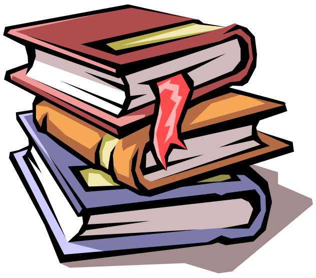
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



TUYỂN TẬP ĐỀ VÀO LỚP 10 CHUYÊN MÔN TOÁN 2020-2021

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) \end{cases}$
2) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$

Câu II. (2 điểm)

1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$
2) Với a,b là những số thực dương thỏa mãn

$2\le 2a+3b\le 5 \qquad ;8a+12b\le 2a^2+3b^2+5ab+10$

Chứng minh rằng: $3a^2+8b^2+10ab\le 21$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M, N thuộc (O) sao cho đường thẳng CM, BN cùng song song với đường thẳng AD

1) Chứng minh rằng $AM=AN$
2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn
3) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN. Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP, AD đồng quy.

Câu IV. (1 điểm)

Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}\ge 4$$

ĐÁP ÁN

Câu I.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \qquad (1) \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) \qquad (2) \end{cases}$

Nếu $x = y$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 3x^2 = 7 \\ 8x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ x = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm), do đó $x \neq y$

Nhân cả hai vế của phương trình (1) với $x - y \neq 0$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2+xy\right) = 7(x-y) \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 7(x-y) \Leftrightarrow 10\left(x^3-y^3\right) = 70(x-y)$$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 9x^3 = xy^2 + 10\left(x^3-y^3\right) \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - 10y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(x^2+2xy+5y^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - 2y = 0 & (3) \\ x^2+2xy+5y^2 = 0 & (4) \end{array}\right.$$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow x = 2y$

Thế vào phương trình (1) ta có: $4y^2 + y^2 + 2y^2 = 7 \Leftrightarrow 7y^2 = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{array}\right.$

$$(4) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2y)^2 + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)^2 + (2y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0(ktm)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \{(2;1);(-2;-1)\}$

2) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x} + 8\sqrt{2x-1} = 24 + 3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$

$$11\sqrt{5-x} + 8\sqrt{2x-1} = 24 + 3\sqrt{(5-x)(2x-1)} \ (*)$$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq 5$

Đặt : $\begin{cases} \sqrt{5-x} = a(a \geq 0) \\ \sqrt{2x-1} = b(b \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - x \\ b^2 = 2x - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2a^2 + b^2 = 2(5-x) + 2x - 1 = 9$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 11a + 8b = 24 + 3ab \ (1) \\ 2a^2 + b^2 = 9 \ \ (2) \end{cases}$

Giải phương trình (1) ta có: $(1) \Leftrightarrow 11a - 3ab = 24 - 8b \Leftrightarrow a(11-3b) = 24 - 8b(*)$

Với $11 - 3b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{11}{3} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 0a = -\dfrac{16}{3}$(vô lý)$\Rightarrow b = \dfrac{11}{3}$ không là nghiệm của phương trình (*)

$\Rightarrow a=\dfrac{24-8b}{11-3b}=\dfrac{8b-24}{3b-11}$, Thay $a=\dfrac{8b-24}{3b-11}$ vào (2) ta được:

$$(2)\Leftrightarrow 2\left(\frac{8b-24}{3b-11}\right)^2+b^2=9$$

$$\Leftrightarrow 2\left(64b^2-384b+576\right)+b^2\left(9b^2-66b+121\right)=9\left(9b^2-66b+121\right)$$

$$\Leftrightarrow 128b^2-768b+1152+9b^4-66b^3+121b^2-81b^2+594b-1089=0$$

$$\Leftrightarrow 9b^4-66b^3+168b^2-174b+63=0\Leftrightarrow 3b^4-22b^3+56b^2-58b+21=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\left(3b^3-19b^2+37b-21\right)=0\Leftrightarrow (b-1)(b-1)(b-3)(3b-7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-1=0 \\ b-3=0 \\ 3b-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=3 \\ b=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1}=1 \\ \sqrt{2x-1}=3 \\ \sqrt{2x-1}=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=9 \\ 2x-1=\dfrac{49}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm) \\ x=5(tm) \\ x=\dfrac{29}{9}(tm) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{29}{9};5\right\}$

Câu II.

1) **Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn:** $x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$

$$x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+20xy+99=9x^2+36xy+36y^2+13x+26y$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2y^2+20xy+100\right)-1=(3x+2y)^2 13(x+2y)(*)$$

Đặt $\begin{cases} x+2y=a(a>0) \\ xy+10=b(b>10) \end{cases}$

$$\Rightarrow (*)\Leftrightarrow b^2-1=9a^2+13a$$

$$\Leftrightarrow 9a^2+2.3a.\frac{13}{6}+\frac{169}{36}-\frac{169}{36}=b^2-1$$

$$\Leftrightarrow \left(3a+\frac{13}{6}\right)^2-b^2=\frac{133}{36}\Leftrightarrow (18a+13)^2-36^2=133$$

$$\Leftrightarrow (18a-6b+13)(18a+6b+13)=133 \qquad (1)$$

Ta lại có : $a,b>0\Rightarrow 18a+6b+13>18a-6b+13>0$

Lại có $133=133.1=19.7$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}18a+6b+13=0\\18a-6b+13=1\end{cases}\\ \begin{cases}18a+6b+13=19\\18a-6b+13=7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}18a+6b=120\\18a-6b=-12\end{cases}\\ \begin{cases}18a+6b=32\\18a-6b=-6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=11\\a=3\end{cases}(tm)\\ \begin{cases}a=\dfrac{19}{6}\\b=-\dfrac{25}{18}\end{cases}(ktm)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+2y=3\\xy+10=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\xy=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\y(3-2y)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\2y^2-3y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\(2y-1)(y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-2y\\ \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}(ktm)\\y=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1(tm)\\y=1(tm)\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

2) Với a,b **là những số thực dương thỏa mãn** $2\le 2a+3b\le 5(1)$;

$8a+12b\le 2a^2+3b^2+5ab+10$. **Chứng minh rằng** $3a^2+8b^2+10ab\le 21(2)$

Giải

$(2)\Leftrightarrow 8a+12b\le(2a+3b)(a+b)+10\le 5(a+b)+10$

$\Leftrightarrow 3a+7b\le 10.$ Mặt khác $2a+3b\le 5$

Dự đoán dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Ta có: $\underbrace{3a^2+8b^2+10ab}_{(I)}=(3a+4b).(a+2b)$

Áp dụng bất đẳng thức $AB\le\dfrac{(A+B)^2}{4}$, ta có:

$$21.(I)=\left[3(3a+4b)\right].\left[7(a+2b)\right]\le\frac{(9a+12b+7a+14b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 21.(I)\le\frac{(16a+26b)^2}{4}=(8a+13b)^2$$

Ta biểu diễn $8a+13b$ theo $3a+7b$ và $2a+3b$ bằng cách đồng nhất hệ số

Xét $8a+13b=x(3a+7b)+y(2a+3b)$

$$\Leftrightarrow 8a+13b=\left(3x+2y\right).a+\left(7x+3y\right).b$$

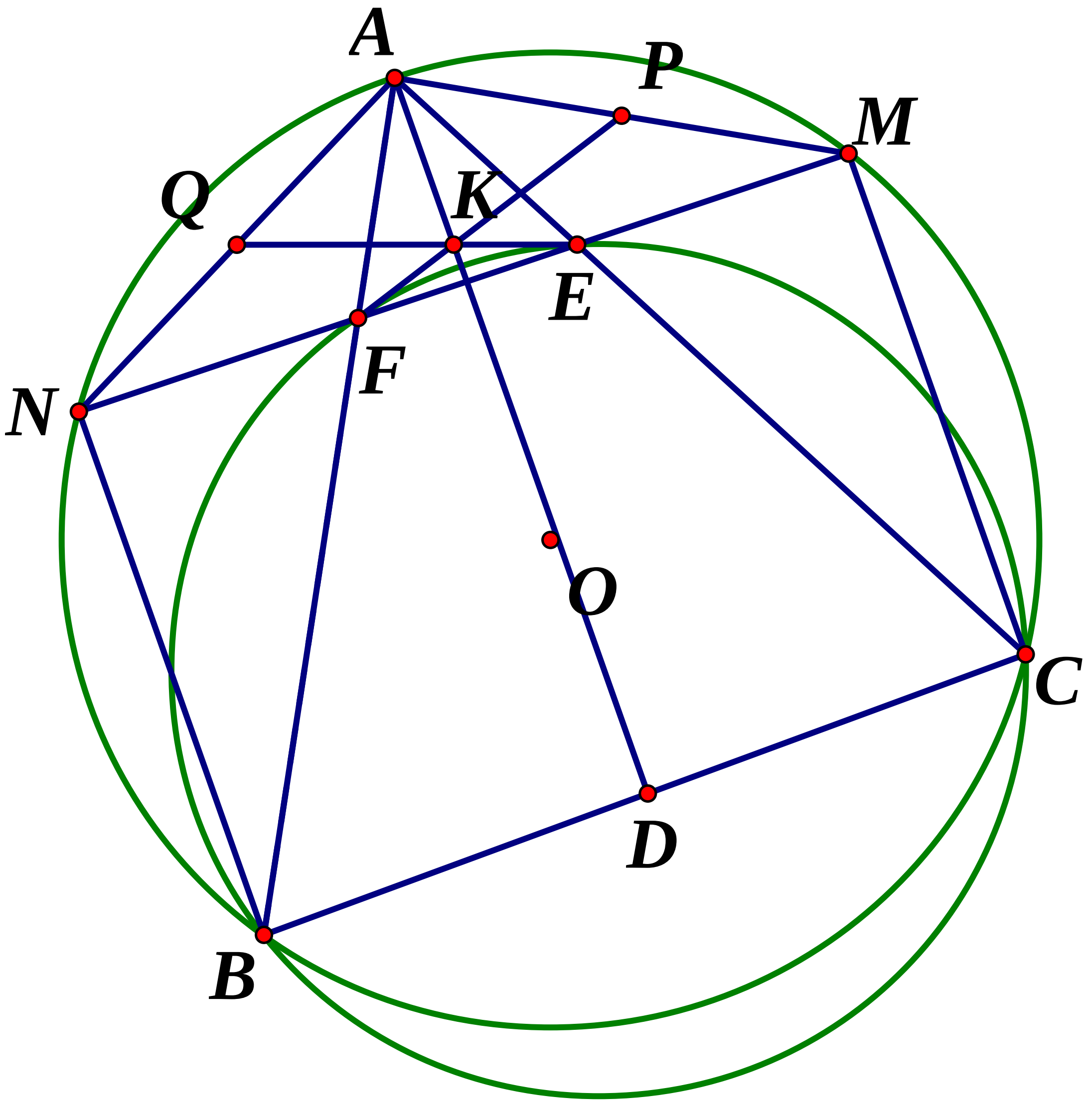
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=8\\ 7x+3y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{17}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 21.\left(I\right)\le\left(8a+13b\right)^2=\left[\frac{2}{5}.\left(3a+7b\right)+\frac{17}{5}.\left(2a+3b\right)\right]^2\le\left(\frac{2}{5}.10+\frac{17}{5}.5\right)^2=21^2$$

$$\Rightarrow \left(I\right)\le 21.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Câu III.



1) **Chứng minh rằng** $AM=AN$

Ta có: $\widehat{NBA}=\widehat{DAB}$ (so le trong do $BN//AD$)

$\widehat{DAB}=\widehat{DAC}(gt);\widehat{DAC}=\widehat{ACM}$ (so le trong do $CM//AD$)

$\Rightarrow \widehat{NBA}=\widehat{MCA}\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AN}=sd\,\overset{\frown}{AM}$ (trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau).

Vậy $AM=AN$ (trong một đường tròn, hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau)

2) Chứng minh rằng 4 điểm B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AEF}=\dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AN}+sd\,\overset{\frown}{CM}\right)$(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$=\dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AM}+sd\,\overset{\frown}{CM}\right)=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn)

Vậy tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau) hay B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh các đường thẳng EQ,FP,AD đồng quy

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHN, cát tuyến EKQ, ta có:

$\dfrac{EN}{EH}.\dfrac{KH}{KA}.\dfrac{QA}{QN}=1\Rightarrow\dfrac{EN}{EH}.\dfrac{KH}{KA}=1$(do Q là trung điểm của $AN(gt)$nên $QA=QN$)

$\Rightarrow\dfrac{EN}{EH}=\dfrac{KA}{KH}(I)$

Gọi $AD\cap PE=\{K'\}$.Ta đi chứng minh $K'\equiv K$

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHM, cát tuyến PKF ta có:

$\dfrac{FM}{FH}.\dfrac{K'H}{K'A}.\dfrac{PA}{PM}=1\Rightarrow\dfrac{FM}{FH}.\dfrac{K'H}{K'A}=1$(Do P là trung điểm của $AM\left(gt\right)$nên $PA=PM$)

$\Rightarrow\dfrac{FM}{FH}=\dfrac{K'A}{K'H}(II)$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{EN}{EH}=\dfrac{FM}{FH}\Leftrightarrow\dfrac{FM}{EN}=\dfrac{FH}{EH}=\dfrac{FM-FH}{EN-EH}=\dfrac{HM}{HN}(*)$(tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Vì $BN//AD//CM$ nên áp dụng định lý Ta – let ta có: $\dfrac{HM}{HN}=\dfrac{DC}{DB}$

Lại có : $\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AB}$(định lý đường phân giác), do đó: $\dfrac{HM}{HN}=\dfrac{AC}{AB}(1)$

Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}(cmt),\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow\Delta AEF\sim\Delta ABC\left(g.g\right)\Rightarrow\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AE}(2)$

Từ (1) và (2)$\Rightarrow\dfrac{HM}{HN}=\dfrac{AF}{AE}\qquad(3)$

Tiếp tục áp dụng định lý đường phân giác trong tam giác AEF ta có: $\frac{AF}{AE}=\frac{HF}{HE}(4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra $\frac{HM}{HN}=\frac{HF}{HE}$, do đó $(*)$ được chứng minh, tức là $\frac{EN}{EH}=\frac{FM}{FH}(III)$

Từ $(I),(II),(III)$ suy ra $\frac{KA}{KH}=\frac{K'A}{K'H}$, do đó $K\equiv K'$

Vậy EQ,FP,AD đồng quy tại K

Câu IV.

Với $a,b,c>0,a+b+c=3$ ta có:

$$P=\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}=\frac{a^2(a+bc)^2}{ab(ab+2c^2)}+\frac{b^2(b+ca)^2}{bc(bc+2a^2)}+\frac{c^2(c+ab)^2}{ca(ca+2b^2)}$$

Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ ta có:

$$P\geq\frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}\Rightarrow P\geq\frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

Đặt $\begin{cases}a+b+c=p\\ab+bc+ca=q\\abc=r\end{cases}$, áp dụng BĐT Schur ta có: $9r\geq p(4q-p^2)$

$$\Rightarrow 9abc\geq 3\left[4(ab+bc+ca)-9\right]\Leftrightarrow 3abc\geq 4(ab+bc+ca)-9$$

Khi đó ta có:

$$P\geq\frac{\left[a^2+b^2+c^2+4(ab+bc+ca)-9\right]^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$P\geq\frac{\left[(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)-9\right]^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$P\geq\frac{\left[3^2+2(ab+bc+ca)-9\right]^2}{(ab+bc+ca)^2}\Rightarrow P\geq\frac{4(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2}=4$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $P\geq 4(dfcm)$

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

CỘNG HÒA XA HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc
ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\frac{8x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ với $x>0;x\neq 4;x\neq 9$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm m sao cho $m\left(\sqrt{x}-3\right).P>x+1$ đúng với mọi giá trị $x>9$

Bài 2. (3,0 điểm)

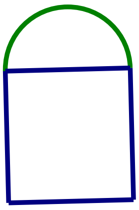
a) Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $\left(d_1\right):y=5x+9$ và $\left(d_2\right):y=\left(m^2-4\right)x+3m$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để hai đường thẳng d_1 và d_2 là song song.

b) Cho phương trình: $x^2-2\left(m-1\right)x+2m-5=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình trên có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn:
$\left(x_1^2-2mx_1+2m-1\right)\left(x_2-2\right)\leq 0$

c) Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài $120km$. Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là $10km$ nên đến B trước ô tô thứ hai là $0,4$ giờ. Tính vận tốc mỗi ô tô, biết rằng vận tốc của mỗi ô tô là không đổi trên cả quãng đường AB.

