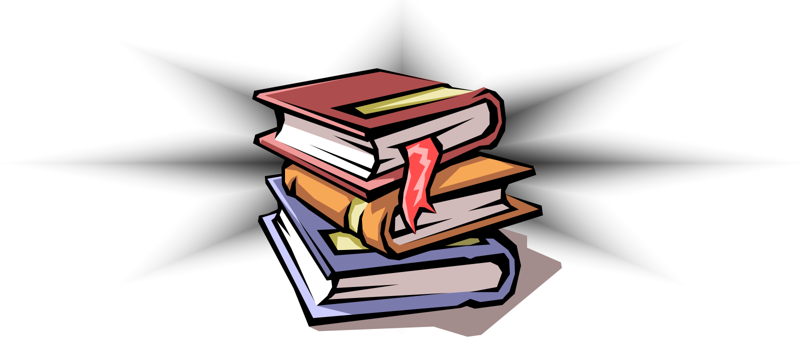
Tailieumontoan.com

Nguyễn Quốc Bảo



PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC 2 CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Thanh Hóa, ngày 16 tháng 7 năm 2020

CHUYÊN ĐỀ : SỬ DỤNG TAM THỨC BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Xét tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c=0\ \left(*\right)\ \ \left(a\ne 0\right)$. Ta có biệt thức

$$\Delta = b^2-4ac.$$

1) Điều kiện có nghiệm của tam thức bậc hai :

- Nếu $\Delta \ge 0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ vô nghiệm.

2) Hệ thức Viet : Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$ thì

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Đặt $S=x_1+x_2, P=x_1.x_2$ thì ta có bất đẳng thức : $S^2\ge 4P.$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+3x-1.$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2+3x-1-A=0$ $\quad(1)$

Để phương trình (1) có nghiệm thì: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 3^2-4\left(-1-A\right)\ge 0\Leftrightarrow 13+4A\ge 0\Leftrightarrow A\ge -\dfrac{13}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi $\Delta=0$ hay $x=-\dfrac{3}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\dfrac{13}{4}$ khi $x=-\dfrac{3}{2}.$

★**Thí dụ 2.** Cho x, y thỏa mãn: $x^2+y^2=x+2$ $\quad(6)$

Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=x+2y.$

Hướng dẫn giải

Ta có $P=x+2y\Rightarrow x=P-2y.$ thay vào (6) ta được:

$$\left(P-2y\right)^2+y^2=\left(P-2y\right)+2 \Leftrightarrow 5y^2+2\left(1-2P\right)+P^2-P-2=0 \qquad (7)$$

Để phương trình (7) có nghiệm thì:

$$\Delta'=\left(1-2P\right)^2-5\left(P^2-P-2\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow P^2-P-11\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\leq P\leq \frac{1+3\sqrt{5}}{2}.$$

Ta có:

+) $P=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}$ khi $y=\dfrac{2a-1}{5}=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}, x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}.$

+) $P=\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}$ khi $y=\dfrac{2a-1}{5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}, x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{5}}{10}.$

Vậy $\min P=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}, \max P=\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}.$

★**Thí dụ 3.** Tìm cặp số (x, y) sao cho y nhỏ nhất thỏa mãn : $x^2+5y^2+2y+4xy-3=0$

(Trích đề chuyên ngoại ngữ, ĐHNN Hà Nội 2004 -2005)

Hướng dẫn giải

Viết lại điều kiện dưới dạng: $x^2+4xy+5y^2+2y-3=0 \qquad (1)$

Vì x, y thỏa mãn (1) nên phương trình (1) có nghiệm x hay

$\Delta_x'\geq 0 \Leftrightarrow 4y^2-\left(5y^2+2y-3\right)\geq 0 \Leftrightarrow y^2+2y-3\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq y\leq 1.$

$y=-3$ khi và chỉ khi $x=-2y=6.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là -3 khi $x=6.$

★**Thí dụ 4.** Tìm số thực *x, y, z* thỏa mãn: $x+y+z=1 \;\; (1)$ và $x^2+2y^2+3z^2=4 \;\; (2)$ sao cho *x* đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Từ (1) suy ra $z=1-x-y$, thay vào biến đổi ta được: $5y^2+6\left(x-1\right)y+4x^2-6x-1=0 \quad (3)$

Để phương trình (3) có nghiệm thì:

$\Delta'=9\left(x-1\right)^2-20x^2+30x+5=-11x^2+12x+14\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-\sqrt{190}}{11}\leq x\leq \dfrac{6+\sqrt{190}}{11}.$

Vì *x* đạt giá trị lớn nhất nên $x=\dfrac{6+\sqrt{190}}{11} \Rightarrow y=\dfrac{15-3\sqrt{190}}{55}, z=\dfrac{10-2\sqrt{190}}{55}.$

★**Thí dụ 5.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=9xy+10yz+11zx$.

