UBND THÀNH PHỐ MÓNG CÁI PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ LỚP 8 THCS NĂM HỌC 2011-2012

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3}\right).\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$

a) Rút gọn M
b) Tìm x nguyên để M có giá trị là số nguyên dương
c) Tìm x để $M \geq -3$

Bài 2. (6,0 điểm)

a) Cho x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$. Tính giá trị của biểu thức $S = x^{2020} + y^{2020}$
b) Giải phương trình: $\frac{x - 2015}{2010} + \frac{x + 2007}{2012} = \frac{x + 2006}{2011} + \frac{x - 2018}{2013}$
c) Tìm x và y thỏa mãn: $y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x + 1)$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ với mọi số dương $a, b, c.$
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 20$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC > AB)$. Vẽ đường cao $AH(H \in BC).$ Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA.$ Qua K kẻ đường thẳng song song với AH, cắt đường thẳng AC tại P.

a) Chứng minh : Tam giác AKC đồng dạng với tam giác BPC
b) Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh tam giác BHQ đồng dạng với tam giác $BPC.$
c) Tia AQ cắt BC tại I. Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $2x^2+8=2(x^2+4)\neq 0;8-4x+2x^2-x^3=(2-x)(x^2+4)\neq 0$ và $x\neq 0$

M xác định $\Leftrightarrow x\neq 2;x\neq 0$

$$M=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{(2-x)(x^2+4)}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$=\frac{(x^2-2x)(2-x)-4x^2}{2(2-x)(x^2+4)}.\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$$

$$=\frac{-x(x^2+4)}{2(2-x)(x^2+4)}.\frac{(x+1)(x-2)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

b) Với $x\neq 2;x\neq 0,M$ có giá trị nguyên dương $\Leftrightarrow M=\dfrac{x+1}{2x}$ có giá trị nguyên dương $\Rightarrow 2M=\dfrac{2x+2}{2x}=1+\dfrac{1}{x}$ nguyên dương

$x\in\mathbb{Z};2M\in\mathbb{Z}\Rightarrow \dfrac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x$ là ước của 1 $\Rightarrow x=\pm 1$ (Thỏa mãn điều kiện)

Thử lại: Với $x=1$ ta có: $M=\dfrac{x+1}{2x}$ có giá trị bằng 1(Thỏa mãn)

Với $x=-1$ ta có: $M=\dfrac{x+1}{2x}$ có giá trị bằng 0 (không thỏa mãn)

Vậy $x=1$

c)

$$M\geq -3\Leftrightarrow x\neq 2;x\neq 0;\frac{x+1}{2x}\geq -3$$

$$\frac{x+1}{2x}\geq -3\Leftrightarrow \frac{x+1}{2x}+3\geq 0\Leftrightarrow \frac{7x+1}{2x}\geq 0$$

Ta có: $\begin{cases} 7x+1 \geq 0 \\ 2x > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 7x+1 \leq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}$. Giải được $x > 0$ hoặc $x \leq \frac{-1}{7}$

Kết hợp với điều kiện ta có: $M \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ hoặc $x \leq \frac{-1}{7}$

Câu 2.

2a) Có $x^{2012} + y^{2012} = \left(x^{2011} + y^{2011}\right)(x+y) - \left(x^{2010} + y^{2010}\right).xy$

Do x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$

Nên $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012} = m > 0$

$m = m(x+y) - mxy \Leftrightarrow 1 = x + y - xy \Leftrightarrow (x-1)(1-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Với $x = 1 \Rightarrow y^{2010} = y^{2011} \Leftrightarrow y = 0$ (loại) hoặc $y = 1$

Với $y = 1 \Rightarrow x^{2010} = x^{2011} \Leftrightarrow x = 0 (ktm)$ hoặc $x = 1$

2b.

$$\frac{x-2015}{2010} + \frac{x+2007}{2012} = \frac{x+2006}{2011} + \frac{x-2018}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2015}{2010} + 1\right) + \left(\frac{x+2007}{2012} - 1\right) = \left(\frac{x+2006}{2011} - 1\right) + \left(\frac{x-2018}{2013} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{2010} + \frac{x-5}{2012} - \frac{x-5}{2011} - \frac{x-5}{2013} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5\left(Do \quad \frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \neq 0\right)$$

2c.

$$y^2+2(x^2+1)=2y(x+1) \Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2(x^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[y^2-2y(x+1)+(x+1)^2\right]+(x^2-2x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (y-x-1)^2+(x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x-1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Câu 3.

3a. Với mọi số dương a,b,c ta có:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c \Leftrightarrow \frac{(bc)^2}{abc}+\frac{(ac)^2}{abc}+\frac{(ab)^2}{abc}\geq a+b+c$$
$$\Leftrightarrow (bc)^2+(ac)^2+(ab)^2\geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$$
$$\Leftrightarrow 2(bc)^2+2(ac)^2+2(ab)^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left[(ac)^2-2a^2bc+(ab)^2\right]+\left[(bc)^2-2b^2ac+(ab)^2\right]+\left[(ac)^2-2c^2ab+(bc)^2\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ac-ab)^2+(bc-ab)^2+(ac-bc)^2\geq 0$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

3b.