Bài 3. (1,5 điểm)

Bác An muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng : đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài các khuôn gỗ (các đường in đậm vẽ trong hình bên, bỏ qua độ rộng của khuôn gỗ) là $8m$. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất



Bài 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $\left(O\right)$ và một điểm nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn $\left(O\right)$ (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C và O). Đường thẳng IA cắt $\left(O\right)$ tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE

a) Chứng minh $AB.BE=BD.AE$

b) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK//CD$

c) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Bài 5. (0,5 điểm) Tìm các số thực x,y,z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases}0<x,y,z\le 1\\ \dfrac{x}{1+y+zx}+\dfrac{y}{1+z+xy}+\dfrac{z}{1+x+yz}=\dfrac{3}{x+y+z}\end{cases}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) **Rút gọn biểu thức** P

Với $x>0,x\ne 4,x\ne 9$ ta có:

$$P=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\frac{8x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\frac{8x}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$P=\frac{4\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)+8x}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}:\frac{\sqrt{x}-1-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{8\sqrt{x}-4x+8x}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}$$

$$=\frac{8\sqrt{x}+4x}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{3-\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+2\right).\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right).\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy $P=\dfrac{4x}{\sqrt{x}-3}$.

b) **Tìm** m **sao cho** $m\left(\sqrt{x}-3\right).P>x+1$ **đúng với mọi giá trị** $x>9$

Điều kiện: $x>9$. $\forall x>9,$ Ta có:

$$m\left(\sqrt{x}-3\right).P>x+1\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x}-3\right).\frac{4x}{\sqrt{x}-3}>x+1$$

$$\Leftrightarrow 4mx>x+1\Leftrightarrow \left(4m-1\right)x>1\Leftrightarrow 4m-1>\frac{1}{x}$$

Vì $x>9$ nên $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{9}$

Do đó $4m-1>\dfrac{1}{x},\forall x>9$ thì $4m-1\ge\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow 4m\ge\dfrac{10}{9}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{5}{18}$

Vậy $m\ge\dfrac{5}{18}$

Bài 2.

a) **Tìm các giá trị của** m **để hai đường thẳng** d_1,d_2 **song song**

Ta có hai đường thẳng $(d_1): y = 5x + 9$ và $(d_2): y = (m^2 - 4)x + 3m$ song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 5 \\ 3m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 9 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -3 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Vậy $m = -3$ thì đường thẳng d_1 và d_2 song song.

b) Tìm m để $\left(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1\right)(x_2 - 2) \leq 0$

Xét phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (m-1)^2 - 2m + 5 = m^2 - 2m + 1 - 2m + 5 \\ &= m^2 - 4m + 4 + 2 = (m-2)^2 + 2 > 0 (\forall m) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

Áp dụng hệ thức Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1x_2 = 2m - 5 \end{cases}$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có:

$$x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2x_1 + 2m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 + 2x_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = -2(x_1 - 2)$$

Theo đề bài ta có:

$$\left(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1\right)(x_2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -2(x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 5 - 2(2m - 2) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 1 - 4m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 - 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq -3 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$$

Vậy $m \leq \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán

c) Tính vận tốc mỗi ô tô

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là $x(km/h)(x > 10)$

$\Rightarrow$ Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là $\frac{120}{x}(h)$

Vận tốc của ô tô thứ nhất lớn hơn vận tốc của ô tô thứ hai là $10km/h \Rightarrow$ Vận tốc của ô tô thứ hai là : $x - 10(km/h)$

$\Rightarrow$ Thời gian của ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là : $\frac{120}{x-10}(h)$

Vì ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là $0,4h=\frac{2}{5}h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x-10}-\frac{120}{x}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow 5.120x-5.120.\left(x-10\right)=2x\left(x-10\right)$$

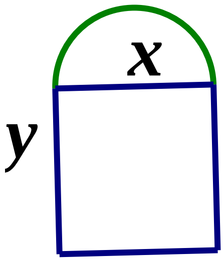
$$\Leftrightarrow 600x-600x+6000=2x^2-20x\Leftrightarrow 2x^2-20x-6000=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x-3000=0\Leftrightarrow x^2-60x+50x-3000=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-60\right)\left(x+50\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-60=0\\x+50=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=60(tm)\\x=-50\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là $60km/h$ và vận tốc của ô tô thứ hai: $60-10=50(km/h)$

Bài 3. Tính độ dài cạnh và diện tích lớn nhất



Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x\left(m\right)\left(0<x<8\right)\Rightarrow$ Bán kính của nửa đường tròn $\frac{x}{2}(m)$

Khi đó cạnh phía trên của hình chữ nhật: $x(m)$

Gọi cạnh còn lại của hình chữ nhật là $y\left(m\right)\left(0<y<8\right)$

Độ dài nửa đường tròn phía trên: $\frac{1}{2}\pi x=\frac{\pi x}{2}\left(m\right)$

Khi đó ta có tổng độ dài các khuôn gỗ: $\frac{\pi x}{2}+x+2y=8\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x+2y=8$

$$\Leftrightarrow 2y=8-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x\Leftrightarrow y=4-\left(\frac{\pi+2}{4}\right)x$$

Diện tích của cửa số: $S=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2+xy=\frac{\pi x^2}{8}+xy$

$$\Leftrightarrow S=\frac{\pi x^2}{8}+x\left[4-\left(\frac{\pi+2}{4}\right)x\right]\Leftrightarrow S=\frac{\pi x^2}{8}+4x-\left(\frac{\pi+2}{4}\right)x^2$$

$$\Leftrightarrow S=-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right)x^2+4x\Leftrightarrow S=-\frac{\pi+4}{8}x^2+4x$$

$$\Leftrightarrow S=-\frac{\pi+4}{8}.\left[x^2-\frac{32}{\pi+4}x\right]\Leftrightarrow S=-\frac{\pi+4}{8}.\left[x^2-2x.\frac{16}{\pi+4}+\left(\frac{16}{\pi+4}\right)^2-\left(\frac{16}{\pi+4}\right)^2\right]$$

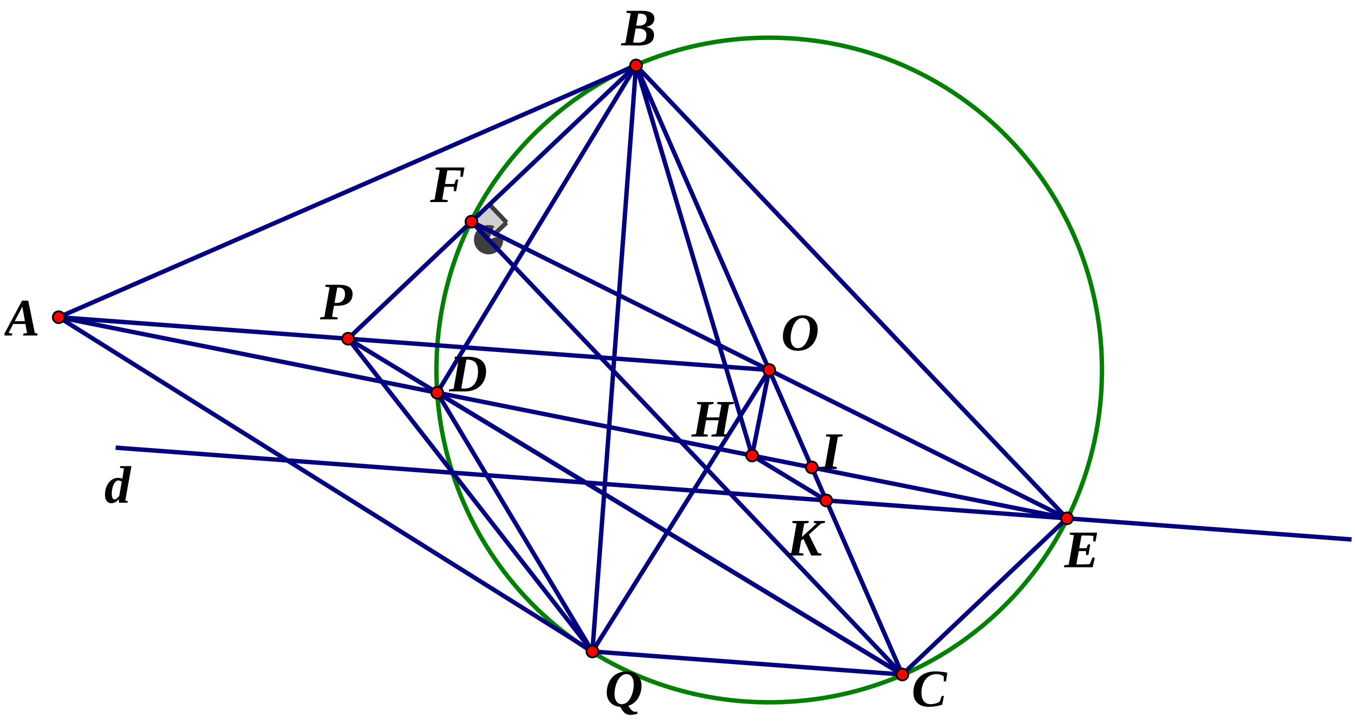
$$\Leftrightarrow S=-\frac{\pi+4}{8}.\left(x-\frac{16}{\pi+4}\right)^2+\frac{32}{\pi+4}\le\frac{32}{\pi+4}$$

Dấu $"="$xảy ra $\Leftrightarrow x-\dfrac{16}{\pi+4}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{\pi+4}(tm)$

$$\Rightarrow y=4-\frac{\pi+2}{4}.\frac{16}{\pi+4}=\frac{4\pi+16-4(\pi+2)}{\pi+4}=\frac{4\pi+16-4\pi-8}{\pi+4}=\frac{8}{\pi+4}(tm)$$

Vậy khi cửa sổ có diện tích lớn nhất thì độ dài cạnh trên của hình chữ nhật là: $\dfrac{16}{\pi+4}m$ và cạnh bên của hình chữ nhật là $\dfrac{8}{\pi+4}(cm)$

Bài 4.



a) **Chứng minh** $AB.BE=BD.AE$

Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{A}$ chung; $\widehat{ABD}=\widehat{AEB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset\frown{BD}$) $\Rightarrow \Delta ABD\sim\Delta AEB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AB.BE=BD.AE(dfcm)$

b) Chứng minh $HK//CD$

Vì H là trung điểm của $DE(gt)$ nên $OH\perp DE$ (tính chất đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{OHD}=90^0\Rightarrow\widehat{OHA}=90^0$

Xét tứ giác $OBAH$ có : $\widehat{OHA}=90^0(cmt);\widehat{OBA}=90^0$ (do AB là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{OHA}+\widehat{OBA}=90^0+90^0=180^0\Rightarrow OBAH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OAH}=\widehat{OBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OH)

Mà $\widehat{OAH}=\widehat{HEK}$ (so le trong do $d//OA$)

$\Rightarrow \widehat{OBH}=\widehat{HKE}=\widehat{HBK}\Rightarrow$ Tứ giác $BEKH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \widehat{HKB}=\widehat{HEB}=\widehat{DEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HB)

Mà $\widehat{DEB}=\widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{BD}$) $\Rightarrow\widehat{HKB}=\widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) $\Rightarrow\widehat{HKB}=\widehat{DCB}\left(=\widehat{DEB}\right)$. Lại có hai góc này ở vị trí đồng vị bằng nhau

$\Rightarrow HK//CD(dfcm)$

c) Chứng minh $BECF$ là hình chữ nhật

Kẻ tiếp tuyến AQ với đường tròn (O) $\quad(Q\neq B)$

Xét tứ giác $OBAQ$ có: $\widehat{OBA}+\widehat{OQA}=90^0+90^0=180^0\Rightarrow OBAQ$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow\widehat{OBQ}=\widehat{OAQ}=\widehat{PAQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OQ)

Lại có: $\widehat{OBQ}=\widehat{CBQ}=\widehat{CDQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CQ)

$\Rightarrow\widehat{PAQ}=\widehat{CDQ}\left(=\widehat{OBQ}\right)\Rightarrow$ Tứ giác $APDQ$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow\widehat{ADP}=\widehat{AQP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AP}$)

Mà $\widehat{ADP}=\widehat{CDE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow\widehat{CDE}=\widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{CE}$)

$\Rightarrow\widehat{AQP}=\widehat{CBE}\qquad(1)$

Xét ΔABP và ΔAQP có: AP chung; $\widehat{BAP}=\widehat{QAP}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); $AB=AQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow\Delta ABP=\Delta AQP(c.g.c)$

$\Rightarrow\widehat{ABP}=\widehat{AQC}\qquad(2)$ (hai góc tương ứng)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CBE}=\widehat{ABP}\left(=\widehat{AQP}\right)$

$\Rightarrow \widehat{CBE}+\widehat{CBF}=\widehat{ABP}+\widehat{CBF}\Rightarrow \widehat{EBF}=\widehat{ABC}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{EBF}$ là góc nội tiếp chắn nửa đườn tròn (O) nên EF là đường kính của (O)

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF

Xét tứ giác $BECF$ có hai đường chéo BC, EF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

$\Rightarrow BECF$ là hình bình hành. Lại có: $\widehat{EBF}=90^0(cmt)$ nên $BECF$ là hình chữ nhật $(dfcm)$

Bài 5.

Ta có: $\begin{cases} x\le 1\Rightarrow x^2\le 1 \\ xy\le y \end{cases}$

$\Rightarrow x^2+xy\le 1+y\Rightarrow x^2+xy+zx\le 1+y+zx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+xy+xz}\ge \dfrac{1}{1+y+zx}\Rightarrow \dfrac{1}{1+y+xz}\le \dfrac{1}{x(x+y+z)}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{1+y+xz}\le \dfrac{1}{x+y+z}$

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{y}{1+z+xy}\le \dfrac{1}{x+y+z}$; $\dfrac{z}{1+x+yz}\le \dfrac{1}{x+y+z}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức ta được :

$$\frac{x}{1+y+xz}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}\le \frac{3}{x+y+z}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy có duy nhất 1 cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán $(x;y;z)=(1;1;1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
Năm học 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN (không chuyên)
Thời gian làm bài 120 phút, không kể giao đề

Câu 1. (1,0 điểm) Cho ba biểu thức $M=\frac{x\sqrt{x}-8}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}, N=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3-\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{(x-4)(3x+1)}$ và $P=\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $M=x-4$

b) Trong trường hợp các biểu thức M, N và P xác định, rút gọn biểu thức $Q=MN+P$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình $\left(x^4+4x^2-5\right)\left(\frac{x-3+\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}-1}\right)=0$

b) Cho hai số thực m,n thỏa mãn hai đường thẳng $(d): y=mx+n$ và $(d_1): y=x+3m+2n-mn$ cắt nhau tại điểm $I(3;9)$. Tính giá trị của mn và $\frac{m}{n}$

c) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi bằng $28(cm)$ và nội tiếp đường tròn (C) có bán kính $R=5(cm)$. Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$

Câu 3. (2,0 điểm) Gọi $(P),(d)$ lần lượt là các đồ thị của hàm số $y=x^2$ và $y=2mx+3$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tai hai điểm phân biệt $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ với mọi số thực m. Tính y_1+y_2 theo m

b) Tìm tất cả các số thực m sao cho $y_1-4y_2=x_1-4x_2+3x_1x_2$

Câu 4. (1,0 điểm) Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 4 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 120% lượng gạo đã nhập vào kho ngày trước đó. Sau đó, từ ngày thứ năm kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\frac{1}{10}$ lượng gạo kho ở ngày trước đó. Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau :

a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 91 tấn gạo

b) Tổng số gạo đã xuất trong các ngày thứ năm và thứ sáu là $50,996$ tấn gạo,

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm O, có $AB=AC$, và $\widehat{BAC}>90^0$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tia MO cắt đường tròn (T) tại điểm D. Đường thẳng BC lần lượt cắt các đường thẳng AO và AD tại các điểm N,P

a) Chứng minh rằng tứ giác $OCMN$ nội tiếp và $\widehat{BDC}=4.\widehat{ODC}$

b) Tia phân giác của $\widehat{BDP}$ cắt đường thẳng BC tại điểm E. Đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại điểm F. Chứng minh rằng $CA=CP$ và $ME\perp DB$

c) Chứng minh rằng tam giác MNE cân. Tính tỉ số $\frac{DE}{DF}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Tìm x khi $M=x-4$

Xét biểu thức $M=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ (ĐKXĐ: $x\geq 0$)

Ta có:

$$M=\frac{x\sqrt{x}-8}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-2^3}{3+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{3+x+2\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{x+2\sqrt{x}+4}=\sqrt{x}-2$$

Khi đó $M=x-4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=x-4=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-2=0\\ \sqrt{x}+1=0(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4(tm)$$

Vậy $x=4$ thì $M=x-4$

b) Tính $Q=M.N+P$

ĐKXĐ: $\begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 4\end{cases}$

Ta có: $M=\sqrt{x}-2,P=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

$$N=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3-\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{(x-4)(3x+1)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1\right)\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)^2\right]}{(x-4)(3x+1)}$$

$$=\frac{2\left(x+2\sqrt{x}+1+x-1+x-2\sqrt{x}+1\right)}{(x-4)(3x+1)}=\frac{2(3x+1)}{(x-4)(3x+1)}=\frac{2}{x-4}$$

$$\Rightarrow Q=M.N+P=\left(\sqrt{x}-2\right).\frac{2}{x-4}+\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=1$$

Vậy $Q=1$

Câu 2.

a) Giải phương trình $\left(x^4+4x^2-5\right)\left(\dfrac{x-3+\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}-1}\right)=0$

ĐKXĐ: $\begin{cases}3+x\ge 0\\ \sqrt{x}\ge 0\\ \sqrt{x}-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$. Ta có:

$$\left(x^4+4x^2-5\right)\left(\dfrac{x-3+\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}-1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^4+4x^2-5=0 & (1)\\ x-3+\sqrt{3+x}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $(1): x^4+4x^2-5=0$

Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành:

$$t^2+4t-5=0\Leftrightarrow t^2-t+5t-5=0\Leftrightarrow t(t-1)+5(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)(t+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1(tm)\\ t=-5(ktm)\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1(tm)$$

Xét phương trình (2): $x-3+\sqrt{3+x}=0\Leftrightarrow\sqrt{3+x}=3-x$ với $x\ge 0, x\ne 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0\\ 3+x=(3-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ 3+x=x^2-6x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^2-7x+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x^2-x-6x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x(x-1)-6(x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ (x-6)(x-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=6(ktm)\\ x=1(tm)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết hợp với điều kiện xác định $\Rightarrow x=1$ không thỏa mãn.