Hướng dẫn giải

Thay $z=1-x-y$ vào P ta có: $P=9xy+z(10y+11x)=9xy+(1-x-y)(10y+11x)$ $=-11x^2+(11-12y)x-10y^2+10y$ hay $11x^2+(12y-11)x+10y^2-10y+P=0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là $\Delta\ge 0\Leftrightarrow(12y-11)^2-4.11(10y^2-10y+P)\ge 0$ hay $-296y^2+176y+121-44P\ge 0$ $\Leftrightarrow P\le -\frac{74}{11}\left(-y^2+\frac{22}{37}y-\frac{121}{296}\right)=-\frac{74}{11}\left(y-\frac{11}{27}\right)^2+\frac{495}{148}\le\frac{495}{148}$. Do đó GTLN của P là $\frac{495}{148}$ đạt được khi $x=\frac{25}{74};y=\frac{11}{37};z=\frac{27}{74}$.

★**Thí dụ 6.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, do đó P luôn xác định với mọi x.

$$P=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\Leftrightarrow(P-1)x^2-Px+P-1=0 \qquad (*)$$

- Với $P=1$ thì $x=0$.
- Với $P\ne 1$, ta có: $\Delta=P^2-4(P-1)^2=-3P^2+8P-4$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow P\ge\frac{2}{3}$ (1) hoặc $P\le 2$ (2)

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi $x=-1$.
Dấu bằng ở (2) xảy ra khi $x=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$ khi $x=-1.$, giá trị lớn nhất của P là 2 khi $x=1$.

★**Thí dụ 7.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

Hướng dẫn giải

Với y = 0 thì $P=1$.

Với $y\ne 0$ ta có $P=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}=\frac{a^2-a+1}{a^2+a+1}$ (đặt $\frac{x}{y}=a$)

Ta có $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, do đó P luôn xác định với mọi a.

$$P=\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}\Leftrightarrow Pa^2-Pa+P=a^2+a+1\Leftrightarrow(P-1)a^2-(P+1)x+(P-1)=0 \qquad (*)$$

- Với $P=1$ thì $a=0$.
- Với $P\ne 1$, ta có: $\Delta=(P+1)^2-4(P-1)^2=-3P^2+10P-3$.

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3P^2 - 10P + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (3P-1)(P-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P \leq 3 \ (a \neq 1)$$

Với $P = \frac{1}{3}$ thì $a = 1 \Leftrightarrow x = y \neq 0$

Với $P = 3$ thì $a = -1 \Leftrightarrow x = -y \neq 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$ khi $x = y \neq 0$, giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x = -y \neq 0$

★**Thí dụ 8.** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Hướng dẫn giải

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + y^2 + 2xy + 2y^2}.$$

Nếu y = 0 thì $x^2 = 1$. Suy ra P = 2.

Xét $y \neq 0$. Ta có:

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{y}\right)\right]}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 3} = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3} \quad \left(t = \frac{x}{y}\right)$$

$\Leftrightarrow (P-2)t^2 + 2(P-6)t + 3P = 0 \quad (1).$

Với P = 2, phương trình (1) có nghiệm $t = \frac{3}{4}$.

Với $P \neq 2$, phương trình (1) có nghiệm nghi và chỉ khi

$\Delta' = -2P^2 - 6P + 36 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3.$

$P = 3$ khi $x = \frac{3}{\sqrt{10}}, y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}, y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

$P = -6$ khi $x = \frac{3}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}, y = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, giá trị nhỏ nhất của P là -6.

