

**Câu 1. (2,5 điểm)**

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $x, y$  ta có:  $x^5y - xy^5$  chia hết cho 30  
b) Giải phương trình :  $x^2 + y^2 + z^2 = y(x + z)$

**Câu 2. (2,5 điểm)**

- a) Cho  $a + b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất ( $GTNN$ ) của biểu thức  
$$A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a)$$

- b) Cho tam giác có nửa chu vi  $p = \frac{a + b + c}{2}$  với  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh  
Chứng minh 
$$\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

**Câu 3. (1,5 điểm)**

Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô xuất phát từ địa điểm A lần lượt lúc 8 giờ, 9 giờ, 10 giờ với vận tốc theo thứ tự là  $10km/h$ ,  $30km/h$ ,  $50km/h$ . Hỏi đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe máy và xe đạp ?

**Câu 4. (2 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$ ,  $I$  là giao điểm ba đường phân giác. Đường thẳng qua  $I$  vuông góc với  $CI$  cắt  $AC$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\triangle AIM \sim \triangle ABI$   
b)  $\frac{AM}{BN} = \left( \frac{AI}{BI} \right)^2$

**Câu 5. (1,5 điểm)**

Cho hình bình hành ABCD. Điểm E thuộc cạnh BC sao cho  $BE = \frac{1}{3}BC$ , F là trung điểm cạnh CD. Các tia AE và AF lần lượt cắt đường chéo BD tại I và K. Tính diện tích  $\Delta AIK$ , biết diện tích hình bình hành ABCD là  $48cm^2$

### ĐÁP ÁN

#### Câu 1.

$$a) \quad x^5y - xy^5 = xy(x^4 - y^4) = xy(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = xy(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

$$\text{Ta có: } x(x^4 - 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \text{ chia hết cho 2, 3 và 5} \Rightarrow xy(x^4 - 1) \vdots 30$$

$$\text{Cmtt } xy(y^4 - 1) \vdots 30 \Rightarrow x^5y - xy^5 \vdots 30$$

$$b) \quad x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + x^2 + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = y - z = x = z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

#### Câu 2.

$$a) \quad a + b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} + x, b = \frac{1}{2} + y \text{ với } x + y = 0$$

$$\text{Ta có: } A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a) = a^3 + b^3 + ab = a^2 + b^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = \frac{1}{2} + x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow GTNN(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{1}{p - c} + \frac{1}{p - b} \geq \frac{4}{a}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{p - c} + \frac{1}{p - a} \geq \frac{4}{b}; \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq \frac{4}{c}$$

Cộng vế với vế các BĐT cùng chiều:

$$2 \left( \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \right) \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

**Câu 3.**

Gọi thời gian ô tô đi đến vị trí cách đều xe đạp và xe máy là  $x(h)$  ( $x > 0$ )

$\Rightarrow$  Thời gian xe đạp đi là  $x + 2(h)$ ; Thời gian xe máy đi là :  $x + 1(h)$

Quãng đường ô tô đi là  $50x(km)$

Quãng đường xe đạp đi là  $10(x + 2)(km)$

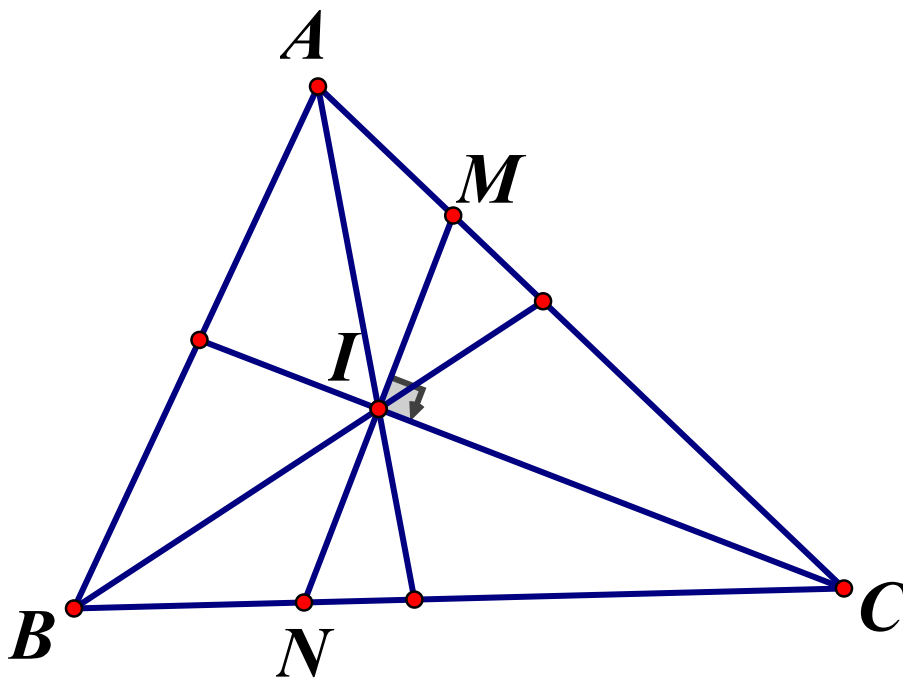
Quãng đường xe máy đi là  $30(x + 1)(km)$

