi giải bài toán.

Làm thế nào để học sinh có thể giải tốt hơn, kỹ thuật nào giúp học sinh đơn giản hóa bài toán? Đó là câu hỏi đặt ra đối với bản thân tôi khi giảng dạy học sinh về chuyên đề này. Và một trong các kỹ thuật tôi xin được chia sẻ trong sáng kiến kinh nghiệm này là ***"Kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp trong giải bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức".***

- Mục đích nghiên cứu

Với lý do trên, mục đích của đề tại là nghiên cứu cách giải bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức bằng ***kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp***.

Cách giải một bài toán bất phương trình nói chung là biến đổi tương đương bất phương trình thành những bất phương trình tương đương cho đến khi được bất phương trình đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay được tập nghiệm.

Đối với bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức nói riêng, có hai phương pháp cơ bản là: phương pháp lũy thừa nâng bậc khử căn và phương pháp đặt ẩn phụ đưa bất phương trình ban đầu về một bất phương trình mới đơn giản hơn.

Bên cạnh các phương pháp giải trên, một kỹ thuật biến đổi là ***kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp*** cũng giúp đưa bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức về các bất phương trình đơn giản hơn.

- Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là các phương pháp giải bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức, đặc biệt là kỹ thuật biến đổi ***nhân biểu thức liên hợp***. Ngoài ra một đối tượng nghiên cứu khác chính là các em học sinh của hai lớp 10A3 và 10A6 trường THPT Sầm Sơn.

- Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu chủ yếu là phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết. Ngoài ra còn có phương pháp khảo sát thực tế, thu thập thông tin.

2. NỘI DUNG

2.1. Cở sở lý luận

Nhân liên hợp là một kỹ thuật dùng để trục căn thức ở mẫu trong chương trình đại số 9. Có thể nói đây là một phương pháp quen thuộc đối với các em học sinh lớp 9 và được ứng dụng rộng rãi trong các bài toán tính số vô tỷ cũng như các bài toán rút gọn biểu thức có chứa ẩn dưới dấu căn thức.

Bất phương trình lại là kiến thức trọng tâm của đại số 10. Công cụ cơ bản để giải bất phương trình một ẩn là định lý về dấu nhị thức bậc nhất và định lý về dấu tam thức bậc hai:

ĐỊNH LÝ (về dấu của nhị thức bậc nhất)

Nhị thức bậc nhất $f(x)=ax+b$ *cùng dấu với hệ số a khi* x *lớn hơn nghiệm và trái dấu với hệ số a khi x nhỏ hơn nghiệm của nó.*

ĐỊNH LÝ (về dấu của tam thức bậc hai)

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Nếu $\Delta<0$ *thì* $f(x)$ *cùng dấu với hệ số a với mọi* $x\in R$

Nếu $\Delta=0$ *thì* $f(x)$ *cùng dấu với hệ số a với mọi* $x\neq -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta>0$ *thì* $f(x)$ *có hai nghiệm* x_1 *và* x_2 $(x_1<x_2)$. *Khi đó,* $f(x)$ *trái dấu với hệ số a với mọi* x *nằm trong khoảng* $(x_1;x_2)$ *và* $f(x)$ *cùng dấu với hệ số a với mọi* x *nằm ngoài đoạn* $[x_1;x_2]$.

Có hai bất phương trình cơ bản là bất phương trình bậc nhất và bậc hai. Bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức là một trong những loại bất phương trình quy về bậc nhất, bậc hai. Đối với bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức, cũng có hai bất phương trình cơ bản là: $\sqrt{f(x)}<g(x)$ và $\sqrt{f(x)}>g(x)$ với phương pháp giải là nâng bậc lũy thừa khử căn:

$$1)\ \sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>0\\ f(x)<g^2(x)\end{cases}$$

$$2)\ \sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)<0\end{cases}\right.\left.\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)>g^2(x)\end{cases}\right.$$

Kết hợp kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp vào các bài toán giải bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức cho chúng ta một kỹ thuật biến đổi giúp bất phương trình đơn giản hơn.