Vậy $S=\{\pm 1\}$

b) Hai đường thẳng $d: y=mx+m$ **và** $d_1: y=x+3m+2n-mn$ **cắt nhau tại điểm** $I(3;9)$. **Tính** $m.n$ **và** $\dfrac{m}{n}$

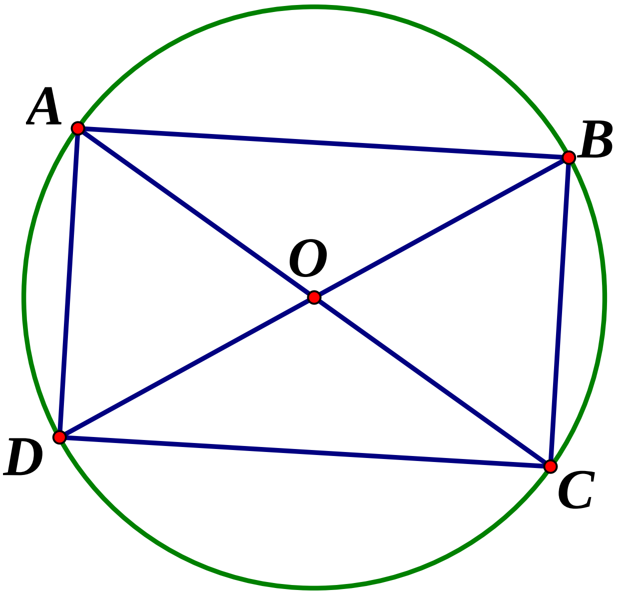
Vì $d\cap d_1=\{I\}$ nên $\begin{cases}I\in d\\ I\in d_1\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9=3m+m \\ 9=3+3m+2n-mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9=4m \\ 6=3m+2n-mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{9}{4} \\ 6=3.\dfrac{9}{4}+2n-\dfrac{3}{4}n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{9}{4} \\ \dfrac{5}{4}n=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{9}{4} \\ n=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $m.n=\dfrac{9}{4}.\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{-27}{20}$ và $\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{4}:\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{9}{4}.\left(\dfrac{-5}{3}\right)=-\dfrac{15}{4}$

c) **Hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi bằng $28(cm)$ và nội tiếp đường tròn (C) có bán kính $R=5(cm)$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$**



Theo bài ra ta có: Hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi bằng $28(cm)$ nên có nửa chu vi bằng $14(cm)$. Đặt $AB=x(cm)$.(ĐK: $0<x<14$) $\Rightarrow CD=14-x(cm)$

Gọi $O=AC\cap BD$, Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn có bán kính $R=5(cm)$

$\Rightarrow OA=5(cm)\Rightarrow AC=2OA=10(cm)$

Áp dụng định lý $Pytago$ trong tam giác vuông ABC ta có:

$AB^2+BC^2=AC^2 \Rightarrow x^2+(14-x)^2=10^2 \Leftrightarrow x^2+x^2-28x+196=100$

$\Leftrightarrow 2x^2-28x+98=0 \Leftrightarrow x^2-14x+48=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x-8x+48=0 \Leftrightarrow x(x-6)-8(x-6)=0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-6=0 \\ x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=8 \end{array}\right.(TM)$

Với $x=6 \Rightarrow AB=6(cm), BC=8(cm) \Rightarrow$ Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$S=6.8=48(cm^2)$

Với $x=8 \Rightarrow AB=8(cm), BC=6(cm) \Rightarrow S_{ABCD}=8.6=48(cm^2)$

Vậy diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $48cm^2$

Câu 3.

Gọi $(P),(d)$ lần lượt là đồ thị của các hàm số $y=x^2$ và $y=2mx+3$

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ và tính y_1+y_2 theo m

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) ta có:

$x^2=2mx+3 \Leftrightarrow x^2-2mx-3=0(*)$

Phương trình $(*)$ có $\Delta'=m^2+3>0(\forall m) \Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi m

Hay với mọi m thì đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$

Ta có $A,B\in(d)$ nên: $\begin{cases} y_1=2mx_1+3 \\ y_2=2mx_2+3 \end{cases}$

Áp dụng hệ thức Viet vào phương trình $(*)$ ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-3 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$y_1+y_2=2mx_1+3+2mx_2+3=2m(x_1+x_2)+6$

$=2m.2m+6=4m^2+6$

Vậy $y_1+y_2=4m^2+6$

b) Tìm m sao cho $y_1-4y_2=x_1-4x_2+3x_1x_2$

Với mọi m thì đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;2mx_1+3)$ và $B(x_2;2mx_2+3)$. Áp dụng hệ thức $Vi-et$ ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m & (1) \\ x_1x_2=-3 & (2) \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$y_1-4y_2=x_1-4x_2+3x_1x_2 \Leftrightarrow 2mx_1+3-4\left(2mx_2+3\right)=x_1-4x_2+3.(-3)$

$\Leftrightarrow 2mx_1+3-8mx_2-12=x_1-4x_2-9 \Leftrightarrow 2mx_1-x_1-8mx_2+4x_2=0$

$$\Leftrightarrow \left(2m-1\right)\left(x_1-4x_2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-1=0\\ x_1-4x_2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\ x_1=4x_2\end{array}\right.$$

Với $x_1=4x_2$, thay vào $\left(2\right)$ ta có: $4x_2^2=-3 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 4.

a) Ngày thứ ba nhập xong thì có trong kho 91 tấn gạo

Gọi lượng gạo trong kho hàng nhập ngày thứ nhất là x (tấn) (ĐK: $x>0$)

Lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ hai là : $x.120\%=1,2x$ (tấn)

Lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ ba là : $1,2x.120\%=1,44x$ (tấn)

Sau ngày thứ ba, lượng gạo có trong kho là : $x+1,2x+1,44x=3,64x$ (tấn)

Vì ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 91 tấn nên ta có phương trình:

$3,64x=91 \Leftrightarrow x=\dfrac{91}{3,64}=25$ (tấn) (thỏa mãn)

Vậy nếu ngày thứ 3, sau khi nhập xong, trong kho có 91 tấn gạo thì lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất là 25 tấn.

b) Tổng số gạo đã xuất trong các ngày thứ 5, thứ 6 là $50,966$ tấn

Lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ tư là $1,44x.120\%=1,728x$ (tấn)

Sau ngày thứ tư, lượng gạo có trong kho là : $x+1,2x+1,44x+1,728x=5,368x$ (tấn)

Từ ngày thứ 5 kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\dfrac{1}{10}$ lượng gạo trong kho ở ngày trước đó nên:

Số gạo xuất trong ngày thứ 5 là : $\dfrac{1}{10}.5,368x=0,5368x$ (tấn)

Số gạo còn lại sau ngày thứ 5 là : $5,368x-0,5368x=4,8312x$ (tấn)

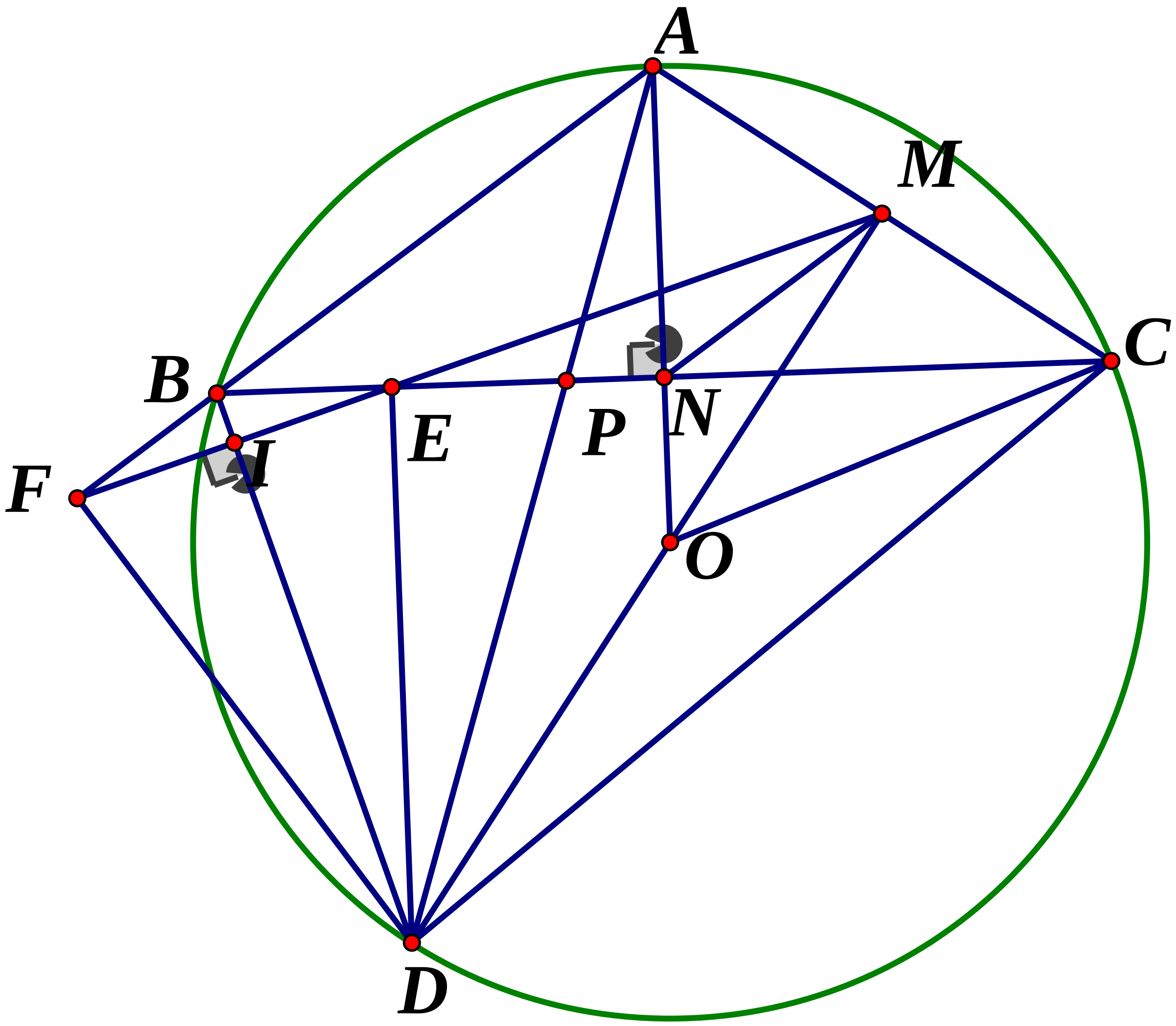
Số gạo xuất trong ngày thứ 6 là : $\dfrac{1}{10}.4,8312x=0.48312x$ (tấn)

Vì tổng số gạo đã xuất trong các ngày thứ 5, thứ 6 là $50,996$ tấn nên ta có phương trình:

$0,5368x+0,48312x=50,966 \Leftrightarrow 1,01992x=50,966 \Leftrightarrow x=50(tm)$

Vậy nếu tổng số gạo đã xuất trong các ngày thứ 5, thứ 6 là $50,996$ tấn thì lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất là 50 tấn.

Câu 5.



a) **Chứng minh $OCMN$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{BDC}=4\widehat{ODC}$**

*) Ta có : $AB=AC(gt)\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

$OB=OC$ (cùng bằng bán kính)$\Rightarrow O$ thuộc trung trực của BC

Khi đó ta có OA là trung trực của $BC\Rightarrow OA\perp BC\Rightarrow \widehat{ONC}=90^0$

Vì M là trung điểm của AC (gt) nên $OM\perp AC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)$\Rightarrow \widehat{ONC}=90^0$

Xét tứ giác $OCMN$ có $\widehat{ONC}=\widehat{OMC}=90^0(cmt)$, suy ra $OCMN$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối dưới các góc bằng nhau)

*)Xét ΔACD có $DM\perp AC\left(do\ OM\perp AC\right)\Rightarrow DM$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến suy ra ΔACD cân tại D nên DM cũng là đường phân giác của $\widehat{ADC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC}=2\widehat{ODC}$ (1)

Ta có : $AB = AC(gt)$ nên $sd\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC}$ (trong một đường tròn hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau)$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (trong 1 đường tròn, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

$\Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{BDC} = 2\widehat{ADC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDC} = 4.\widehat{ODC}$ $(dfcm)$

b) Phân giác góc $\widehat{BDP}$ cắt BC tại E, ME cắt AB tại F. Chứng minh $CA = CP$ và ME vuông góc với DB

Ta có : $sd\,\overset{\frown}{AB} = sd\,\overset{\frown}{AC}(cmt)$

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AB} + sd\,\overset{\frown}{BD} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AD} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}$

$\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{CD} = sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}$

$\left(do\ AD = CD \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AD} = sd\,\overset{\frown}{CD}\right)$

Lại có : $\widehat{DAC} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{CD}$ (góc nội tiếp chắn cung CD)

$\widehat{APC} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AC} + sd\,\overset{\frown}{BD}\right)$(góc có đỉnh nằm phía trong đường tròn chắn cung AC, BD)

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{APC}$ $\quad hay\,\widehat{PAC} = \widehat{APC}$

Suy ra ΔACP cân tại C (tam giác có hai góc bằng nhau)$\Rightarrow CA = CP(dfcm)$

Ta có : $\widehat{APC} = \widehat{DPB}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{PAC} = \widehat{DBP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Mà $\widehat{APC} = \widehat{PAC}$ (do tam giác ACP cân tại C) (cmt)

$\Rightarrow \widehat{DPB} = \widehat{DBP} \Rightarrow \Delta BDP$ cân tại D, do đó phân giác DE đồng thời là đường cao nên $DE \perp BC$

Xét tứ giác $CDEM$ có $\widehat{CED} = \widehat{CMD} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $CDEM$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MDC} = \widehat{ADM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Mà $\widehat{MEC} = \widehat{BEF}$ (đối đỉnh)$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ADM}\ (3)$

Ta có: $\widehat{ADM} + \widehat{DAM} = 90^0$ (do tam giác ADM vuông tại M)

$\widehat{ADE} + \widehat{DPE} = 90^0$ (do tam giác DEP vuông tại D)

Mà $\widehat{DAM} = \widehat{APC} = \widehat{DPE}$ nên $\widehat{ADM} = \widehat{ADE} = \widehat{EDB}$ (4)

Từ (3) và (4)$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{EDB}$

Gọi $EF \cap BD = \{I\}$. Ta có: $\widehat{DEI} + \widehat{EDB} = \widehat{DEI} + \widehat{BEF} = \widehat{DEB} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DEI$ vuông tại I$\Rightarrow DI \perp IE$ hay $ME \perp DB(dfcm)$

c) Chứng minh tam giác MNE cân. Tính $\dfrac{DE}{DF}$

Ta có: $\widehat{DBA} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AD}$ lớn $= \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{CD} + sd\,\overset{\frown}{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{CD} + sd\,\overset{\frown}{AB}\right) = \widehat{CPD}$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)$\Rightarrow 180^0 - \widehat{DBA} = 180^0 - \widehat{CPD}$

$\Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{DPE} = \widehat{BDE} \Rightarrow BD$ là tia phân giác của $\widehat{EBF}\,(*)$

$\Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B (phân giác BI đồng thời là đường cao)

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BFE}\,(5)$ (góc ở đáy tam giác cân)

Ta có: $\widehat{ANM} = \widehat{ACO}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp $OCMN$) mà $\widehat{ACO} = \widehat{OAC} = \widehat{OAB}$ nên $\widehat{ANM} = \widehat{OAB}$, hai góc này lại ở vị trí so le trong

$\Rightarrow MN\,//\,AF \Rightarrow \widehat{NME} = \widehat{BFE}$ (hai góc so le trong) (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{NME} = \widehat{NEM}$

Suy ra ΔMNE cân tại N $(dfcm)$

Vì ΔBEF cân tại B(cmt) nên $BE = BF$

Xét ΔBDE và ΔBDF có: $BE = BF(cmt); BD$ chung; $\widehat{EBD} = \widehat{FBD}$ (theo $(*)$)

$\Rightarrow \Delta BDE = \Delta BDF(c.g.c) \Rightarrow DE = DF$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy $\dfrac{DE}{DF} = 1.$

SỞ GD&ĐT HÒA BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ
NĂM HỌC 2020-2021
ĐỀ THI MÔN TOÁN
(Dành cho chuyên Tin)
Ngày thi: 12 tháng 7 năm 2020
Thời gian làm bài : 150 phút (không kể giao đề)

Câu I (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=2x^2+5x+2$
2) Giải phương trình: $|4x+1|=3$
3) Rút gọn biểu thức: $B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
4) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng : $(d): y=4x-3$ và $Parabol(P): y=x^2$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}=10$
2) Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2=0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(2x_1+1)(2x_2+1)=13$

Câu III. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x+2}-2\sqrt{y-1}=-4\\ 3\sqrt{x+2}+y=16\end{cases}$
2) Một tam giác vuông có cạnh huyền dài $10cm.$ Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $2cm.$ Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

Câu IV. (2,0 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC<2R.$ Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, M là điểm tùy ý trên cung lớn $BC\,(CM\geq BM>0).$ Qua C kẻ tiếp tuyến d tới $(O).$ Đường thẳng AM cắt d và BC lần lượt tại Q và $N.$ Các đường thẳng MB và AC cắt nhau tại $P.$

1) Chứng minh : $PQCM$ là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh rằng: PQ song song với BC
3) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt d tại $E.$ Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{CN}+\dfrac{1}{CQ}=\dfrac{1}{CE}$
4) Xác định vị trí của M sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMBN lớn nhất

Câu V. (2,0 điểm)

1) Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x+y^2-2y\sqrt{x}-3(2\sqrt{x}-3)=0$
2) Cho hai số x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{x^2+2020}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2020}\right)=2020$

Tính giá trị của $S=x+y$

ĐÁP ÁN

Câu I.