Vì đến 10 giờ thì xe máy đã vượt trước xe đạp nên ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy nên ta có phương trình

$$50x - 10(x + 2) = 30(x + 1) - 50x \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} = 50'(tm)$$

Vậy đến 10 giờ 50 phút thì ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy

**Câu 4.**



a)  $\sphericalangle MAI = \sphericalangle IAB$  (AI là phân giác  $\sphericalangle A$ )

$$\widehat{AIM} + \widehat{IAM} = \widehat{IMC} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \quad (\text{tính chất góc ngoài của tam giác})$$

$$\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \quad (\text{tính chất góc ngoài tam giác})$$

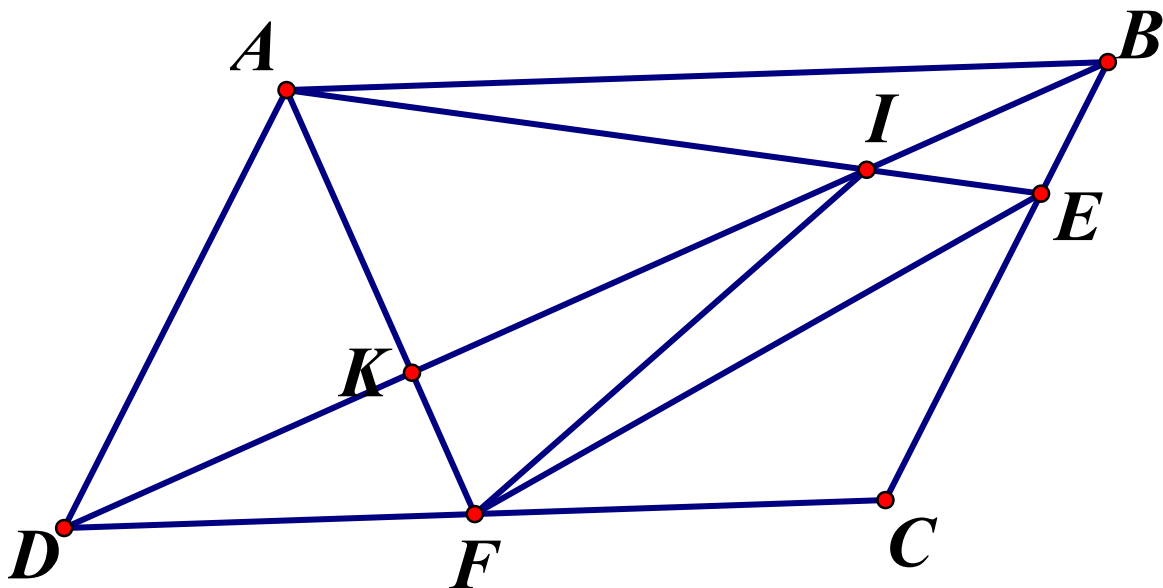
$$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{IAB} \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta ABI \text{ (gg)}$$

b) Chứng minh tương tự có  $\Delta IBN \sim \Delta ABI \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta IBN$

$$\Rightarrow \frac{AM}{IN} = \frac{IM}{BN} = \frac{AI}{BI}$$

$$\text{Có } IM = IN \text{ do } \Delta MCN \text{ cân tại } C \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AM}{IN} \cdot \frac{IM}{BN} = \left(\frac{AI}{BI}\right)^2$$

**Câu 5.**



Ta có :

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - (S_{ABE} + S_{CEF} + S_{ADF}) \\ &= S_{ABCD} - \left( \frac{1}{6}S_{ABCD} + \frac{1}{6}S_{ABCD} + \frac{1}{4}S_{ABCD} \right) = \frac{5}{12}S_{ABCD} = 20(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

$$\text{Nói FI} \Rightarrow \frac{S_{AIK}}{S_{AIF}} \cdot \frac{S_{AFI}}{S_{AFE}} = \frac{AK}{AF} \cdot \frac{AI}{AE} = \frac{AB}{AB+DF} \cdot \frac{AD}{AD+BE}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{AIK}}{S_{AFE}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{AIK} = \frac{1}{2} S_{AFE} = 10(\text{cm}^2)$$