2.2. Thực trạng

Vô tỷ là một mảng hay và khá khó với học sinh, ngay từ lớp 9 khi được làm quen với số vô tỷ học sinh đã cảm thấy trừu tượng. Trong quá trình học khi biến đổi các biểu thức có liên quan tới số vô tỷ hay những biểu thức chứa ẩn

dưới dấu căn thức học sinh luôn cảm thấy lúng túng. Lên lớp 10, khi được tiếp cận với phương trình, bất phương trình, hệ phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức học sinh đều cảm thấy khá phức tạp. Nó đòi hỏi học sinh phải nắm rất chắc các kiến thức về phương trình, bất phương trình hay hệ phương trình cũng như các phép biến đổi như khai căn, luỹ thừa...Nó cũng đòi hỏi học sinh phải có sự tổng hợp cũng như sự linh hoạt khi giải các bài toán dạng này.

Đối với các bất phương trình chứa căn thức - đây thực sự có thể xem là loại bất phương trình khó đối với học sinh lớp 10, đặc biệt là đối với các bất phương trình chứa nhiều căn thức hay chứa căn thức dưới mẫu.

Qua thực tế giảng dạy tôi thấy nhận thấy, khi cho học sinh giải các bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức thì ngay cả đối với các bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức dạng cơ bản: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ hay $\sqrt{f(x)} > g(x)$ với một học sinh có lực học trung bình cũng khó có thể hoàn thiện bài toán một cách chặt chẽ. Một số thiếu xót thường gặp như: không có điều kiện cho các biểu thức dưới căn hay khi bình phương khử căn thì thường làm mất tính tương đương giữa các bất phương trình dẫn đến sự thu hẹp hay mở rộng của các tập nghiệm hoặc tính chất phức tạp của bài toán khi phải chuyển từ các bất phương trình chứa căn thức sang các hệ bất phương trình... Đó là chưa kể đối với các bài toán chứa nhiều căn thức hay chứa căn thức ở mẫu. Đối với các dạng bài tập kiểu này thì chỉ có một bộ phận nhỏ học sinh khá giỏi là có thể làm được. Nhưng đây lại là một mảng quan trọng và là dạng toán được lựa chọn trong nhiều cuộc thi như thi THPTQG hay các cuộc thi học sinh giỏi.

Cụ thể, chúng ta cùng xem xét hai ví dụ sau với cách giải biến đổi thông thường:

<u>Ví dụ 1</u>: Giải bất phương trình sau: $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} > 1 (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x+1 \neq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 1+\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} > \sqrt{x-1} \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 1+\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} < \sqrt{x-1} \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x+2\sqrt{x-1} > x+1 \\ x+1 > x-1 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x+2\sqrt{x-1} < x+1 \\ x+1 < x-1 \end{cases} \right.$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} > 1 \Leftrightarrow 4(x-1) > 1 \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty \right)$

<u>Ví dụ 2</u>: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4} (2)$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 5x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty) \\ x \in (-\infty;1] \cup [3;+\infty) \\ x \in (-\infty;1] \cup [4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;1] \cup [4;+\infty)$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ \sqrt{1-x}\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x}\right) \ge 2\sqrt{1-x}\sqrt{4-x} \quad (1) \\ x \ge 4 \\ \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}\right) \ge 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} \quad (2) \end{cases}$

Giải (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{4-x} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x < 1 \\ 5 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 16 - 4x \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x < 1 \\ 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 11 - 2x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x < 1 \\ 4(x^2 - 5x + 6) \ge 121 - 44x + 4x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \ge \frac{107}{24} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Giải (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \ge 2\sqrt{x-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 4x - 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 2x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ 2x - 11 \le 0 \\ 2x - 11 > 0 \\ 4(x^2 - 5x + 6) \ge 121 - 44x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x \le \frac{11}{2} \\ \begin{cases} x > \frac{11}{2} \\ x \ge \frac{107}{24} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 4$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = [4:+\infty) \cup \{1\}$

Chúng ta có thể thấy được tính chất phức tạp của cách giải và rõ ràng với cách giải này không phải học sinh nào cũng làm được, ngay cả đối với bộ phận học sinh khá giỏi thì việc hoàn thiện bài toán theo cách giải này cũng không phải là đơn giản. Đó là chưa kể đối với một số bài toán chúng ta khó có thể biến đổi theo cách thông thường hay đặt ẩn phụ.