★**Thí dụ 9.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{3y+1}$ với x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2y^2 + 2y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x^2y^2 - 1}{2}$.

$$P=\frac{2xy}{3\left(-x^2y^2-1\right)+2}=\frac{2xy}{-3x^2y^2-1}\Leftrightarrow 3P.\left(xy\right)^2+2xy+P=0 \qquad (1)$$

- Trường hợp 1: $P=0$ thì $xy=0$.
- Trường hợp 2: $P\neq 0$ ta có (1) là phương trình bậc hai với ẩn là xy, do đó để phương

trình có nghiệm thì: $\Delta=4-12P^2\geq 0\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}\leq P\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{2}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, y=-\frac{2}{3}$.

★**Thí dụ 10.** Tìm a, b để biểu thức biểu thức $P=\frac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị của biểu thức $P=\frac{ax+b}{x^2+1}$, khi đó phương trình sau phải có nghiệm x:

$$m=\frac{ax+b}{x^2+1}\Leftrightarrow mx^2-ax+m-b=0. \qquad (*)$$

Vì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đều khác 0 nên $m\neq 0$. Do đó phương trình (*) là phương trình bậc hai có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0$, hay

$$a^2-4m\left(m-b\right)\geq 0\Leftrightarrow 4m^2-4bm-a^2\leq 0 \qquad (**)$$

Gọi $m_1, m_2\left(m_1<m_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình

$4m^2-4bm-a^2=0. \qquad (***)$

Khi đó (**) có nghiệm là $m_1\leq m\leq m_2$ nên P đạt giá trị nhỏ nhất tại m_1, đạt giá trị lớn nhất tại m_2. Do đó yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (***) có hai nghiệm là -1 và 4, tức là

$$\begin{cases}4+4b-a^2=0\\64-16b-a^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\a^2=16\end{cases}\Leftrightarrow a=\pm 4, b=3.$$

Vậy giá trị cần tìm của a, b là $a=4, b=3$ hoặc $a=-4, b=3$.

★**Thí dụ 11.** Tìm m để giá trị lớn nhất biểu thức biểu thức $y=\frac{2x+m}{x^2+1}$ bằng 2.

Hướng dẫn giải

Gọi a là một giá trị của biểu thức $y=\frac{2x+m}{x^2+1}$, khi đó phương trình sau phải có nghiệm x

$$a=\frac{2x+m}{x^2+1}\Leftrightarrow ax^2-2x+a-m=0 \qquad (*)$$

+) Rõ ràng $a=0$ là một giá trị của biểu thức.

+) Nếu $a \neq 0$ thì (*) là tam thức bậc 2 có nghiệm khi và chỉ khi:

$1-a(a-m) \geq 0 \Leftrightarrow a^2-ma-1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-\sqrt{m^2+4}}{2} \leq a \leq \dfrac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}.$

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức là $\dfrac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$ đạt tại $a=\dfrac{m}{2}$, nên yêu cầu của bài toán trở thành $\dfrac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4}=4-m.$

Do $\sqrt{m^2+4}>0$ nên $4-m>0$. Bình phương hai vế ta được

$m^2+4=\left(4-m^2\right) \Leftrightarrow m^2+4=16-8m+m^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là 2 khi $m=\dfrac{3}{2}$.

★**Thí dụ 12.** Cho phương trình $2x^2+2mx+m^2-2=0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta=m^2-4(m-1)=(m-2)^2 \geq 0$, với mọi m.

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1+x_2=m$ và $x_1x_2=m-1$

Ta có: $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=m^2-2(m-1)=m^2-2m+2$.

Suy ra $A=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}=\dfrac{2m+1}{m^2+2}$.

Gọi a là một giá trị của biểu thức $\dfrac{2m+1}{m^2+2}$, khi đó phương trình sau phải có nghiệm m:

$$a=\frac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow am^2-2m+2a-1=0 \qquad (*)$$

Nếu a = 0 thì $m=-\dfrac{1}{2}$.

Nếu $a \neq 0$ để phương trình (*) có nghiệm thì:

$$\Delta'=(-1)^2-a(2a-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2-a-1 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)(2a+1) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq 1.$$

Nếu $a=-\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{2m+1}{m^2+2}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m^2+4m+4=0 \Leftrightarrow m=-2.$

Nếu $a=1$ thì $\dfrac{2m+1}{m^2+2}=1 \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Vậy GTLN của A bằng 1 khi $m=1$ và GTNN của A bằng $-\dfrac{1}{2}$ khi $m=-2$.