1)$A=2x^2+5x+2=2x^2+4x+x+2=2x(x+2)+(x+2)=(x+2)(2x+1)$

2)$|4x+1|=3$

*)$|4x+1|=4x+1\ khi\ x\geq\frac{-1}{4}$ *)$|4x+1|=-4x-1 khi\ x<\frac{-1}{4}$

+)$x\geq-\frac{1}{4}\Rightarrow 4x+1=3\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(tm)$

+)$x<\frac{-1}{4}\Leftrightarrow -4x-1=3\Leftrightarrow x=-1(tm)$

Vậy $S=\left\{\frac{1}{2};-1\right\}$

3)$B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2.\sqrt{5}.1+1^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2.\sqrt{5}.1+1^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{5}+1+\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1=2\sqrt{5}$

4) Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=4x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

Vì $a+b+c=1-4+3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\Rightarrow y=1\\x_2=3\Rightarrow y_2=9\end{array}\right.$

Vậy tọa độ giao điểm là $(1;1);(3;9)$

Câu II.

1)$\frac{1}{\sqrt{x}-5}-\frac{1}{\sqrt{x}+5}=10\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+5-\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}=10\left(\begin{array}{l}x>0\\x\neq 25\end{array}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{10}{x-25}=10\Leftrightarrow x-25=1\Leftrightarrow x=26(tm)$

2)$x^2-2(m+1)x+m^2=0$ $(*)$

$\Delta'=(m+1)^2-1.m^2=2m+1$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'\geq 0\Leftrightarrow 2m+1\geq 0\Leftrightarrow m\geq-\frac{1}{2}$

Áp dụng hệ thức Vi – et : $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=2m+2\\x_1x_2=m^2\end{array}\right.$

Ta có: $(2x_1+1)(2x_2+1)=13\Leftrightarrow 4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1=13$

Hay $4m^2+2(2m+2)-12=0\Leftrightarrow 2m^2+2m+2-6=0$

$\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1(tm)\\m=-2(ktm)\end{array}\right.$ Vậy $m=-2$ thì thỏa đề.

Câu III

1) $\begin{cases}\sqrt{x+2}-2\sqrt{y-1}=-4 \\ 3\sqrt{x+2}+y=16\end{cases}\left(\begin{matrix}y\ge 1\\ x\ge -2\end{matrix}\right)$

Đặt $t=\sqrt{x+2},u=\sqrt{y-1}\Rightarrow y=u^2+1\left(t,u\ge 0\right)$. Phương trình thành:

$$\begin{cases}t-2u=-4\Rightarrow t=2u-4\left(*\right) \\ 3t+u^2+1=16\left(2\right)\end{cases}$$

Thay (*) vào (2) $\Rightarrow 3\left(2u-4\right)+u^2+1=16$

$$\Leftrightarrow u^2+6u-27=0\Leftrightarrow \left[\begin{matrix}u=3(tm)\\ u=-9(ktm)\end{matrix}\right.$$

$u=3\Rightarrow \sqrt{y-1}=3\Rightarrow y=10$, thay vào phương trình đề:

$\Rightarrow 3\sqrt{x+2}+10=16\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2\Leftrightarrow x=2(tm)$

Vậy $x=2,y=10$

1) Gọi $x(cm)$ là cạnh góc vuông bé suy ra cạnh góc vuông lớn: $x+2$

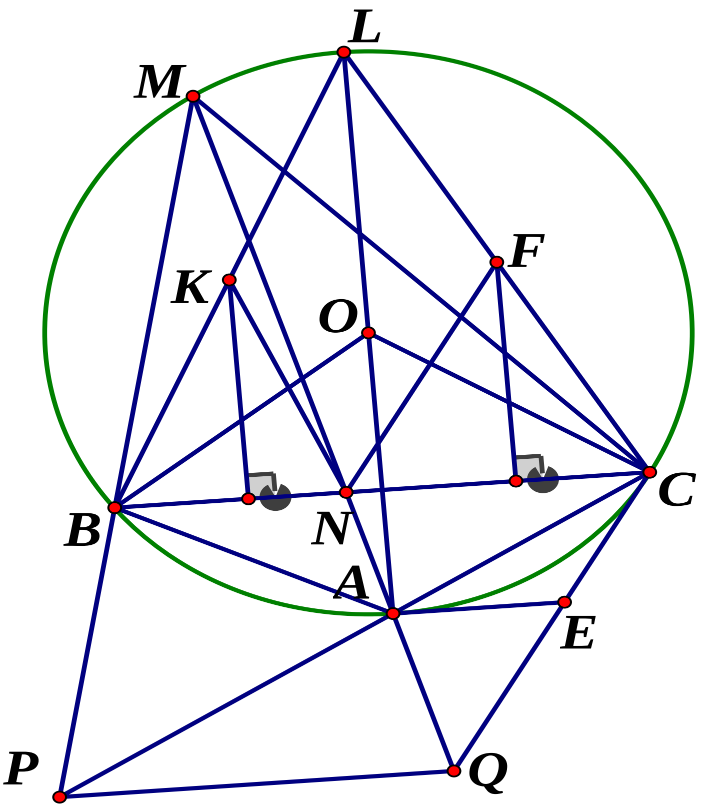
Áp dụng định lý Pytago ta có phương trình:

$x^2+\left(x+2\right)^2=10^2\Leftrightarrow 2x^2+4x+4=100$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-48=0\Leftrightarrow \left[\begin{matrix}x_1=6(tm)\Rightarrow x+2=8\\ x_2=-8(ktm)\end{matrix}\right.$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông là $6cm;8cm$

Câu IV.



Ý 1. $PQCM$ là tứ giác nội tiếp

Ta có A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{BA} = sd\,\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{PCQ}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà 2 góc này cùng nhìn $PQ \Rightarrow PMCQ$ là tứ giác nội tiếp

Ý 2. PQ song song với BC

Ta có: $\widehat{QPC} = \widehat{QMC}$ ($MPQC$ là tứ giác nội tiếp) (1)

$\widehat{QMC} = \widehat{BCP}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QPC} = \widehat{BCP}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BC\,//\,PQ$

Ý 3.

Dễ chứng minh : $AE\,//\,BC$ và $AE = CE$

Ta có: $\dfrac{CE}{CN} = \dfrac{AE}{CN} = \dfrac{QE}{QC}$ (hệ quả Ta let)

$$\Rightarrow \frac{CE}{CN} + \frac{CE}{CQ} = \frac{QE}{QC} + \frac{CE}{CQ} \Rightarrow CE.\left(\frac{1}{CN} + \frac{1}{CQ}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{CN} + \frac{1}{CQ} = \frac{1}{CE}$$

Ý 4.

Ta có : $\widehat{ABN} = \widehat{BMN}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

$\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn (BMN)

Kẻ đường kính AL của (O). Gọi K là giao điểm đường trung trực của đoạn BN và BL

$\Rightarrow E$ là tâm đường tròn (BMN)

Tương tự dựng F là tâm (CMN)

Dễ dàng chứng minh được $\Delta BLC, \Delta BEN, \Delta CFN$ cân

$\Rightarrow LENF$ là hình bình hành $\Rightarrow R_{(MBN)} + R_{(MCN)} = LC$ (không đổi)

Ta có: $MC \ge MB \Rightarrow NC \ge NB$ mà $\Delta EBN \sim \Delta FCN (g.g) \Rightarrow \dfrac{EB}{FC} = \dfrac{NB}{NC} \le 1$

$\Rightarrow EB \le FC \Rightarrow 2EB \le EB + FC \Rightarrow 2R_{(ABN)} \le LC$

$\Rightarrow R_{(MBN)} \le \dfrac{LC}{2}$

Dấu $"="$ xảy ra khi $M \equiv L$ là điểm chính giữa của cung lớn $\overset{\frown}{BC}$

Câu V.

1)

$$2x+y^2-2y\sqrt{x}-3\left(2\sqrt{x}-3\right)=0 \qquad \left(x\ge 0; y\ge 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x+y^2-2y\sqrt{x}-6\sqrt{x}+9=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-6\sqrt{x}+9\right)+\left(x-2\sqrt{x}.y+y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2+\left(\sqrt{x}-y\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-3=0\\ \sqrt{x}-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ y=3\end{cases}(tm)$$

Vậy $x=9, y=3$

2)

$$*\left(x+\sqrt{x^2+2020}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2020}\right)=2020$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\sqrt{x^2+2020}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2020}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2020}\right)}{x-\sqrt{x^2+2020}}=2020$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x^2-2020\right)\left(y+\sqrt{y^2+2020}\right)}{x-\sqrt{x^2+2020}}=2020$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^2+2020}}{\sqrt{x^2+2020}-x}=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+2020}-x=y+\sqrt{y^2+2020}(1)$$

$$*)\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2020}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2020}\right)\left(y-\sqrt{y^2+2020}\right)}{y-\sqrt{y^2+2020}}=2020$$

$$\Rightarrow -\left(x+\sqrt{x^2+2020}\right)=-y+\sqrt{y^2+2020}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x^2+2020}-x=-y+\sqrt{y^2+2020} \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có:

$$-x-y=x+y \Leftrightarrow 2x+2y=0 \Leftrightarrow x+y=0$$

Vậy $S=0$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 1

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2020-2021
Môn: Toán
(Dành cho thí sinh thi chuyên Tin)
Thời gian làm bài: ***150*** *phút, không kể thời gian giao đề*
Đề thi có ***01*** *trang*

Câu 1 *(2 điểm)*

a) Cho $0<x<y$ thỏa mãn $2x^2+2y^2=5xy$. Tính $E=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

b) Cho $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(2x^3-6x+2008\right)^{2021}$.

Câu 2 *(2 điểm)*

a) Phân tích số 210720202021 thành tổng của k số tự nhiên $a_1;a_2;....;a_k$. Đặt $S=a_1^5+a_2^5+...+a_k^5$. Tìm chữ số tận cùng của S.

b) Cho X là một tập hợp gồm 506 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn

hơn 2020.Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x,y sao cho $x-y$ thuộc tập hợp $E=\{5;10;15\}$.

Câu 3 *(2 điểm)*

a) Giải phương trình $5x^2+6x+4=3(x+1)\sqrt{3x^2+4}$.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+2+y^2+2xy=11y \\ y(2x+y)^2=2x^2+13y+4 \end{cases}$$

Câu 4 *(3 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao $AD;BE;CF$ cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh bốn điểm $M;D;E;F$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AB.BF+AC.CE\le 4R^2$.

c) Khi vị trí các đỉnh A,B,C thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn nhọn, chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi.

Câu 5 *(1 điểm)* Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3xyz$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{3y^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{y}{3x^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{z}{3x^2y^2+xyz}}\le\frac{3}{2}.$$

.......................Hết....................

Họ và tên thí sinh:.. SBD:.................

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2020-2021
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Tin)
Hướng dẫn chấm có **05** trang

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – Thang điểm

Câu 1.

a) Cho $0<x<y$ thỏa mãn $2x^2+2y^2=5xy$.Tính: $E=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

Đáp án	**Điểm**
Ta có: $2x^2+2y^2=5xy \Leftrightarrow 2x^2-xy+2y^2-4xy=0$ $\Leftrightarrow x(2x-y)+2y(y-2x)=0$	**0,25**
$\Leftrightarrow (2x-y)(x-2y)=0$	**0,25**
$\Leftrightarrow 2x=y \quad (do\ \ 0<x<y)$	**0,25**
Vậy $E=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{5x^2}{-3x^2}=-\dfrac{5}{3}$	**0,25**

b) Cho $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(2x^3-6x+2008\right)^{2021}$.

Đáp án	**Điểm**
Từ $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}+3-2\sqrt{2}+3x$	**0,25**
$\Leftrightarrow x^3-3x=6 \Leftrightarrow x^3-3x-6=0$	**0,25**
Ta có: $2x^3-6x+2008=2\left(x^3-3x-6\right)+2020=2020$	**0,25**
Vậy $P=2020^{2021}$	**0,25**

Câu 2. ***(2 điểm):***

a) Phân tích số 210720202021 thành tổng của k số tự nhiên $a_1;a_2;....;a_k$.

Đặt $S=a_1^5+a_2^5+...+a_k^5$. Tìm chữ số tận cùng của S.

Đáp án	**Điểm**

Với $n \in \mathbb{N}$ ta có $\left(n^5-n\right)\vdots 10$ Thật vậy $\left(n^5-n\right)=(n-1)n(n+1)\left(n^2+1\right)\vdots 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$	**0,25**
$\left(n^5-n\right)=\left[(n-1)n(n+1)(n-2)(n+2)+5n\left(n^2-1\right)\right]\vdots 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \left(n^5-n\right)\vdots 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$	**0,25**
Suy ra $\left(a_i^5-a_i\right)\vdots 10 \quad (i=1;2;....,k)$. $\Rightarrow \left[\left(a_1^5+a_2^5+...+a_k^5\right)-\left(a_1+a_2+...+a_k\right)\right]\vdots 10$	**0,25**
$\Rightarrow (S-210720202021)\vdots 10$. Vậy S có số tận cùng là 1	**0,25**

b) Cho X là một tập hợp gồm 506 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2020. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x-y$ thuộc tập hợp $E=\{5;10;15\}$.

Đáp án	**Điểm**
Ta chia các số nguyên từ 1 đến 2020 thành 101 nhóm: $\{1;2;...;20\};\{21;22;...;40\};...;\{1981;1982;...;2000\};\{2001;2002;...;2020\}$.	**0,25**
Vì có 506 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm có chứa $\left[\dfrac{506}{101}\right]+1=6$ số trở lên .	**0,25**
Hiệu của hai số bất kỳ trong nhóm trên luôn lớn hơn 0, nhỏ hơn 20. Trong các số này có 2 số có cùng số dư khi chia cho 5, hiệu 2 số này chia hết cho 5. Giả sử hai số này là $x, y;\ (x>y)$.	**0,25**
Từ đó ta có $x-y \in \{5;10;15\}$ ta được điều phải chứng minh.	**0,25**

Câu 3.*(2 điểm):*

a) Giải phương trình $5x^2+6x+4=3(x+1)\sqrt{3x^2+4}$

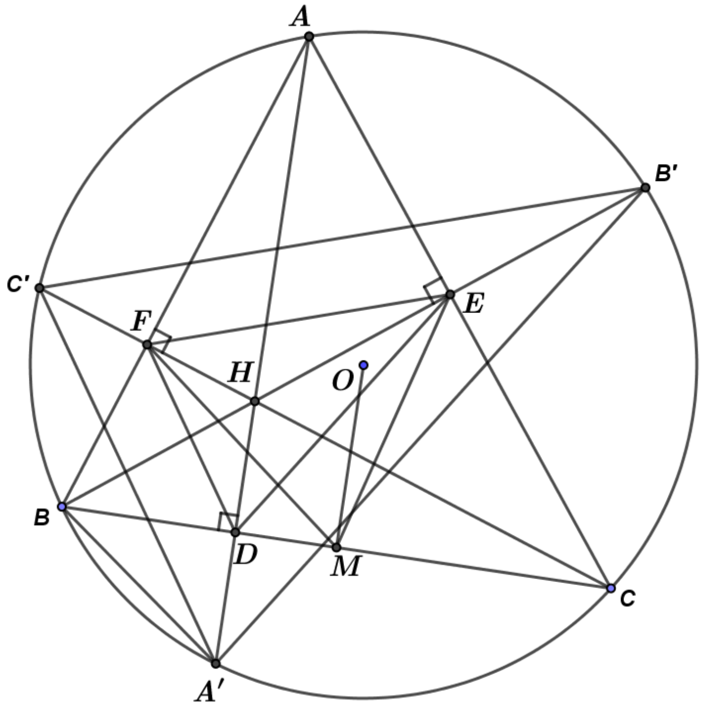
Đáp án	**Điểm**
Phương trình tương đương $3x^2+4-3(x+1)\sqrt{3x^2+4}+2x^2+6x=0$ Đặt $t=\sqrt{3x^2+4} \Rightarrow t^2-3(x+1)t+\left(2x^2+6x\right)=0$	**0,25**
Ta có $\Delta=9(x+1)^2-4\left(2x^2+6x\right)=x^2-6x+9=(x-3)^2$. Do đó $\left[\begin{array}{l} t=2x \\ t=x+3 \end{array}\right.$	**0,25**
Với $t=2x$ ta có $\sqrt{3x^2+4}=2x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x^2-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$	**0,25**
Với $t=x+3$ ta có $\sqrt{3x^2+4}=x+3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge -3 \\ 2x^2-6x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{19}}{2}$	**0,25**

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2; x=\dfrac{3\pm\sqrt{19}}{2}$	

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2+y^2+2xy=11y \\ y(2x+y)^2=2x^2+13y+4 \end{cases}$

Đáp án	**Điểm**
+ Với $y=0$ (không thoả mãn) + Xét $y\neq 0$. Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x^2+2+2xy+y^2=11y \\ y(2x+y)^2=2(x^2+2)+13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{y}+2x+y=11 \\ (2x+y)^2=\dfrac{2\left(x^2+2\right)}{y}+13 \end{cases}$	**0,25**
Đặt $u=2x+y;\ v=\dfrac{x^2+2}{y} \Rightarrow \begin{cases} u+v=11 \\ u^2-2v=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases};\ \begin{cases} u=-7 \\ v=18 \end{cases}$	**0,25**
Với $\begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+2=6y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-14 \\ y=33 \end{cases} \end{array}\right.$	**0,25**
Với $\begin{cases} u=-7 \\ v=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-7 \\ x^2+2=18y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-7 \\ x^2+36x+128=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-32 \\ y=57 \end{cases} \end{array}\right.$ Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2;1);(-4;1);(-14;33);(-32;57)$	**0,25**

Câu 4. ***(3 điểm) :*** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao $AD;BE;CF$ cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC



a) Chứng minh bốn điểm $M;D;E;F$ cùng thuộc một đường tròn.