Câu hỏi được đặt ra là liệu có kỹ thuật biến đổi nào giúp học sinh giải bài toán bằng cách đơn giản hơn? Và sau đây là một trong những kỹ thuật biến đổi được tôi rút ra trong quá trình giảng dạy của bản thân là: ***Kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp.***

2.3. Kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp

Một xu hướng chung khi giải các bất phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn thức là tìm cách khử căn đưa về các bất phương trình bậc nhất, bậc hai cơ bản. Có thể khử căn bằng cách nâng luỹ thừa hoặc đặt ẩn phụ. Rất hiếm khi học sinh nghĩ đến việc nhân biểu thức liên hợp. ***Kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp*** có tác dụng khử căn thức ở mẫu hay đưa bất phương trình về dạng bất phương trình dạng tích làm cho các bài toán đơn giản hơn học sinh có thể giải được.

2.3.1. Dùng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp để khử mẫu trong các bài toán về bất phương trình chứa căn thức ở mẫu thức

Trong phần thực trạng, chúng ta đã xem xét bài toán với cách giải thông thường và cũng thấy được sự phức tạp của cách giải thông thường đối với bài toán. Bây giờ, chúng ta cùng xem lại ví dụ 1 với cách giải sử dụng ***kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp***.

<u>Ví dụ 1</u>: Giải bất phương trình sau: $\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} > 1 \quad (1)$

Điều kiện: $x \ge 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)} > 1 \quad (\textit{biểu thức nhân liên hợp } \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} > 2$$

$$\Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > 2-x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x < 0 \\ \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2-1 > 4-4x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$

Tương tự nếu sử dụng ***kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp*** để khử căn thức ở mẫu trong ví dụ 1 vào ví dụ sau, chúng ta sẽ được cách giải đơn giản, ngắn ngọn hơn:

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\frac{4x^2}{(\sqrt{2x+1}-1)^2} < 2x+4 \, (3)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{4x^2(\sqrt{2x+1}+1)^2}{(2x+1-1)^2} < 2x+4 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}+1)^2 < 2x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{2x+1} < 2x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} < 2$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < 4 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \setminus \{0\}$

2.3.2. Dùng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp để phân tích thành bất phương trình tích trong các bài toán về bất phương trình chứa nhiều căn thức

Bên cạnh đó, ***kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp*** còn giúp chúng ta biến đổi đưa bất phương trình chứa nhiều căn thức về bất phương trình dạng tích. Kết hợp với tính chất không âm của các biểu thức dưới dấu căn thức, chúng ta được một cách giải hay, độc đáo đối với bất phương trình chứa nhiều căn thức. Chúng ta cùng xem xét lại ví dụ 2 với cách giải này:

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4} \, (2)$

Giải:

Điều kiện: $x \in D = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

+) x = 1 là nghiệm của bất phương trình.

+) $x \neq 1$ bất phương trình

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-5x+4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2-x^2+5x-4}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{x^2-4x+3-x^2+5x-4}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}}\right) \geq 0$$

Do $\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}} > 0$ với $\forall x \in D$

Nên bất phương trình $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Kết hợp điều kiện nghiệm của bất phương trình: $[4;+\infty)$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = [4:+\infty) \cup \{1\}$

So với cách giải thông thường của bài toán mà chúng ta đã đưa ra trong phần thực trạng thì rõ ràng đây là là một cách giải hay, ngắn ngọn và độc đáo. Tương tự chúng ta cùng xem xét ví dụ sau với cách giải như vậy:

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2} < \sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2} \quad (4)$$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ x^2-3x-2 \geq 0 \\ 2x^2+2x+3 \geq 0 \\ x^2-x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3} < \sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-1-2x^2-2x-3}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}} < \frac{x^2-x+2-x^2+3x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}} < \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}\right) > 0$$

Do $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}} > 0$ với $\forall x \in D$

Nên bất phương trình $\Leftrightarrow 2x+4>0 \Leftrightarrow x>-2$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của bất phương trình: $S = (-2;-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty)$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-2;-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty)$

Qua các ví dụ trên, chúng ta có thể thấy được một vấn đề quan trọng trong ***kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp*** là kỹ thuật chọn biểu thức nhân liên hợp. Đối với các bài toán khác nhau, dựa vào đâu để chúng ta tìm ra được biểu thức nhân liên hợp?