★**Thí dụ 13.** Giả sử phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{18a^2-9ab+b^2}{9a^2-3ab+ac}$

Hướng dẫn giải

Vì phương trình bậc 2 có 2 nghiệm nên $a\neq 0$. Biểu thức Q có dạng đẳng cấp bậc 2 ta chia cả tử và mẫu của Q cho a^2 thì $Q=\dfrac{18-9\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{9-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Vậy : $Q=\dfrac{18-9\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{9-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\dfrac{18+9(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}$

* Ta GTLN của Q: Ta đánh giá $(x_1+x_2)^2$ qua x_1x_2 với điều kiện $x_1,x_2\in[0;3]$.

Giả sử $0\le x_1\le x_2\le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2\le x_1x_2 \\ x_2^2\le 9 \end{cases} \Rightarrow (x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\le 9+3x_1x_2$

$\Rightarrow Q\le \dfrac{18+9(x_1+x_2)+3x_1x_2+9}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$.

Ta cũng có thể đánh giá theo cách:

$0\le x_1;x_2\le 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1(x_1-3)\le 0 \\ x_2(x_2-3)\le 0 \\ (x_1-3)(x_2-3)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {x_1}^2+{x_2}^2\le 3(x_1+x_2) \\ x_1x_2+9\ge 3(x_1+x_2) \end{cases} \Rightarrow {x_1}^2+{x_2}^2\le x_1x_2+9$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2\le 3x_1x_2+9$. Suy ra $Q=\dfrac{18+9(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}\le \dfrac{18+9(x_1+x_2)+9+3x_1x_2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{array}\right.$ hay $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 6 \\ \dfrac{c}{a} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 3 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}$

Ta có $Q - 2 = \dfrac{3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1x_2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$.

Vậy GTLN của Q là 3 và GTNN của Q là 2.

★**Thí dụ 14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 16y + 25$

****Phân tích***: Ta có thể giải bài toán như sau:

$$A = \frac{1}{2}(x + 2y + 5)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 3 \geq 0, \forall x, y \in R$$

Khi đó $\min A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$. Tuy nhiên ta không phải dễ dàng mà phân tích được biểu thức A như trên. Sau đây là một cách giải bài toán dựa vào định lí về dấu tam thức bậc hai và sự tồn tại nghiệm của nó.

Hướng dẫn giải

A là một giá trị của biểu thức $\Leftrightarrow \exists x, y \in R : x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 16y + 25 = A$

$\Leftrightarrow \exists y \in R, pt : x^2 + 2(y + 2)x + 3y^2 + 16y + 25 - A = 0$ có nghiệm x.

$\Leftrightarrow \exists y \in R: \quad \Delta_x' = (y + 2)^2 - 3y^2 - 16y - 25 + A \geq 0$

Khi đó: $A \geq 2y^2 + 12y + 21 = 2(y + 3)^2 + 3 \geq 3$

Vậy $\min A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Cách khác:

$$A = x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x + 16y + 25 = x^2 + 2(y + 2)x + (y + 2)^2 + \left[3y^2 + 16y + 25 - (y + 2)^2\right]$$

$$= (x + y + 2)^2 + (2y^2 + 12y + 21) = (x + y + 2)^2 + 2(y^2 + 6y + 9) + 3$$

$$= (x + y + 2)^2 + 2(y + 3)^2 + 3 \geq 3$$

Khi đó $\min A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

★**Thí dụ 15.** Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy vai trò của a,b,c là như nhau nên ta dự đoán dấu biểu thức P đạt giá trị lớn nhất khi $a=b=c$.

Lại do a và b trong $5a^2+2ab+2b^2$ là không đối xứng nên để khử căn thức chúng ta nghĩ tới việc đánh giá: $5a^2+2ab+2b^2\ge(\alpha a+\beta b)^2$ tức là phải phân tích $5a^2+2ab+2b^2=(\alpha a+\beta b)^2+m(a-b)^2$ $(*)$ để làm được điều này dựa trên phương pháp sử dụng ***tam thức bậc 2*** ta làm như sau:

$$5a^2+2ab+2b^2=5a^2+2ab+2b^2-m(a-b)^2+m(a-b)^2$$
$$=\left[(5-m)a^2+2(1+m)ab+(2-m)b^2\right]+m(a-b)^2$$