Đáp án	Điểm
Vì $BE;CF$ là đường cao nên $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^\circ$ $\Rightarrow$Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC. $\Rightarrow \widehat{ECF}=\widehat{EBF}=\frac{1}{2}\widehat{EMF}$ (1) (Góc nội tiếp và góc ở tâm)	**0,25**
Tứ giác $BDHF$ có $\widehat{BDH}+\widehat{BFH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{HBF}=\widehat{HDF}$ (2)	**0,25**
Tương tự, tứ giác $CDHE$ nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{HCE}=\widehat{HDE}$ (3) Từ (1);(2) ;(3)ta có : $\Rightarrow \widehat{EDF}=\widehat{EDH}+\widehat{HDF}=\widehat{ECF}+\widehat{EBF}=2.\frac{1}{2}\widehat{EMF}=\widehat{EMF}$	**0,25**
Từ $\widehat{EDF}=\widehat{EMF}\Rightarrow MDFE$ nội tiếp$\Rightarrow$ bốn điểm $M;D;E;F$ cùng thuộc một đường tròn.	**0,25**

b) Chứng minh: $AB.BF+AC.CE\le 4R^2$.

Đáp án	Điểm
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBF$ có $\widehat{B}$ chung ; $\widehat{ADB}=\widehat{CFB}=90^\circ\Rightarrow \triangle ABD\sim\triangle CBF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{BD}{BF}\Rightarrow AB.BF=BC.BD$ (4)	**0,25**
Tương tự $\triangle ACD\sim\triangle BCE$ (g.g)$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}\Rightarrow AC.CE=BC.CD$ (5)	**0,25**
Cộng (4)(5) theo từng vế ta được : $AB.BF+AC.CE=BC\left(BD+DC\right)=BC^2$.	**0,25**
Vì $BC\le 2R$ nên ta có $AB.BF+AC.CE\le 4R^2$	**0,25**

c) Khi vị trí các đỉnh A, B, C thay đổi trên đường tròn (O), chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi.

Đáp án	Điểm
Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AD, BE, CF với (O). Ta có : $\widehat{A'BC} = \widehat{A'AC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung A′C) $\widehat{EBC} = \widehat{A'AC}$ (cùng phụ với góc ACB) $\Rightarrow \widehat{A'BC} = \widehat{EBC}$	**0,25**
Tam giác HBA' có $BD \perp HA'$; $\widehat{A'BC} = \widehat{EBC}$ nên cân tại B $\Rightarrow BD$ là đường trung trực của $HA' \Rightarrow D$ là trung điểm của HA'	**0,25**
Tương tự có E ;F là trung điểm của HB' , HC'. Suy ra $\triangle DEF \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{1}{2}$	**0,25**
Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF ta có: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{DE}{A'B'} = k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}R$ không đổi khi A,B,C thay đổi trên đường tròn (O).	**0,25**

Câu 5. *(1 điểm)*: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$.

Chứng minh $\sqrt{\dfrac{x}{3y^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\dfrac{y}{3x^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\dfrac{z}{3x^2y^2 + xyz}} \le \dfrac{3}{2}$.

Đáp án	Điểm
Từ giả thiết $xy + yz + zx = 3xyz$ ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3$. Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$. Ta có $a, b, c > 0; a + b + c = 3$. Ta phải chứng minh $\dfrac{bc}{\sqrt{3a + bc}} + \dfrac{ca}{\sqrt{3b + ca}} + \dfrac{ab}{\sqrt{3a + bc}} \le \dfrac{3}{2}$.	**0,25**
Thật vậy: Thay $a + b + c = 3$, $\dfrac{bc}{\sqrt{3a + bc}} = \dfrac{bc}{\sqrt{(a + b + c)a + bc}} = \dfrac{bc}{\sqrt{(a + b)(a + c)}}$	**0,25**
Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số $\dfrac{1}{a + b}, \dfrac{1}{a + c}$ ta được $\dfrac{bc}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} \le \dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a + b} + \dfrac{1}{a + c}\right)$. Tương tự $\dfrac{ca}{\sqrt{3b + ca}} \le \dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b + a} + \dfrac{1}{b + c}\right)$. $\dfrac{ab}{\sqrt{3c + ab}} \le \dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c + a} + \dfrac{1}{c + b}\right)$.	**0,25**
Cộng vế với vế và biến đổi $\dfrac{bc}{\sqrt{3a + bc}} + \dfrac{ca}{\sqrt{3b + ca}} + \dfrac{ab}{\sqrt{3c + ab}} \le \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 1$.	**0,25**

......................Hết....................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 2

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2020-2021
Môn: Toán
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Thời gian làm bài: ***150*** *phút, không kể thời gian giao đề.*
Đề thi có ***01*** *trang*

Câu 1 *(2,0 điểm)*

a) Cho $x+y+z=x^2+y^2+z^2=2$ và $xyz\neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{xyz}$.

b) Cho $0<x<2$ thỏa mãn $\frac{3\left(x^2+5x-1\right)}{x^2+x-1}+23=\frac{24\left(x^2+3x-1\right)}{x^2+2x-1}$.

Tính giá trị của biểu thức $T=\left(x^2-x-2\right)^{2020}+\frac{1}{\left(x^2-x\right)^{2021}}$.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Cho phương trình $x^2+mx+n=0$ trong đó $m^2+n^2=2020$. Chứng minh nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $\left|x_0\right|<\sqrt{2021}$.

b) Cho dãy số gồm 4041 số chính phương liên tiếp, trong đó tổng của 2021 số đầu bằng tổng của 2020 số cuối. Tìm số hạng thứ 2021 của dãy số đó.

Câu 3 *(2,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(y+\frac{1}{2}+\sqrt{y^2+y+1}\right)=\frac{3}{2}\\ x^4+2(3-8y)x^2+16y-7=0\end{cases}$

b) Tìm các số nguyên *x,y* thỏa mãn $\sqrt{9x^2+16x+96}+16y=3x-24$

Câu 4 *(3,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và nằm trong tam giác ABC, $(P\neq B,C,H)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng PB với đường tròn (O), $(M\neq B)$; N là giao điểm của đường thẳng PC với (O), $(N\neq C)$. Đường thẳng BM cắt AC tại E, đường thẳng CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q, $(Q\neq A)$.

a) Chứng minh tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

b) Chứng minh M,N,Q thẳng hàng.

c) Trong trường hợp AP là phân giác của $\widehat{MAN}$, chứng minh PQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

Câu 5 *(1,0 điểm)* Cho $x,y,z>0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\geq 2.$$

.......................Hết.....................

Họ và tên thí sinh:..SBD:.......................

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2020-2021
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Hướng dẫn chấm có **06** trang

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – thang điểm

Câu 1. ***(2 điểm):***

a) Cho $x+y+z=x^2+y^2+z^2=2$ và $xyz\neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{xyz}$.

Đáp án	**Điểm**
Từ $x+y+z=2$ có được $x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)=4$	**0,25**
$\Leftrightarrow xy+yz+zx=1$	**0,25**
Do $xyz\neq 0$ nên ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{xyz}$ (đpcm)	**0,25**

b) Cho $0<x<2$ thỏa mãn: $\frac{3\left(x^2+5x-1\right)}{x^2+x-1}+23=\frac{24\left(x^2+3x-1\right)}{x^2+2x-1}$

Tính giá trị của biểu thức: $T=\left(x^2-x-2\right)^{2020}+\frac{1}{\left(x^2-x\right)^{2021}}$.

Đáp án	**Điểm**
Điều kiện $\begin{cases}x^2+x-1\neq 0\\x^2+2x-1\neq 0\end{cases}$	**0,25**

$\frac{3\left(x^2+5x-1\right)}{x^2+x-1}+23=\frac{24\left(x^2+3x-1\right)}{x^2+2x-1}\Leftrightarrow\frac{3\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)+5\right]}{\left(x-\frac{1}{x}\right)+1}+23=\frac{24\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)+3\right]}{\left(x-\frac{1}{x}\right)+2}$	
Đặt $t=x-\frac{1}{x}$ có phương trình trở thành: $t^2-3t+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$.	**0,25**
$\left[\begin{array}{l}x-\frac{1}{x}=1\\x-\frac{1}{x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=0\\x^2-2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\x=1+\sqrt{2};\ x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$	**0,25**
Vì $0<x<2$ và đối chiếu điều kiện nên có được $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x^2-x-1=0$	**0,25**
Vậy $T=\left(x^2-x-2\right)^{2020}+\frac{1}{\left(x^2-x\right)^{2021}}$ $=\left(x^2-x-1-1\right)^{2020}+\frac{1}{\left(x^2-x-1+1\right)^{2021}}=\left(-1\right)^{2020}+\frac{1}{\left(1\right)^{2021}}=2$	**0,25**

Câu 2. ***(2 điểm):***

a) Cho phương trình $x^2+mx+n=0$ trong đó $m^2+n^2=2020$. Chứng minh nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $\left|x_0\right|<\sqrt{2021}$.

Đáp án	**Điểm**
Vì x_0 là nghiệm phương trình $x_0^2+mx_0+n=0\Rightarrow x_0^2=-mx_0-n$	**0,25**
Ta có $x_0^4=\left(mx_0+n\right)^2\le\left(m^2+n^2\right)\left(x_0^2+1\right)=2020\left(x_0^2+1\right)$	**0,25**
$\Rightarrow x_0^4-1<2020\left(x_0^2+1\right)\Leftrightarrow x_0^4-2020x_0^2-2021<0$	**0,25**
$\Leftrightarrow\left(x_0^2+1\right)\left(x_0^2-2021\right)<0\Leftrightarrow x_0^2<2021\Leftrightarrow\left|x_0\right|<\sqrt{2021}$	**0,25**

b) Cho dãy số gồm 4041 số chính phương liên tiếp, trong đó tổng của 2021 số đầu bằng tổng của 2020 số cuối. Tìm số hạng thứ 2021 của dãy số đó.

Đáp án	**Điểm**
Gọi số chính phương thứ 2021 là $x^2, x\in N; x\ge 2020$ Ta có 4041 số chính phương liên tiếp là: $\left(x-2020\right)^2;\left(x-2019\right)^2;...;\left(x-1\right)^2;x^2;\left(x+1\right)^2;...;\left(x+2020\right)^2$	**0,25**
Theo đề bài $\left(x-2020\right)^2+\left(x-2019\right)^2+...+\left(x-1\right)^2+x^2=\left(x+1\right)^2+\left(x+2\right)^2+...+\left(x+2020\right)^2$	**0,25**

$\Leftrightarrow x^2=(x+1)^2-(x-1)^2+(x+2)^2-(x-2)^2+...+(x+2020)^2-(x-2020)^2$ $\Leftrightarrow x^2=4x(1+2+3+...+2020)$ $\Leftrightarrow x^2=4x.\dfrac{2020.2021}{2}$	**0,25**
$\Leftrightarrow x^2=8164840x \Leftrightarrow x=8164840$ (vì x khác 0) Vậy số cần tìm là $x^2=8164840^2$.	**0,25**

Câu 3. *(2 điểm):*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right).\left(y+\dfrac{1}{2}+\sqrt{y^2+y+1}\right)=\dfrac{3}{2} & (1)\\ x^4+2(3-8y)x^2+16y-7=0 & (2)\end{cases}$

Đáp án	**Điểm**
$pt(1): x+\sqrt{x^2+3}=-(2y+1)+\sqrt{(2y+1)^2+3}$ $\Leftrightarrow (x+2y+1)\left[\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+\sqrt{(2y+1)^2+3}-(2y+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{(2y+1)^2+3}}\right]=0$	**0,25**
Do $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+\sqrt{(2y+1)^2+3}-(2y+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{(2y+1)^2+3}}>0 \Rightarrow x+2y+1=0$	**0,25**
Thế $2y=-1-x$ vào ta có $pt(2): x^4+8x^3+14x^2-8x-15=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+8x+15)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=-3\\x=-5\end{array}\right.$	**0,25**
Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(1;-1);(-1;0);(-3;1);(-5;2)$	**0,25**

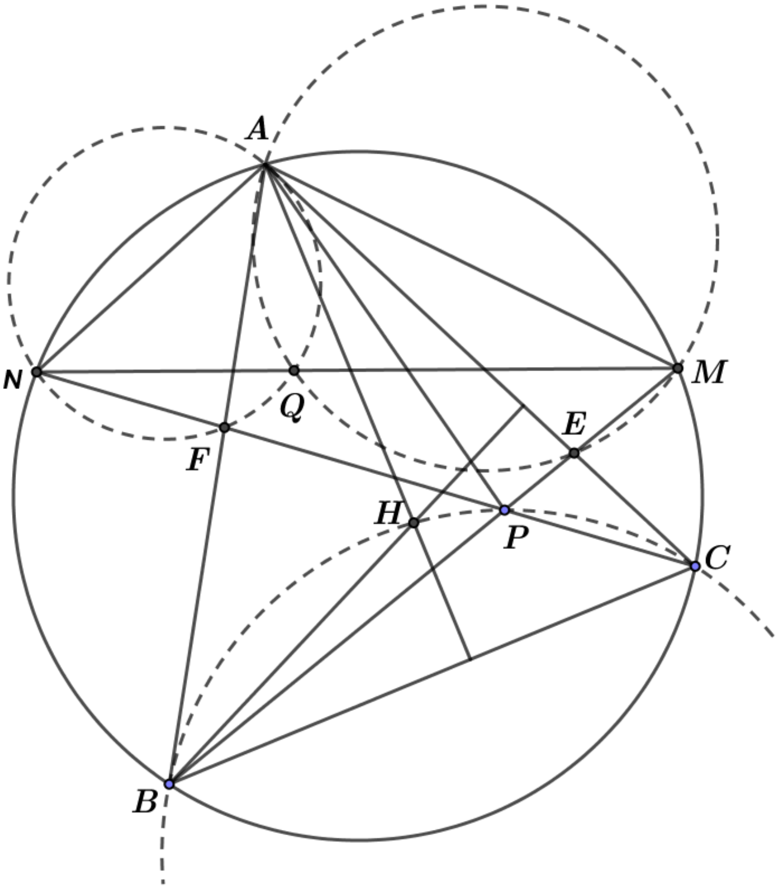
b)Tìm các số nguyên *x,y* thỏa mãn: $\sqrt{9x^2+16x+96}+16y=3x-24$

Nội dung	**Điểm**
Ta có $\sqrt{9x^2+16x+96}+16y=3x-24 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+16x+96}=3x-16y-24$ Đặt $3x-16y-24=a$ với $a\in N^*$. Khi đó $9x^2+16x+96=a^2$	**0,25**
$\Leftrightarrow 81x^2+144x+864=9a^2 \Leftrightarrow (9x+8)^2-(3a)^2=-800$ $\Leftrightarrow (9x+8-3a)(9x+8+3a)=-800$ (*)	**0,25**
Thay $a=3x-16y-24$ vào (*) $\Rightarrow (9x-24y-32)(3y+5)=-25$ $\Rightarrow 25\,\vdots\,(3y+5)$ mà $3y+5$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+5\in\{-1;5;-25\}$	**0,25**

- Với $3y+5=-1 \Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn) - Với $3y+5=5 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=3$ (Loại vì a<0) - Với $3y+5=-25 \Leftrightarrow y=-10 \Rightarrow x=-23$ (Thỏa mãn) Vậy $(x,y)=(1;-2),(-23;-10)$	**0,25**

Câu 4.*(3 điểm):* Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và nằm trong tam giác ABC, $(P \neq B,C,H)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng PB với đường tròn (O), $(M \neq B)$; N là giao điểm của đường thẳng PC với (O), $(N \neq C)$. Đường thẳng BM cắt AC tại E, đường thẳng CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q, $(Q \neq A)$.