2.3.3. Kỹ thuật chọn biểu thức nhân liên hợp

a) Đối với bất phương trình chứa căn thức ở mẫu

Mục đích của kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp là khử căn thức ở mẫu nên biểu thức nhân liên hợp mà chúng ta lựa chọn cũng chính là biểu thức liên hợp của mẫu.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình: $\frac{x+3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}} \le 1$ (5)

Phân tích: Để khử căn thức dưới mẫu thì rõ ràng biểu thức nhân liên hợp trong bài toán này sẽ là: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}$

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ x \ge 2 \\ 2x+1 \ne x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ne -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$

$(5) \Leftrightarrow \frac{(x+3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2})}{2x+1-x+2} \le 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2} \le 1$

$\Leftrightarrow 2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x-2)}+x-2 \le 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+1)(x-2)} \le 2-3x$

$\Leftrightarrow 4(2x^2-3x-2) \le 4-12x+9x^2$

$\Leftrightarrow x^2+12 \ge 0$ (thỏa mãn với mọi x ≥ 2)

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình $S=[2;+\infty)$

Tương tự, chúng ta có thể thấy trong các ví dụ 1, 3 (đã giải) biểu thức nhân liên hợp được chọn là các biểu thức liên hợp của mẫu.

b) Đối với bất phương trình chứa nhiều căn thức

Vì bất phương trình chứa nhiều biểu thức căn thức, nên việc lựa chon biểu thức nhân liên hợp có nhiều khó khăn hơn. Gắn với mục đích của kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp là giúp phân tích bất phương trình về dạng bất phương trình tích, nên chúng ta cần lựa chọn biểu thức nhân liên hợp sao cho sau khi nhân biểu thức này bất phương trình sẽ xuất hiện được nhân tử chung để phân tích thành bất phương trình tích.

Có những bất phương trình chúng ta dễ dàng đoán được biểu thức nhân liên hợp. Ví dụ như bât phương trình sau:

Ví dụ 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2} \ge 1-x$ (6)

Phân tích: Nhìn bất phương trình, chúng ta có thể dự đoán được biểu thức nhân liên hợp là: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}$. Và thật vậy, khi nhân liên hợp biểu thức này chúng ta sẽ được nhân chung khi phân tích bất phương trình là: $(x-1)$

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}$

$(6) \Leftrightarrow \frac{2x+1-x-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} \ge 1-x$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} + x - 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} + 1\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow x - 1 \ge 0$ (do $\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} + 1 > 0$)

$\Leftrightarrow x \ge 1$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = [1;+\infty)$

Tuy nhiên có những bất phương trình không dễ dàng đoán ra được biểu thức nhân liên hợp. Và đối với các bất phương trình này, chúng ta không chỉ nhân một biểu thức liên hợp mà có thể nhân nhiều biểu thức liên hợp.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình: $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \le (x-1)(x^2-2)$ (7)

Phân tích: Nếu cứ như ví dụ trên, chúng ta lựa chọn biểu thức nhân liên hợp là: $4\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2x+3}$ thì khi nhân vào chúng ta được nhân tử là: $(8x+4)$ nhưng nhân tử này không phải là nhân tử chung của bất phương trình.

Vậy làm thế nào để tìm ra biểu thức nhân liên hợp? Vì mục đích nhân biểu thức liên hợp là tìm ra nhân tử chung để phân tích bất phương trình nên chúng ta có thể nhìn vào phương trình tương ứng nhẩm nghiệm giúp tìm ra nhân tử chung.