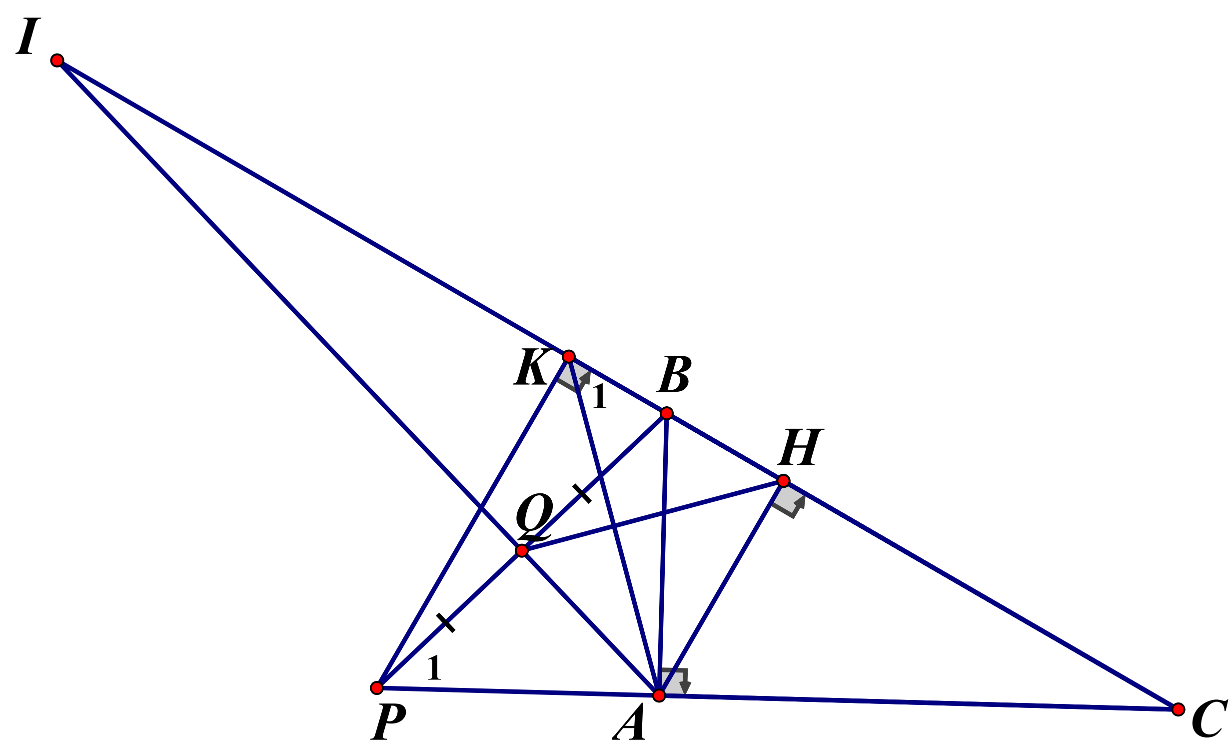
$$L=x^4-4x^3+7x^2-12x+20=x^4-4x^3+4x^2+3x^2-12x+12+8$$
$$=x^2(x^2-4x+4)+3(x^2-4x+4)+8=(x-2)^2(x^2+3)+8$$

Do $(x-2)^2\geq 0(\forall x);(x^2+3)>0(\forall x)\Rightarrow L\geq 8 \quad \forall x$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2.$ Vậy với $x=2$ thì L có giá trị nhỏ nhất.

Giá trị nhỏ nhất của L là 8

Câu 4.



a) $PK//AH \Rightarrow \Delta CKP \sim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{CK}{CP} = \dfrac{CA}{CB}$

Suy ra $\Delta AKC \sim \Delta BPC\left(c.g.c\right) \quad (1)$

b) ΔAKH vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{K_1} = 45^0$. Từ (1) $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{P_1} = 45^0 \Rightarrow$ ΔBAP vuông cân tại A $\Rightarrow BP = AB\sqrt{2}$

Chứng minh $\Delta BHA \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{2BC}$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BP}{2BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BQ}{BC} \quad \left(BP = 2BQ\right)$

ΔBHQ và ΔBPC có: $\dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BQ}{BC}; \widehat{PBC}$ chung $\Rightarrow \Delta BHQ \sim \Delta BPC\left(c.g.c\right)$

c) ΔBAP vuông cân tại A, AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow$ AI là phân giác ngoài của $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{AB}$ (2)

$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{HB}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có:

$$\frac{IC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{IB + BC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1 (dfcm)$$