Vẽ hình:



a) Chứng minh tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

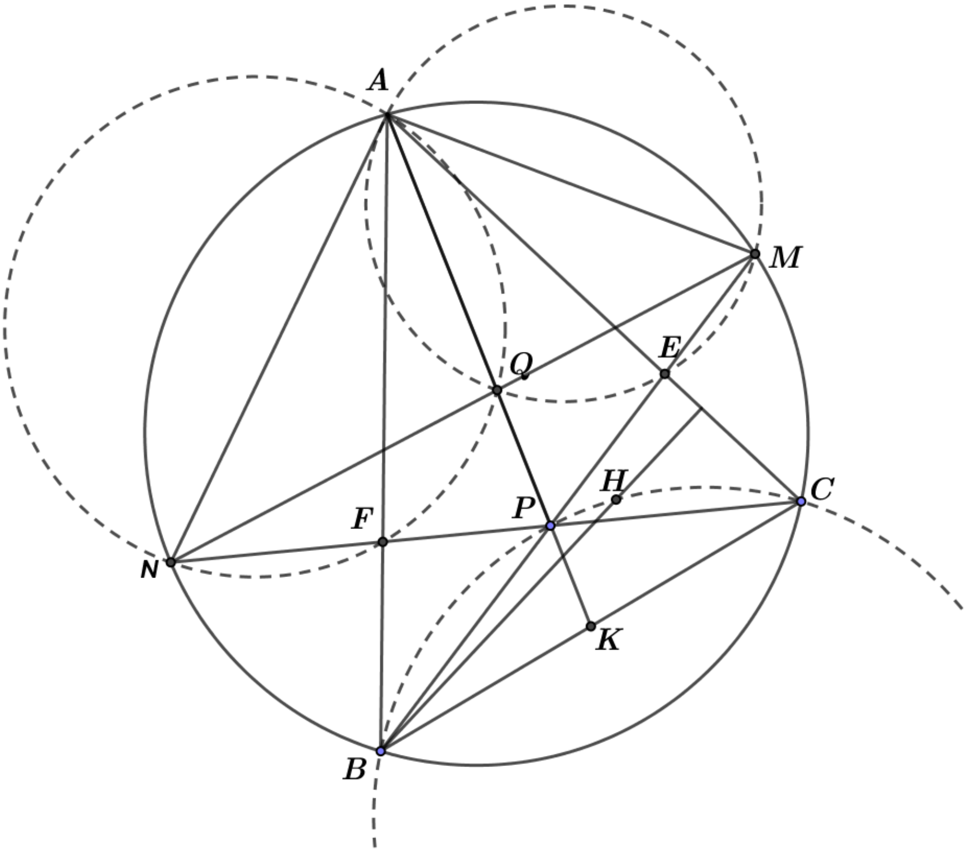
Đáp án	**Điểm**
Ta có $\widehat{BHC}=180^0-\widehat{BAC}$,	**0,5**
mà $\widehat{BPC}=\widehat{BHC}=\widehat{EPF}$ .Suy ra được $\widehat{BAC}+\widehat{EPF}=180^0$ nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp	**0,5**

b) Chứng minh M,N,Q thẳng hàng.

Đáp án	**Điểm**

Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BFC}+\widehat{BEC}=180^0$.	0,25
Từ các tứ giác $AQFN, AQEM$ nội tiếp ta có $\widehat{MQN}=\widehat{MQA}+\widehat{NQA}$	0,5
$=\widehat{MEA}+\widehat{NFA}=180^0$ .Vậy 3 điểm M,N,Q thẳng hàng.	0,25

c) Trong trường hợp AP là phân giác của $\widehat{MAN}$, chứng minh PQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.



Đáp án	Điểm
Ta có: $\widehat{QFA}=\widehat{ANQ}=\widehat{ANM}=\widehat{ABM}$ suy ra $FQ//BE$ tương tự $EQ//CF$ suy ra tứ giác $EQFP$ là hình bình hành.	0,25
Vậy $\widehat{QAN}=\widehat{QFP}=\widehat{QEP}=\widehat{QAM}$ hay AQ là phân giác $\widehat{MAN}$ suy ra A,P,Q thẳng hàng.	0,25
Gọi $K=PQ\cap BC$ thì $\widehat{KAC}=\widehat{QAC}=\widehat{QME}=\widehat{NMB}=\widehat{PCK}$.	0,25
Từ đó ta có: $\Delta AKC\sim\Delta CKP$ hay $KC^2=KP.KA$ tương tự $KB^2=KP.KA\Rightarrow KB=KC$	0,25

Câu 5.*(1 điểm):* Cho $x,y,z>0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\geq 2.$$

Đáp án	Điểm
$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\ge 2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)}+\sqrt{\frac{2\sqrt{z}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{x}}}\ge 2\quad \left(*\right)$ Đặt $\begin{cases}\sqrt{x}=a\\ \frac{1}{\sqrt{y}}=b\\ \sqrt{z}=c\end{cases}$ với $a,b,c>0$ BĐT (*) trở thành : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge 2\ \left(**\right)$	**0,25**
Áp dụng bđt $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\ge \frac{4}{A+B}$, $(A;B>0)$ ta có: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge \frac{4}{b+c+c+a}=\frac{4}{2c+a+b}$ $\Rightarrow \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge \frac{4\left(a+b+c\right)}{2c+a+b}\quad \left(1\right)$	**0,25**
Lại có : $\sqrt{\frac{2c}{a+b}}=\frac{2c}{\sqrt{2c\left(a+b\right)}}\ge \frac{4c}{2c+a+b}\quad \left(2\right)$	**0,25**
Từ (1) và (2) ta có : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge \frac{4\left(a+b+c\right)}{2c+a+b}-2+\frac{4c}{2c+a+b}=4-2=2$ BĐT (**) đúng vậy BĐT cần chứng minh là đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}=z$	**0,25**

......................Hết.....................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề số 3

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2020
Môn thi: Toán (chuyên)
(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT Chuyên Hạ Long)
Thời gian làm bài: ***150 phút****, không kể thời gian giao đề*
(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right).\left(3\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}\right)$$ với $x\geq 0,\ x\neq 1,\ x\neq 4,\ x\neq 9$

.

a. Rút gọn *A*.

b. Tìm *x* để $A<2$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Cho phương trình $x^4-2mx^2+m^2-2m+2=0$ (*m* là tham số). Tìm *m* để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=24$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+y}=y^2+y-x\\ \sqrt{y-1}=\sqrt{x+3y+1}-4\end{cases}$.

Câu 3. *(1,0 điểm)* Cho *x*, *y* là hai số thực thỏa mãn $x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $M=x+2y$.

Câu 4. *(3,5 điểm)* Từ một điểm *A* ở bên ngoài đường tròn (*O*) kẻ các tiếp tuyến *AB*, *AC* và cát tuyến *ADE* với đường tròn (*B*, *C* là các tiếp điểm, $AD<AE$, $\overset{\frown}{DB}<\overset{\frown}{DC}$). Qua điểm *O* kẻ đường thẳng vuông góc với *DE* tại *H*, đường thẳng này cắt đường thẳng *BC* tại *K*. Chứng minh:

a. Tứ giác *BCOH* nội tiếp;

b. *KD* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*);

c. $\widehat{DBC}=\widehat{HBE}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM THI TUYỂN SINH
LỚP 10 THPT NĂM 2020
Môn thi: Toán (chuyên)

(Hướng dẫn này có 03 trang)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (*a; b*) sao cho $\dfrac{ab(a+b)}{ab+2}$ là số nguyên.

……………………. *Hết* …………………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:………………………………………………………Số báo danh:…………………………

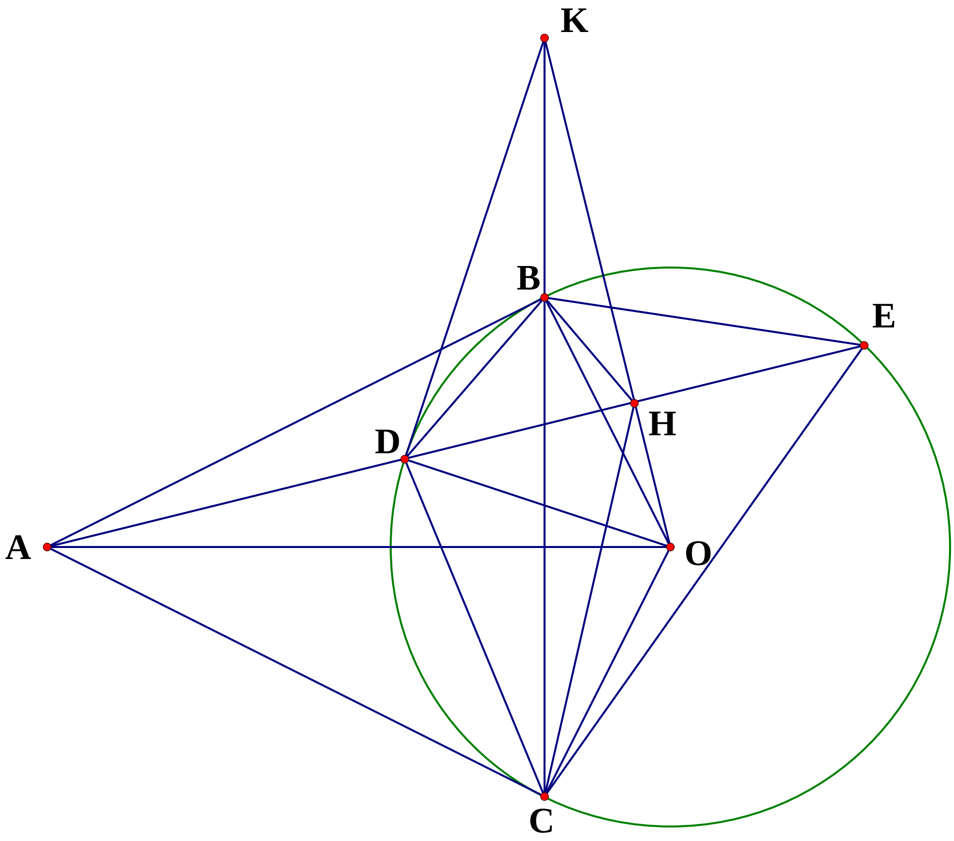
Chữ kí của cán bộ coi thi 1:………………………… *Chữ kí của cán bộ coi thi 2:*……………………

Câu	**Sơ lược lời giải**	**Điểm**
1 (2,0 đ)	a. $A=\dfrac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)-(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}.\dfrac{3x-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	$=\dfrac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}.\dfrac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	b. $A<2\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-2<0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}<0$	0,5
	Vì $\sqrt{x}+4>0$ với mọi *x* nên $\sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<1\Leftrightarrow 0\le x<1$ KL: $0\le x<1$.	0,5
2 (2,5 đ)	1. Đặt $x^2=t$. Phương trình trở thành $t^2-2mt+m^2-2m+2=0$ (*) Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1;t_2$ dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=2m-2>0\\t_1+t_2=2m>0\\t_1t_2=m^2-2m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$	0,5
	$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=24\Leftrightarrow 2(t_1^2+t_2^2)=24$	0,25
	$\Leftrightarrow(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=12\Leftrightarrow m^2+2m-8=0$	0,25
	Giải phương trình được $m_1=-4$ (loại), $m_2=2$ (t/m đk). KL.	0,25
	2. ĐK: $y\ge 1; x+y\ge 0; x+3y\ge -1$	0,25

	$2\sqrt{x+y}=y^2+y-x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+y}+1\right)^2=(y+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=y\\ \sqrt{x+y}=-y-2\end{array}\right.$	0,5
	$\sqrt{x+y}=-y-2$ (loại do $y\ge1$) $\sqrt{x+y}=y\Leftrightarrow x=y^2-y$ (t/m đk) thay vào phương trình $\sqrt{y-1}=\sqrt{x+3y+1}-4$ được $\sqrt{y-1}=y-3$ (đk: $y\ge3$)	0,25
	Biến đổi phương trình thành $y^2-7y+10=0$. Giải phương trình đươc $y_1=2$ (loại do đk $y\ge3$), $y_2=5$ (t/m đk) Với $y=5\Rightarrow x=20$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=20\\ y=5\end{cases}$	0,25
3 (1,0 đ)	$x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27\Leftrightarrow(x+2y)^2+3(x+2y)+(y-1)^2=28$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{121}{4}-(y-1)^2$	0,25
	Vậy $\left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{121}{4}\Leftrightarrow\left\lvert x+2y+\frac{3}{2}\right\rvert\le\frac{11}{2}\Leftrightarrow-7\le x+2y\le4$	0,25
	Vậy M lớn nhất là 4 khi $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$, M nhỏ nhất là -7 khi $\begin{cases}x=-9\\ y=1\end{cases}$	0,25
4 (3,5 đ)	a. Chỉ ra $\widehat{ABO}=\widehat{AHO}=\widehat{ACO}=90^0\Rightarrow$ 5 điểm *A, B, O, C* cùng thuộc đường tròn đường kính $AO\Rightarrow$ tứ giác *BCOH* nội tiếp	1,0
	b.Tứ giác *BCOH* nội tiếp $\Rightarrow\widehat{CHO}=\widehat{CBO}$. $\Delta\,OBC$ cân $\Rightarrow\widehat{CBO}=\widehat{BCO}$ $\Rightarrow\widehat{OHC}=\widehat{OCK}$.	0,25
	$\Delta\,OHC$ và $\Delta\,OCK$ có $\widehat{OHC}=\widehat{OCK}$, $\hat{O}$ chung $\Rightarrow\Delta\,OHC\backsim\Delta\,OCK$ $\Rightarrow\frac{OH}{OC}=\frac{OC}{OK}\Rightarrow OH.OK=OC^2$	0,25
	mà $OC=OD\Rightarrow OH.OK=OD^2\Rightarrow\frac{OH}{OD}=\frac{OD}{OK}$	0,25
	$\Delta\,OHD$ và $\Delta\,ODK$ có $\frac{OH}{OD}=\frac{OD}{OK}$, $\hat{O}$ chung $\Rightarrow\Delta\,OHD\backsim\Delta\,ODK$	0,25
	$\Rightarrow\widehat{ODK}=\widehat{OHD}=90^0\Rightarrow$ *KD* là tiếp tuyến của (*O*)	0,25
	c. Tứ giác *BCOH* nội tiếp $\Rightarrow\widehat{HBK}=\widehat{HOC}$, $\widehat{BHK}=\widehat{BCO}$, theo ý b có $\widehat{BCO}=\widehat{OHC}\Rightarrow\widehat{BHK}=\widehat{OHC}$.	0,25
	$\Delta\,OHC$ và $\Delta\,BHK$ có $\widehat{HBK}=\widehat{HOC};\widehat{BHK}=\widehat{OHC}\Rightarrow\Delta\,BHK\backsim\Delta\,OHC\Rightarrow$	0,25

	$\frac{HO}{HB}=\frac{HC}{HK}\Rightarrow HB.HC=HO.HK$	
	$\Delta\, ODK$ vuông tại D, đường cao $DH \Rightarrow HO.HK=HD^2$, lại có $OH\perp DE \Rightarrow HD=HE \Rightarrow HB.HC=HE^2\Rightarrow\frac{HE}{HC}=\frac{HB}{HE}$	0,25
	$\widehat{BHK}=\widehat{OHC},\ \widehat{KHE}=\widehat{OHE}=90^0\Rightarrow\widehat{BHE}=\widehat{CHE}$ $\Delta\, BHE$ và $\Delta\, EHC$ có $\frac{HE}{HC}=\frac{HB}{HE}$ và $\widehat{BHE}=\widehat{CHE}\Rightarrow\Delta\, BHE\backsim\Delta\, EHC\Rightarrow$ $\widehat{HBE}=\widehat{HEC}$	0,25
	Lại có $\widehat{DEC}=\widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) cùng chắn $\overset\frown{DC}$) $\Rightarrow\widehat{DBC}=\widehat{HBE}$.	0,25
5 (1,0 đ)	$\frac{ab(a+b)}{ab+2}=(a+b)-\frac{2(a+b)}{ab+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2(a+b)}{ab+2}\in\mathbb{Z}$	0,25
	$a\ge1,\ b\ge1\Rightarrow(a-1)(b-1)\ge0\Leftrightarrow a+b\le ab+1<ab+2\Rightarrow\frac{2(a+b)}{ab+2}<2$. $\frac{2(a+b)}{ab+2}>0$, kết hợp với $\frac{2(a+b)}{ab+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{2(a+b)}{ab+2}=1$	0,25
	$\Leftrightarrow 2a+2b=ab+2\Leftrightarrow(a-2)(b-2)=2$.	0,25
	Kết hợp đk a,b nguyên $\Rightarrow\begin{cases}a-2=1\\b-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a-2=2\\a-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$. KL: Các cặp số cần tìm là $(3;4)$ và $(4;3)$.	0,25

Hình vẽ cho câu 4



Những chú ý khi chấm thi:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
2. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
3. Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm toàn bài đã chấm, **không làm tròn**.