Để phân tích được thành dạng (*) ta cần tìm m sao cho phương trình
$(5-m)a^2+2(1+m)ab+(2-m)b^2$ có $\Delta'=0$ tức là
$(1+m)^2-(5-m)(2-m)=0\Leftrightarrow m^2+2m+1-m^2+7m-10=0\Leftrightarrow 9m-9=0\Leftrightarrow m=1.$

Do đó ta có:

$$5a^2+2ab+2b^2=5a^2+2ab+2b^2-(a-b)^2+(a-b)^2$$
$$=(4a^2+4ab+b^2)+(a-b)^2=(2a+b)^2+(a-b)^2\ge(2a+b)^2$$

Do đó: $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{(2a+b)^2+(a-b)^2}}\le\frac{1}{\sqrt{(2a+b)^2}}=\frac{1}{2a+b}$

Làm tương tự ta được: $\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le\frac{1}{2b+c}$; $\quad\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{1}{2c+a}$

Do đó: $P\le\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}$.

Với x, y, z là các số thực dương, ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức:
$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy) ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\sqrt[3]{xyz}.\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=9\Rightarrow\frac{1}{x+y+z}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\qquad(*)$$

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{2a+b}=\frac{1}{a+a+b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{2b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$; $\frac{1}{2c+a}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$

Cộng lại theo vế ta được:

$$P\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{1}{3}\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\max P=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

★**Thí dụ 16.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $B=\frac{2x+y+1}{x^2+y^2+3}$

Hướng dẫn giải

B xác định $\forall x;y\in R$

B là một giá trị của biểu thức $\Leftrightarrow$ tồn tại x,y thỏa mãn $B=\frac{2x+y+1}{x^2+y^2+3}$

$\Leftrightarrow\exists y:Bx^2-2x+By^2-y+3B-1=0$ (2) có nghiệm x

+ Nếu $B=0$ thì (2) thành $-2x-y-1=0$ luôn có nghiệm x, $y\in R, y=-1-2x$

+ Nếu $B\ne0$ (2) có nghiệm x $\Leftrightarrow\exists y:\Delta'=1-B^2y^2+By-3B^2+B\ge0$

$\Leftrightarrow-B^2y^2+By-3B^2+B+1\ge0$

$\Leftrightarrow-B^2\left(y^2-\frac{1}{B}y+\frac{1}{4B^2}\right)-3\left(B^2-\frac{1}{3}B+\frac{1}{36}\right)+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\ge0$

$\Leftrightarrow3\left(B-\frac{1}{6}\right)^2\le\frac{4}{3}-B^2\left(y-\frac{1}{2B}\right)^2\le\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\le B-\frac{1}{6}\le\frac{2}{3}$

$\Rightarrow-\frac{1}{2}\le B\le\frac{5}{6}$

Vậy $\min B=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=-2\end{cases}$; $\max A=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{3}{5}\\x=\frac{6}{5}\end{cases}$

★**Thí dụ 17.** Chứng minh rằng nếu các số a,b,c thỏa mãn: $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=8 \end{cases}$ thì:

$$1 \le a \le \frac{7}{3}; 1 \le b \le \frac{7}{3}; 1 \le c \le \frac{7}{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=8-a(b+c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=8-a(5-a) \end{cases}$

Các số b,c là nghiệm của phương trình: $x^2-(5-a)x+(a^2-5a+8)=0$

Để phương trình có nghiệm ta phải có $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (5-a)^2 - 4(a^2-5a+8) \ge 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 10a + 25 - 4a^2 + 20a - 32 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -3a^2 + 10a - 7 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(7-3a) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \ -1 \le a \le \frac{7}{3}$$

Chứng minh tương tự ta có: $1 \le b \le \frac{7}{3}; 1 \le c \le \frac{7}{3}$.