Ví dụ đối với bài toán trên, chúng ta xét phương trình tương ứng: $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} = (x-1)(x^2-2)$. Dễ nhận thấy một nghiệm của phương trình là $x = 3$ nên nhân tử chung khi phân tích bất phương trình thành bất phương trình tích là: $(x-3)$, do vậy ta sẽ biến đổi bất phương trình thành:

$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x+1}-2) + 2(\sqrt{2x+3}-3) \le x^3 - x^2 - 2x - 12$

và các biểu thức nhân liên hợp sẽ là: $\sqrt{x+1}+2$ và $\sqrt{2x+3}+3$

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ge -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -1$

$(7) \Leftrightarrow 4(\sqrt{x+1}-2) + 2(\sqrt{2x+3}-3) \le x^3 - x^2 - 2x - 12$

$\Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3} \le (x-3)(x^2+2x+4)$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} - (x^2+2x+4)\right) \le 0$ (*)

Ta có với $x \ge -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \ge 0 \\ \sqrt{2x+3} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+3}+1} \le 3$

Mà: $x^2+2x+4 = (x+1)^2 + 3 \ge 3 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} - (x^2+2x+4) \le 0$

nên (*) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x - 3 \ge 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x \ge 3 \end{bmatrix}$

Kết luận: Tập tập nghiệm của bất phương trình: $S = [3;+\infty) \cup \{1\}$

Tương tự trong ví dụ sau:

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\geq 2(x+1)$ (8)

Phân tích: Chúng ta xét phương trình tương ứng:

$$(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}=2(x+1)$$

Dễ nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình, nên nhân tử chung khi phân tích bất phương trình là: $(x+1)$ do vậy chúng ta sẽ biến đổi bất phương trình thành: $-(x+1)\sqrt{x^2-2x+5}-2x(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5})\geq 2(x+1)$ và biểu thức nhân liên hợp là: $2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}$

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+1\geq 0 \\ x^2-2x+5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x\in R$

$$(8)\Leftrightarrow -(x+1)\sqrt{x^2-2x+5}-2x(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5})\geq 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow -(x+1)\sqrt{x^2-2x+5}-2x\left(\frac{4x^2+4-x^2+2x-5}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\geq 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow -(x+1)\sqrt{x^2-2x+5}-2x\left(\frac{(x+1)(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\geq 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-2x+5}+6x^2-4x+5}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\leq 0$$

Do $\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-2x+5}+6x^2-4x+5}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}>0$ với $\forall x\in R$

nên bất phương trình $\Leftrightarrow x+1\leq 0\Leftrightarrow x\leq -1$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S=(-\infty;-1]$

Tuy vậy, có những bài toán phương trình tương ứng lại không có nghiệm nguyên để nhẩm:

Ví dụ 9: Giải bất phương trình: $2x^2+\sqrt{x+2}+5\leq\sqrt{2}(\sqrt{x+2}+x)\sqrt{x^2-x+3}+x$ (9)

(Đề khảo sát chất lượng lớp 12 THPT năm học 2015- 2016 – tỉnh Thanh Hóa)

Phân tích: Vậy thì đối với bài toán này, chúng ta sẽ giải quyết như thế nào? Trước tiên chúng ta xem xét các biểu thức căn thức: $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{2}(\sqrt{x+2}+x)\sqrt{x^2-x+3}$

Chúng ta cần biến đổi để bất phương trình gọn hơn:

$$(9)\Leftrightarrow 2x^2-2x+5\leq(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt{2x^2-2x+6}-1)$$

Từ đây chúng ta thấy có hai biểu thức liên hợp là: $\sqrt{x+2}-x$ và $\sqrt{2x^2-2x+6}+1$ nhưng để khi nhân có thể tạo ra nhân tử chung thì biểu thức liên hợp mà chúng ta lựa chọn sẽ là: $\sqrt{2x^2-2x+6}+1$. Khi đó chúng ta sẽ được nhân tử chung là $2x^2-2x+5$

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x^2-x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2$

$$(9)\Leftrightarrow 2x^2-2x+5\leq(\sqrt{x+2}+x)\sqrt{2x^2-2x+6}-x-\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+5\leq(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt{2x^2-2x+6}-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 5 \le \left(\sqrt{x+2} + x\right)\left(\frac{2x^2 - 2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 2x + 6} + 1}\right) \text{ (do: } 2x^2 - 2x + 5 > 0\ \forall x \in R\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{\sqrt{x+2} + x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 6} + 1} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x + 6} + 1 \le \sqrt{x+2} + x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)^2 + 2(x+2)} \le \sqrt{x+2} + x - 1 \quad (1)$$

Ta có: $\left(\sqrt{x+2} + x - 1\right)^2 \le 2(x-1)^2 + 2(x+2) \Rightarrow \sqrt{x+2} + x - 1 \le \sqrt{2(x+1)^2 + 2(x+2)}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{x+2} + x - 1 = \sqrt{2(x+1)^2 + 2(x+2)} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x + 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$.