.... *Hết* ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Khóa ngày 21 tháng 7 năm 2020
Môn thi: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (*2,0 điểm*)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 2y+3 \\ y^2 = 2x+3 \end{cases}$.
2. Giải phương trình $x^2+3-(x+3)\sqrt{x^2+3}+2(x+1)=0$.

Câu 2. (*2,0 điểm*)

1. Cho các parabol $(P_1): y = mx^2$, $(P_2): y = nx^2$ $(m \neq n)$. Lấy các điểm A, B thuộc $\left(P_1\right)$ và C, D thuộc $\left(P_2\right)$ sao cho $ABCD$ là hình vuông nhận Oy làm trục đối xứng. Tính diện tích hình vuông $ABCD$.

2. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt thỏa mãn $\dfrac{a^3+1}{a}=\dfrac{b^3+1}{b}=\dfrac{c^3+1}{c}$. Chứng minh rằng $abc+1=0$.

Câu 3. (*1,0 điểm*)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $3a^2+3b^2+8c^2=32$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca$.

Câu 4. (*2,0 điểm*)

1. Tìm các số nguyên dương n để n^2+2020 là số chính phương.
2. Chứng minh rằng có thể chọn 3 số a_1, a_2, a_3 trong 7 số nguyên tố phân biệt bất kì sao cho $P=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)$ chia hết cho 216.

Câu 5. (*3,0 điểm*)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung AB không chứa C và I là điểm trên đoạn MC sao cho $MI=MA$.

1. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
2. Vẽ đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F .
   a. Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.
   b. Chứng minh tứ giác $DIFC$ nội tiếp.

------ HẾT------

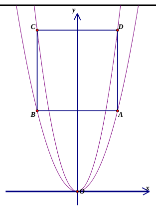
Họ và tên thí sinh ....Số báo danh.................

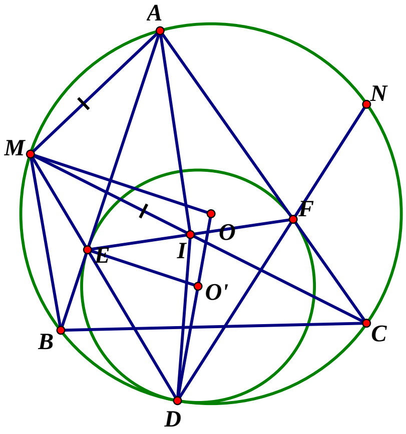
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC MÔN TOÁN (CHUYÊN)
KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Khóa ngày 21 tháng 7 năm 2020.

(Hướng dẫn này có 2 trang)

HDC chỉ gợi ý một cách giải, thí sinh có cách giải khác nếu đúng cho điểm theo quy định của ý (câu) đó. Điểm toàn bài làm tròn đến hàng 0,25.

Câu	Ý	NỘI DUNG YÊU CẦU VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
1 *2,0 điểm*	**1**	Hệ $\Rightarrow x^2-y^2=2(y-x)\Leftrightarrow (x-y)(x+y+2)=0$	0.25
		TH $x=y$. Ta được $x^2=2x+3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=3\end{array}\right.$ Hệ có nghiệm $(-1;-1);(3;3)$	0,25
		TH $y=-x-2$. Ta được $x^2=2(-x-2)+3\Leftrightarrow x=-1$ Hệ có nghiệm $(-1;-1)$	0,25
		Vậy hệ có 2 nghiệm $(-1;-1);(3;3)$	0,25
	2	Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\ (t\ge 0)$. Ta được $t^2-(x+3)t+2x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=x+1\end{array}\right.$	0,25
		$t=2\Rightarrow \sqrt{x^2+3}=2\Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn)	0,25

		$t = x+1 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$(thỏa mãn)	0,25
		Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \pm 1$.	0,25
2 *2,0 điểm*	**1**	 Gọi $A(a, ma^2)$. Khi đó do Oy là trục đối xứng của hình vuông nên $\text{B}(-a, ma^2)$. Do $DA//BC//Oy$ nên $\text{C}(-a, na^2), \text{D}(a, na^2)$	0,25
		$AB = 2\|a\|, AD = \|m-n\|a^2;\ AB = AD \Rightarrow \|a\| = \dfrac{2}{\|m-n\|}$	0,5
		Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S = AB^2 = \dfrac{16}{(m-n)^2}$	0,25
	2	Đặt $\dfrac{a^3+1}{a} = \dfrac{b^3+1}{b} = \dfrac{c^3+1}{c} = m$. Ta có $\begin{cases} a^3 - ma + 1 = 0 \\ b^3 - mb + 1 = 0 \\ c^3 - mc + 1 = 0 \end{cases}$ nên a, b, c là 3 nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - mx + 1$	0.25
		Do $f(x)$ có 3 nghiệm a, b, c nên $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$	0,25
		Từ đó suy ra $x^3 - mx + 1 = (x-a)(x-b)(x-c)\ \forall x \in \mathbb{R}$	0,25
		Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $-abc = 1 \Rightarrow abc + 1 = 0$	0,25
3 *1,0 điểm*	**1**	Ta có $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}; bc \le \dfrac{b^2+4c^2}{4}; ca \le \dfrac{a^2+4c^2}{4}$	0,5
		Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có $ab + bc + ca \le \dfrac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 8c^2) = 8$	0,25
		Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 2c = 2$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 8	0,25
4 *2,0 điểm*	**1**	Gọi m là số nguyên dương sao cho $m^2 = n^2 + 2020$. Khi đó $(m+n)(m-n) = 2^2.5.101$	0.25
		Ta có $(m+n)+(m-n) = 2m$ và $m+n > m-n$ nên $\begin{cases} m+n = 202 \\ m-n = 10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m+n = 1010 \\ m-n = 2 \end{cases}$	0,25
		Giải ra ta được $m = 106; n = 96$ hoặc $m = 506; n = 504$	0,25
		Vậy $n^2 + 2020$ là số chính phương khi $n = 96$ hoặc $n = 504$.	0,25
	2	Trong 7 số nguyên tố phân biệt, có ít nhất 5 số lớn hơn 3. Chọn 5 số lớn hơn 3	0,75

		đó. Các số trong 5 số này chia cho 3 có số dư là 1 hoặc 2. Như thế có ít nhất 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Chọn ra 3 số a_1, a_2, a_3	
		Khi đó các hiệu $a_i - a_j \vdots 6$. Vậy $P \vdots 216$	0,25
5 *2,0 điểm*	**1**	 Ta có $MA = MI$ nên $\angle MAI = \angle MIA$	0.25
		Mặt khác $\angle MAI = \angle MAB + \angle BAI$; $\angle MIA = \angle MCA + \angle IAC$	0,25
		Mà $\angle MAB = \angle MCA$ nên $\angle BAI = \angle IAC$	0,25
		Suy ra AI, CI là các phân giác trong tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp.	0,25
	2.a	Ta có D, O, O' thẳng hàng và $OM // O'E$ vì cùng vuông góc AB nên $\angle MOD = \angle EO'D$	0.5
		Do đó $2\angle ODM = 2\angle ODE \Rightarrow \angle ODM = \angle ODE$. Suy ra M, E, D thẳng hàng	0,5
	2.b	$\Delta MEB \sim \Delta MBD \Rightarrow MB^2 = ME.MD \Rightarrow MI^2 = ME.MD \Rightarrow \Delta MEI \sim \Delta MID$ Suy ra $\angle MIE = \angle MDI$. Gọi N là điểm chính giữa cung AC không chứa B. Chứng minh tương tự $\angle NIF = \angle NDI$	0,25
		Từ đó suy ra $\angle EIM + \angle MIN + \angle NIF = \angle MDN + \angle MIN = 180^o$. Do đó E, I, F thẳng hàng.	0,25
		Khi đó $\angle ICD = \frac{1}{2}\angle MOD = \frac{1}{2}\angle EO'D = \angle EFD = \angle IFD$. Suy ra tứ giác $IFDC$ nội tiếp.	0,5
Tổng số điểm toàn bài là 10 điểm.			

------ Hết -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẬU GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC
(*Đề thi gồm 01 trang*)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT, THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
MÔN: TOÁN – THPT CHUYÊN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Đề số 5

Câu I (2,0 điểm)

1) Tính giá trị đúng của biểu thức $A=\sqrt{43-30\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5}$ là một số nguyên.

Câu II (3,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$ (1) (với m là tham số thực).

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $1 < x_1 < x_2$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2\sqrt{x}=4 \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}=x \end{cases}$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Câu III (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

Câu IV (2,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ và nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B lên AC và AO, với K khác O và thuộc đoạn thẳng AO. Gọi M là giao điểm của đường thẳng HK và BC.

1) Chứng minh bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh tam giác MHB cân.

3) Chứng minh M là trung điểm của BC.

4) Cho điểm E nằm bên ngoài đường tròn (O) và một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua E, đồng thời cắt (O) tại hai điểm phân biệt P, Q. Giả sử bán kính đường tròn (O) bằng a. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OPQ theo a.

Câu V (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $f(x)=x^2+ax+b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Tìm a, b biết rằng $f(2)=-5$ và $f(3)=7$.

2) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=1+\frac{3}{xy+yz+xz}$.

------------------HẾT------------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Chữ ký giám thị 1: .... Chữ ký giám thị 2: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẬU GIANG

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT, THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

(*Hướng dẫn chấm gồm 04 trang*)

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

2. Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong tổ chấm thi.

3. Điểm bài thi là điểm sau khi cộng điểm toàn bài thi và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Câu I (2,0 điểm)

1) Tính giá trị đúng của biểu thức $A=\sqrt{43-30\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5}$ là một số nguyên.

Câu	Nội dung	Điểm
1	Ta có $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(5-3\sqrt{2}\right)^2}=5-3\sqrt{2}$. $\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=2-\sqrt{2}$. Từ đó, ta có $A=7-4\sqrt{2}$.	0,25 0,25 0,25
2	Ta có $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5}=n+\dfrac{4}{n-5}$.	0,25
	Khi đó $\dfrac{n^2-5n+4}{n-5}=n+\dfrac{4}{n-5}$ là số nguyên khi và chỉ khi $4\vdots(n-5)$.	0,25
	Ta có 6 trường hợp: $n-5=-1\Leftrightarrow n=4$ (nhận) hoặc $n-5=1\Leftrightarrow n=6$ (nhận) $n-5=-2\Leftrightarrow n=3$ (nhận) hoặc $n-5=2\Leftrightarrow n=7$ (nhận) $n-5=-4\Leftrightarrow n=1$ (nhận) hoặc $n-5=4\Leftrightarrow n=9$ (nhận).	0,75

Câu II (3,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$ (1) (với m là tham số thực).

a) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

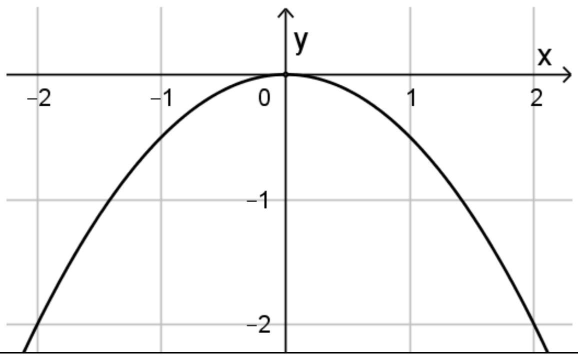
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $1<x_1<x_2$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2\sqrt{x}=4 \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}=x \end{cases}$, **với** $x,y\in\mathbb{R}$.

Câu	Nội dung	Điểm
1	a) Khi $m=3$, phương trình (1) trở thành $x^2-7x+11=0$.	0,25
	Ta có $\Delta=49-4.1.11=5>0$.	0,25
	Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.	0,5
	b) Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4.1.(m^2+2)=4m-7$. Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khi và chỉ khi $\Delta>0\Leftrightarrow m>\dfrac{7}{4}$ (*)	0,25 0,25
	Với điều kiện (*), theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1x_2=m^2+2 \end{cases}$. Khi đó $1<x_1<x_2\Leftrightarrow 0<x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-1+x_2-1>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-2>0 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1-2>0 \\ m^2+2-2m-1+1>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{2} \\ m^2-2m+2>0 \end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$. So với điều kiện (*), ta nhận: $m>\dfrac{7}{4}$.	0,25
2	Ta có $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2\sqrt{x}=4 & (1) \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$	
	Dễ thấy $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$. Từ phương trình (2), ta có: $2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}$ (3)	0,25

		Đặt $\begin{cases}u=2y>0\\ v=\frac{1}{x}>0\end{cases}$. Từ (3), ta có $u+u\sqrt{u^2+1}=v+v\sqrt{v^2+1}\Leftrightarrow u+\sqrt{u^4+u^2}=v+\sqrt{v^4+v^2}$ $\Leftrightarrow (u-v)\left[1+\frac{(u+v)(u^2+v^2+1)}{\sqrt{u^4+u^2}+\sqrt{v^4+v^2}}\right]=0\Leftrightarrow u=v.$ Với $u=v,$ ta có $2xy=1.$	0,25
		Thay $2xy=1$ vào phương trình (1), ta có: $x^3+x+2\sqrt{x}-4=0$ (4) Đặt $t=\sqrt{x}>0.$ Từ (4), ta có $t^6+t^2+2t-4=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^5+t^4+t^3+2t+4\right)=0\Leftrightarrow t=1$ (do $t^5+t^4+t^3+2t+4>0$)	0,25
		Với $t=1,$ ta có $\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}.$ Vậy $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}.$	0,25

Câu III (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ $(Oxy),$ cho hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị $(P).$ Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $(P).$

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$-\infty$ ↗</td><td>0</td><td>↘ $-\infty$</td></tr>
</table></td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Một số giá trị cụ thể: cho $x=0\Rightarrow y=0.$ Cho $x=\pm2\Rightarrow y=-2.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Đồ thị

</td><td>0,5</td></tr>
</table>

Câu IV (2,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn $(O).$ Gọi D là điểm đối xứng của B qua $O.$ Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc

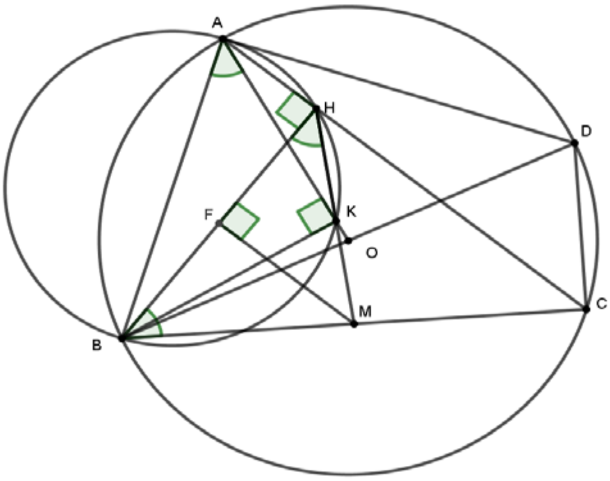
của điểm B lên AC và AO, với K khác O và thuộc đoạn thẳng AO. Gọi M là giao điểm của đường thẳng HK và BC.

1) Chứng minh bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh tam giác MHB cân.

3) Chứng minh M là trung điểm của BC.

4) Cho điểm E nằm bên ngoài đường tròn (O) và một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua E, đồng thời cắt (O) tại hai điểm phân biệt P, Q. Giả sử bán kính đường tròn (O) bằng a. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OPQ theo a.

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
1	Hình vẽ thể hiện được đầy đủ giả thiết.  	0,25
	a) Ta có $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90^0$ nên tứ giác $ABKH$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AB. Do đó, bốn điểm A, B, K, H cùng thuộc một đường tròn.	0,5
	b) Ta có $\widehat{BAK} = \widehat{BAO} = \widehat{BHK} = \widehat{BHM}$ (1) ; $\widehat{ABH} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (2) và $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ (3) Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $\widehat{MBH} = \widehat{BHM}$. Suy ra ΔMBH cân tại M.	0,5
	c) Gọi F là trung điểm của BH. Do ΔMBH cân tại M nên $MF \perp BH$. Mặt khác, ta có $BH \perp HC$. Suy ra $MF // HC$. Suy ra $\frac{BF}{BH} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra M là trung điểm của BC.	0,5
	d) Kẻ đường cao $QI, I \in PO$. Ta có $S = \frac{1}{2}.OP.QI = \frac{1}{2}a.QI \le \frac{1}{2}a.QO = \frac{1}{2}a^2$. $S = \frac{1}{2}a^2$ khi và chỉ khi $I \equiv O$ hay tam giác OPQ vuông tại O (tam giác OPQ luôn tồn tại vì luôn tồn tại hai điểm P và Q thuộc (O) sao cho $\widehat{POQ} = 90^0$ và đường thẳng PQ đi qua điểm E).	0,25 0,25

	Vậy $S_{\max}=\frac{1}{2}a^2$ là diện tích lớn nhất của tam giác OPQ.	0,25

Câu V (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $f(x)=x^2+ax+b$ (với $a,b\in\mathbb{R}$). Tìm a,b biết rằng $f(2)=-5$ và $f(3)=7$.

2) Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=1+\frac{3}{xy+yz+xz}$.