★**Thí dụ 18.** Biết rằng các số x,y thỏa mãn điều kiện $x+y=2$. Hãy tìm GTNN của $F=x^3+y^3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ S^3-3SP=F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=\dfrac{8-F}{6} \end{cases}$

Vậy x,y là nghiệm của phương trình : $t^2-2t+\dfrac{8-F}{6}=0 \qquad (*)$

x,y tồn tại $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm tức là $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{8-F}{6} \ge 0 \Leftrightarrow F \ge 2$

$\Rightarrow$ Min F $=2 \Leftrightarrow x=y=1$

★**Thí dụ 19.** Cho các số $x,y,z \ne 0$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x+y+z=xyz \\ x^2=yz \end{cases}$

Chứng minh rằng $x^3 \ge 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} x+y+z=xyz \\ x^2=yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=xyz-x=x^3-x \\ yz=x^2 \end{cases}$

Vậy các số y,z là các nghiệm của phương trình: $t^2+(x^3-x)t+x^2=0 \qquad (*)$

Do tồn tại x, y, z thỏa mãn điều kiện đầu bài nên phương trình (*) phải có nghiệm

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - x\right)^2 - 4x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2\left[\left(1-x^2\right)^2 - 4\right] \ge 0 \Leftrightarrow \left(1-x^2\right)^2 \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2 \le -2 \\ 1-x^2 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 \ge 3.$$

★**Thí dụ 20.** Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\left(a \ne 0\right)$ có hai nghiệm khác nhau x_1, x_2. Chứng minh rằng: $x_1x_2 \ge \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$.

Hướng dẫn giải

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \left(a \ne 0\right)$

nên ta có:

$$\begin{cases} a{x_1}^3 + b{x_1}^2 + cx_1 + d = 0 \\ a{x_2}^3 + b{x_2}^2 + cx_2 + d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\left({x_1}^3 - {x_2}^3\right) + b\left({x_1}^2 - {x_2}^2\right) + c\left(x_1 - x_2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x_1 + x_2\right)^2 + b\left(x_1 + x_2\right) + c - ax_1x_2 = 0 \quad \left(do \quad x_1 \ne x_2\right)$$

Dễ thấy $x_1 + x_2$ là nghiệm của phương trình $aX^2 + bX + c - ax_1x_2 = 0$

Để phương trình $aX^2 + bX + c - ax_1x_2 = 0$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4a\left(c - ax_1x_2\right) \ge 0 \Leftrightarrow 4a^2x_1x_2 \ge 4ac - b^2 \Leftrightarrow x_1x_2 \ge \frac{4ac - b^2}{4a^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1) *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = x^2 + 5x - 3$
2) *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất x, y thỏa mãn*
   $9x^2 + 6y^2 - 12xy - 24x + 14y + 12 = 0.$
3) *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $B = x + y$ *với x, y là các số thực thỏa mãn* $3x^2 + y^2 + 2xy + 4 = 7x + 3y.$
4) *Xét các số thực dương x, y thỏa mãn* $x^2y = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*
   $P = x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2.$
5) *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn* $x + y + z = 6$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*
   $M = xy + 2yz + 3zx.$
6) *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $\dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$
7) *Tìm GTLN, GTNN (nếu có) của* $H = 6xy + 8y^2$ *, biết các số x, y thỏa mãn*
   $x^2 + y^2 = 1.$

8) *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:* $A = \dfrac{4xy - 3y^2}{x^2 + y^2}$

9) *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $9x^2 + 6y^2 - 12xy - 24x + 14y + 12 = 0.$

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của x, y.

10) *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện* $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của a.

11) *Tìm m, n để biểu thức* $P = \dfrac{20x^2 + mx + n}{3x^2 + 2x + 1}$ *đạt đượcgiá trị lớn nhất bằng 7, giá trị nhỏ nhất bằng* $\dfrac{5}{2}$.

12) *Cho phương trình bậc hai* $x_2 - 2(m+2)x + 1 + m^2 = 0$, m *là tham số.*

Gọi hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. *Tính giá trị của biểu thức* P *sau theo* m:

$P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$. *Từ đó tìm các giá trị của* m *để* P *đạt giá trị lớn nhất và tìm các giá trị của* m *để* P *đạt giá trị nhỏ nhất.*

13) *Cho các số* a, b, c *thỏa mãn* $a > 0, bc = 4a^2, 2a + b + c = abc$. *Chứng minh rằng* $a \geq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14) *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $(x^2 - y^2 + 2)^2 + 4x^2y^2 + 6x^2 - y^2 = 0$

Hãy tìm tất cả các cặp nghiệm (x ;y) sao cho $A = x^2 + y^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

15) *Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện* $3x^2 + xy + 2y^2 \leq 2.$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + 2xy - y^2$. .

16) *Cho phương trình:* $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 *thoả mãn điều kiện:* $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$.*Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $Q = \dfrac{2a^2 - 3ab + b^2}{2a^2 - ab + ac}$