Tương tự chúng ta cùng xem xét ví dụ sau:

<u>Ví dụ 10</u>: Giải bất phương trình:

$$2x^2 - 4x + 6 + 2\sqrt{x+1} \le \left(\sqrt{x+1} + x\right)\sqrt{2x^2 - 6x + 10} \quad (10)$$

(Đề thi thử THPTQG lần 2 năm học 2015- 2016, Trường THPT Quỳnh Lưu 3)

Phân tích: Trước tiên chúng ta cũng biến đổi một chút để bất phương trình gọn hơn: $(10) \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 6 \le \left(\sqrt{x+1} + x\right)\left(\sqrt{2x^2 - 6x + 10} - 2\right)$

Từ đây chúng ta có thể thấy được biểu thức nhân liên hợp được chọn là: $\sqrt{2x^2 - 6x + 10} + 2$. Khi đó nhân tử chung trong phân tích sẽ là: $(2x^2 - 6x + 6)$

Cách giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 - 6x + 10 \ge 0 \\ x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -1$

$$(10) \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 6 \le \left(\sqrt{x+1} + x\right)\left(\sqrt{2x^2 - 6x + 10} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 6 \le \left(\sqrt{x+1} + x\right)\left(\frac{2x^2 - 6x + 6}{\sqrt{2x^2 - 6x + 10} + 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 6x + 6)\left(1 - \frac{\sqrt{x+1} + x}{\sqrt{2x^2 - 6x + 10} + 2}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{x+1} + x}{\sqrt{2x^2 - 6x + 10} + 2} \le 0 \text{ (do } 2x^2 - 6x + 6 > 0\ \forall x \in R\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 10} + 2 \le \sqrt{x+1} + x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x-2)^2 + 2(x+1)} \le \sqrt{x+1} + x - 2 (*)$$

Ta có: $\left(\sqrt{x+1} + x - 2\right)^2 \le 2(x-2)^2 + 2(x+1) \Rightarrow \sqrt{x+1} + x - 2 \le \sqrt{2(x-2)^2 + 2(x+1)}$

Nên: $x - 2 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-2)^2 = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$

<u>Kết luận</u>: Vậy nghiệm của bất phương trình: $S = \left\{\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

2.3.4. Nhận dạng các bài toán sử dụng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp

Qua mười ví dụ phân tích ở trên, chúng ta có thể nhận dạng các bài toán sử dụng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp. Đó là các bài toán về bất phương trình chứa căn thức dưới mẫu như ví dụ 1, 3, 5:

<u>Ví dụ 1</u>: Giải bất phương trình sau: $\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} > 1$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\frac{4x^2}{(\sqrt{2x+1}-1)^2} < 2x+4$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình: $\frac{x+3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}} \le 1$

Hay các bài toán về bất phương trình chứa nhiều căn thức như ví dụ 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2} < \sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$$

Ví dụ 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2} \ge 1-x$

Ví dụ 7: Giải bất phương trình: $4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x+3} \le (x-1)(x^2-2)$

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1} \ge 2(x+1)$

Ví dụ 9: Giải bất phương trình: $2x^2+\sqrt{x+2}+5 \le \sqrt{2}(\sqrt{x+2}+x)\sqrt{x^2-x+3}+x$

Ví dụ 10: Giải bất phương trình: $2x^2-4x+6+2\sqrt{x+1} \le (\sqrt{x+1}+x)\sqrt{2x^2-6x+10}$

Đối với các bất phương trình này, chúng ta nhận thấy khó có thể giải theo hai cách thông thường là nâng bậc lũy thừa khử căn hay đặt ẩn phụ. Vì nếu nâng bậc lũy thừa khử căn thì bất phương trình thu được có bậc quá cao hoặc đặt ẩn phụ thì không tìm ra ẩn. Do đó chúng ta có thể xem xét, áp dụng kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp.

Bài tập củng cố:

Bài 1: Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

Bài 2: Giải bất phương trình: $\frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})} < x+21$

Bài 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2} \le \frac{x+3}{5}$

Bài 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x} \ge x$

Bài 5: Giải bất phương trình: $3(2+\sqrt{x-2}) < 2x+\sqrt{x+6}$

Bài 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1} \ge x-1$

Bài 7: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{x^2-6x+8} \ge 2\sqrt{x^2-8x+12}$

Bài 8: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3x^2-5x-1} < \sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{x^2-3x+4}$$

Bài 9: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}+x^2-x+2 \le \sqrt{3x-2}$

Bài 10: Giải bất phương trình:

$$(\sqrt{x}+6)\sqrt{x(2x^2+26x+8)}-4 \ge x(2x+3\sqrt{x}+33)$$

(*Đề khảo sát chất lượng lớp 12 năm học 2015 – 2016 Trường THPT Sầm Sơn*)

2.4. Hiệu quả

Sau khi tiến hành giảng dạy tại hai lớp: $10A_3$và $10A_6$, tôi đã đánh giá kết quả bằng một bài kiểm tra – 45 phút như sau:

ĐỀ KIỂM TRA

Bài 1*(4 điểm)*: Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}} > \frac{1}{2}$$

Bài 3*(3 điểm)*: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+1}$$

Bài 3*(3 điểm)*: Giải bất phương trình:

$$(x^2+2)\sqrt{x^2-x+1} \geq x^3+3x^2-5x-2$$

Kết quả thu được là:

Lớp 10A3: (Sĩ số: 48)

Điểm	*Tỷ lệ(%)*
[8 ; 10]	20,83%
[6,5 ; 8)	41,67%
[5 ; 6,5)	29,17%
[0; 5)	8,33%

Lớp 10A6: ***(Sĩ số: 42)***

Điểm	*Tỷ lệ(%)*
[8 ; 10]	14,28%
[6,5 ; 8)	28,57%
[5 ; 6,5)	38,10%
[0; 5)	19,05%

Đây là một kết quả khá khả quan, đáp ứng được tương đối yêu cầu đặt ra trong phần này.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

- Kết luận

Trên đây là một phần của kỹ thuật nhân biểu thức liên hợp trong giải bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức. Tuỳ thuộc vào cách chúng ta sử dụng, kết hợp với một số tính chất đặc trưng của căn thức chúng ta có thể tạo nên những bài toán hay, độc đáo.

Ngoài ra kỹ thuật này không chỉ hạn chế trong cách giải của bất phương trình mà có thể mở rộng ra cả phần phương trình, hệ phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức. Tuy nhiên trong khuôn khổ của đề tài, tôi xin phép được giới hạn trong phần bất phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức.

Đó những ý kiến, kinh nghiệm của tôi trong quá trình dạy học. Với tuổi đời và tuổi nghề còn non trẻ, kinh nghiệm chưa nhiều nên tôi không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được các đồng chí chỉ bảo và chia sẽ kinh nghiệm giúp tôi ngày tiến bộ hơn trong công tác, phát triển hơn trong chuyên môn nghiệp vụ.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

- Kiến nghị

Tôi mong muốn được Sở GDĐT, nhà trường cung cấp cho chúng tôi một số SKKN đã được Sở, nhà trường đánh giá là có chất lượng của những năm học trước để chúng tôi được học hỏi, nghiên cứu, áp dụng vào thực tế giảng dạy nhằm nâng cao chất lượng dạy học.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	*Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2016* Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. **Nguyễn Thị Bích Huệ**

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bộ giáo dục và đào tạo, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên môn Toán 10* NXB Giáo dục.
[2] Bộ giáo dục và đào tạo, *Đại số và giải tích 10 sách giáo viên (nâng cao),* NXB Giáo dục.
[3] Bộ giáo dục và đào tạo, *Đại số và giải tích 10 (nâng cao),* NXB Giáo dục.
[4] Bộ giáo dục và đào tạo, *Hướng dẫn thực hiện Chuẩn kiến thức kỹ năng môn Toán lớp 10,* NXB Giáo dục.
[5] Lê Hồng Đức, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí, *phương pháp giải phương trình, bất phương trình vô tỷ*, NXB Hà Nội.