Câu	Nội dung	Điểm
1	Ta có $f(2)=-5\Leftrightarrow 2a+b=-9$ và $f(3)=7\Leftrightarrow 3a+b=-2$.	0,25
	Giải hệ $\begin{cases}2a+b=-9\\3a+b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\b=-23\end{cases}$.	0,25
2	Dễ thấy với mọi số thực dương a và b, ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (*) Áp dụng (*), với $a=1$ và $b=\frac{3}{xy+yz+xz}$, ta có $P\ge 2\sqrt{\frac{3}{xy+yz+xz}}$ (**)	0,25
	Với các số thực $x,\ y,\ z,$ ta luôn có: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz$. Suy ra $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+xz)$ hay $\frac{3}{xy+yz+xz}\ge\frac{3^2}{(x+y+z)^2}$ (***)	0,25
	Từ (**) và (***), ta suy ra $P\ge 2\sqrt{\frac{3^2}{(x+y+z)^2}}=\frac{6}{x+y+z}=\frac{6}{3}=2$.	0,25
	$P=2\Leftrightarrow x=y=z=1$. Vậy $P_{\min}=2$ là giá trị nhỏ nhất.	0,25

-------------------**HẾT**-------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO 10 – TP.HCM

MÔN: TOÁN CHUYÊN

17/07/2020

Đề số 6

ĐỀ THI

Bài 1. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2020$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right):(a+b+c)$.

Bài 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<BC<CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Bài 4.

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b\le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}$.

Bài 5. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt d, BC lần lượt tại L, H.

a) Chứng minh: E, F, L thẳng hàng.

b) JA, JF cắt BC lần lượt tại M, K. Chứng minh $MH=MK$.

Bài 6. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $3^x-y^3=1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2020$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right):(a+b+c)$.

Hướng dẫn giải.

$$P=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{a+b+c}\left[a\left(\frac{a+b+c}{b+c}-1\right)+b\left(\frac{a+b+c}{c+a}-1\right)+c\left(\frac{a+b+c}{a+b}-1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{a+b+c}\cdot\left[\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)(a+b+c)-(a+b+c)\right]$$
$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}-1=2020-1=2019$$

Bài 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2-2xy=8x^2-6x+1\\y^2=x^3+8x^2-x+1\end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Đặt $a=\sqrt{2x^2+x+9}\geq 0,\ b=\sqrt{2x^2-x+1}\geq 0$.

Ta có: $a^2-b^2=2x+8=2(x+4)$. Từ phương trình đã cho, ta được:

$$a^2-b^2=2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a-b=2\ \left(\text{do } a=\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{71}{8}}>0 \text{ nên } a+b>0\right).$$

Như vậy:

$$\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2x^2-x+1}+2\Rightarrow 2x^2+x+9=2x^2-x+1+4\sqrt{2x^2-x+1}+4$$
$$\Rightarrow x+2=2\sqrt{2x^2-x+1}\Rightarrow x^2+4x+4=4\left(2x^2-x+1\right)$$
$$\Rightarrow 7x^2-8x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{8}{7}\end{array}\right.$$

Thử lại, ta suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{0;\frac{8}{7}\right\}$.

b) $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 & (1)\\ y^2=x^3+8x^2-x+1 & (2)\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow (x-y)^2=(3x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=3x-1\\ x-y=1-3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1-2x\\ y=4x-1\end{array}\right.$$

TH1: $y=1-2x$.

Thay $y=1-2x$ vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&(1-2x)^2=x^3+8x^2-x+1\\ \Leftrightarrow\ &1-4x+4x^2=x^3+8x^2-x+1\\ \Leftrightarrow\ &x^3+4x^2+3x=0\\ \Leftrightarrow\ &x\left(x^2+4x+3\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2+4x+3=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1\\ x=-3\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó trong trường hợp này ta tìm được các nghiệm $(x;y)\in\left\{(0;1),(-1;3),(-3;7)\right\}$.

TH2: $y=4x-1$.

Thay $y=4x-1$ vào (2) ta được

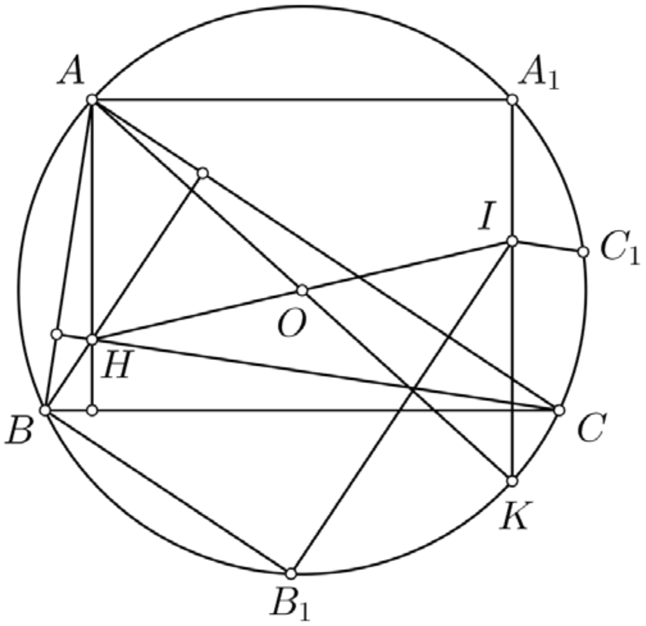
$$\begin{aligned}&(4x-1)^2=x^3+8x^2-x+1\\ \Leftrightarrow\ &16x^2-8x+1=x^3+8x^2-x+1\\ \Leftrightarrow\ &x^3-8x^2+7x=0\\ \Leftrightarrow\ &x\left(x^2-8x+7\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2-8x+7=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\\ x=7\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó trong trường hợp này ta tìm được các nghiệm $(x;y)\in\left\{(0;-1),(1;3),(7;27)\right\}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)\in\left\{(0;1),(-1;3),(-3;7),(0;-1),(1;3),(7;27)\right\}$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<BC<CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1,B_1,C_1 lần lượt vuông góc với BC,CA,AB đồng quy.

Hướng dẫn giải.



Gọi H là trực tâm ΔABC.

Kẻ AK là đường kính của (O). Suy ra $A_1K \perp AA_1$. Mà $AA_1 // BC$ nên $A_1K \perp BC$.

Do đó $A_1K // AH$.

Gọi I là điểm đối xứng của H qua O. Suy ra $AHKI$ là hình bình hành, suy ra $KI // AH$.

Mà $AH // AK$ nên $I \in A_1K$.

Vậy đường thẳng qua A_1 và vuông góc với BC đi qua I.

Chứng minh tương tự, ta có:

Đường thẳng qua B_1 và vuông góc với AC đi qua I.

Đường thẳng qua C_1 và vuông góc với AB đi qua I.

Vậy các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại I.

Bài 4.

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b \leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = b - a + \frac{20}{a} + \frac{7}{b}$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2+2)} \geq 0$ (luôn đúng với mọi a,b là số thực).

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$Q = b - a + \frac{20}{a} + \frac{7}{b} = -6(a+b) + 5a + \frac{20}{a} + 7b + \frac{7}{b} \geq -6 \cdot 3 + 20 + 14 = 16$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$.

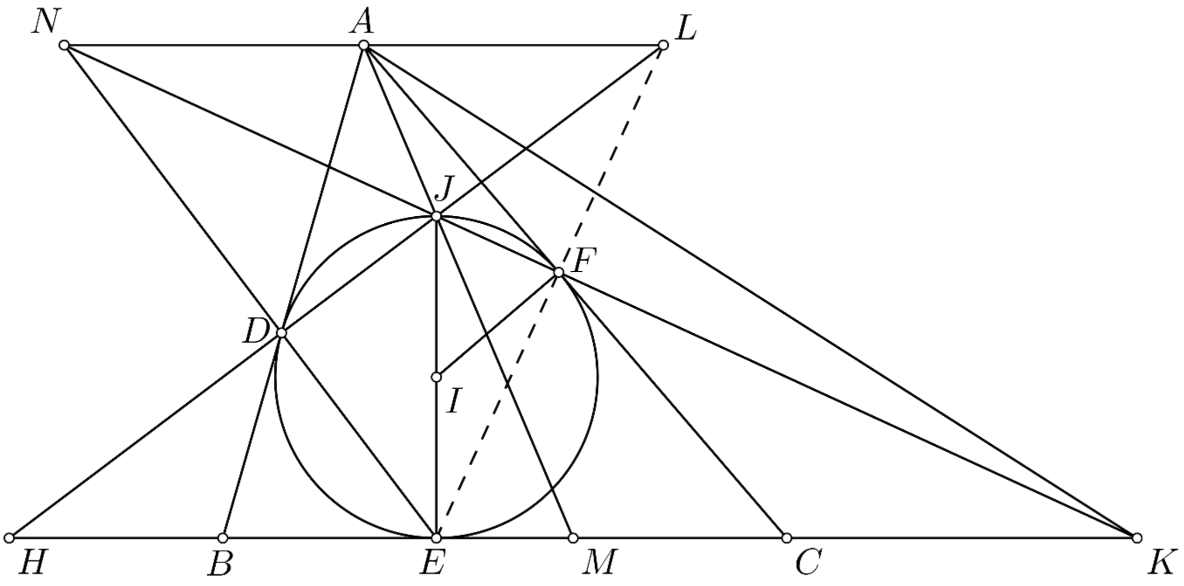
Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 16.

Bài 5. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt d, BC lần lượt tại L, H.

a) Chứng minh: E, F, L thẳng hàng.

b) JA, JF cắt BC lần lượt tại M, K. Chứng minh $MH = MK$.

Hướng dẫn giải.



Vẽ DE cắt AL tại N

Xét tam giác NLE có: $\begin{cases} JE \perp NL\,(NL // CB) \\ LJ \perp NE\,(DJ \perp NE) \end{cases}$

Suy ra J là trực tâm tam giác NLE, do đó $NJ \perp LE$.

Lại có: $\widehat{NDA} = \widehat{BDE} = \widehat{BED} = \widehat{AND} \Rightarrow AN = AD$.

Mà ΔNDL vuông tại D nên $AN = AD = AL \Rightarrow AN = AL = AF$ (do $AD = AF$).

Do đó ΔNFL vuông tại F hay $NF \perp LF$. Mặt khác

$\widehat{NFA} = \frac{1}{2}\widehat{FAL} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{IEF} = \widehat{JFA} \Rightarrow N, J, F$ thẳng hàng.

Do đó $NJ \perp LE$ và $NJ \perp LF$. Suy ra E, F, L thẳng hàng.

Cách 2: Vì $AL // CE$ nên $\widehat{LAF} = \widehat{FCE}$. Hai tam giác ALF, CEF đều cân mà có các góc ở đỉnh bằng nhau nên chúng đồng dạng. Suy ra $\widehat{AFL} = \widehat{CFE}$, suy ra L, F, E thẳng hàng.

b)

Do $AN = AL$ nên $MH = MK$ (bổ đề hình thang cho hình thang $NLKH$ có $NK \cap HL = J$).

Chứng minh bổ đề.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{NA}{MK} = \dfrac{JA}{JM} \\ \dfrac{AL}{MH} = \dfrac{JA}{JM} \end{cases}$, mà $AN = AL$ (chứng minh câu a))

Suy ra: $MK = MH$.

Bài 6. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $3^x - y^3 = 1$.

Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết ta có $y^3 = 3^x - 1$, suy ra y^3 chia 3 dư 2, do đó y chia 3 dư 2.

Như vậy $y = 3n + 2$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó:

$$3^x = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1) = (3n+2+1)\left[(3n+2)^2 - (3n+2) + 1\right] = 9(n+1)(3n^2 + 3n + 1).$$

Ta thấy rằng số nguyên dương $(3n^2 + 3n + 1)$ là ước của 3^x nhưng lại không chia hết cho 3, do đó $3n^2 + 3n + 1 = 1$, tức là $n = 0$. Vậy $y = 2, x = 2$.

Cách 2: Ta có $3^x = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$. Do đó, tồn tại các số tự nhiên u, v sao cho

$$\begin{cases} y + 1 = 3^u \\ y^2 - y + 1 = 3^v \end{cases}.$$

Vì $y + 1 > 1$ nên $3^u > 1$ hay $u \geq 1$. Rút $y = 3^u - 1$, thay vào phương trình dưới, ta có

$$(3^u - 1)^2 - (3^u - 1) + 1 = 3^v \text{ hay}$$

$$3^{2u} - 3 \cdot 3^u + 3 = 3^v \Leftrightarrow 3^{2u-1} - 3^u + 1 = 3^{v-1}.$$

Vì vế phải nguyên nên ta phải có $v - 1 \geq 0$ hay $v \geq 1$. Tuy nhiên, nếu $v - 1 > 0$ thì 3^{v-1} chia hết cho 3, trong khi vế trái không chia hết cho 3, vô lý. Do đó, $v = 1$ hay

$$y^2 - y + 1 = 3 \Leftrightarrow y^2 - y = 2.$$

Giải ra được $y = 2$. Thay vào đề bài, ta được $3^x = y^3 + 1 = 9$ nên $x = 2$.

Vậy nên tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $(x, y) = (2; 2)$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 7

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2020 - 2021
MÔN: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. *(1,5 điểm)* Giả sử a, b, c là các số thực khác 0 sao cho hệ phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-2x^2y=1 \\ 2x^2+y^2-2y=2. \end{cases}$

b) Giải phương trình $2(x-2)\sqrt{x+2}=-x^2+3x+3$.

Câu 3. *(2,5 điểm)*

a) Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $2n+2021$ và $3n+2020$ đều là các số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x; y) sao cho $\dfrac{x^2-2}{xy+2}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 4. *(2,5 điểm)* Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai tâm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Đường thẳng d thay đổi đi qua B cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D (d không trùng với đường thẳng AB).

a) Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.

b) Gọi M là điểm di chuyển từ điểm A, ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O); N là điểm di chuyển từ điểm A, cùng chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O') sao cho $\widehat{AOM}$ luôn bằng $\widehat{AO'N}$. Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2z^2+y^2z^2+1\le 3z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{8}{(y+3)^2}+\dfrac{4z^2}{(1+2z)^2}$.

----- HẾT -----

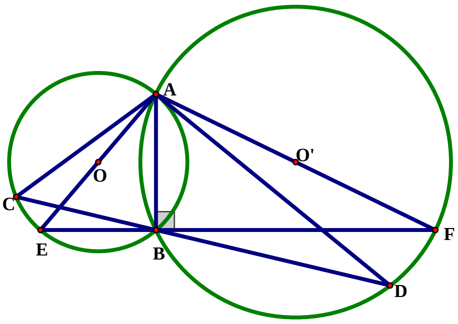
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

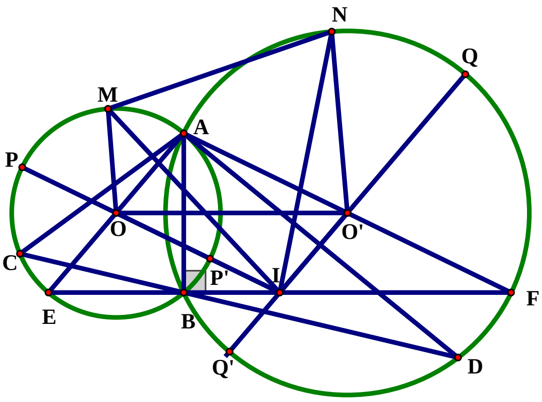
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1	Cộng theo vế của các phương trình, ta có $(a+b+c)(x+y)=a+b+c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y=1 \end{array}\right.$ Trường hợp 1. $a+b+c=0$. Khi đó $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)=3abc \Rightarrow \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$ Trường hợp 2. $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$, Thay vào hệ ta có $\begin{cases} ax+b(1-x)=c \\ bx+c(1-x)=a \\ cx+a(1-x)=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a-b)=c-b \\ x(b-c)=a-c \end{cases} (II)$ Nếu $\left[\begin{array}{l} a=b \\ b=c \end{array}\right.$ Từ (II) suy ra $a=b=c$, suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$ Nếu $\begin{cases} a\neq b \\ b\neq c \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x=\frac{c-b}{a-b} \\ x=\frac{a-c}{b-c} \end{cases} \Rightarrow \frac{c-b}{a-b}=\frac{a-c}{b-c} \Leftrightarrow cb-c^2-b^2+bc=a^2-ab-ac+bc$ $\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$ (Vô lí do $a\neq b, b\neq c$). Vậy trong trường hợp 2 ta có $a=b=c$.Suy ra $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$ Chú ý: Có thể giải theo cách sau $a^3+b^3+c^3=a^2(bx+cy)+b^2(cx+ay)+c^2(ax+by)$ $=ab(ax+by)+bc(bx+ay)+ac(cx+ay)=3abc$, suy ra $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$

Câu 2a	Giải hệ $\begin{cases} x^4-2x^2y=1 & (1)\\ 2x^2+y^2-2y=2 & (2)\end{cases}$ Từ phương trình (1) và (2), ta có $\left(x^4-2x^2y+y^2\right)+2\left(x^2-y\right)-3=0$ $\Leftrightarrow \left(x^2-y\right)^2+2\left(x^2-y\right)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-y=1\\ x^2-y=-3\end{array}\right.$ Với $x^2-y=1$, thay vào phương trình (2), ta có $2(y+1)+y^2-2y=2 \Leftrightarrow y=0$, khi đó $x=1$ hoặc $x=-1$; Với $x^2-y=-3$, thay vào phương trình (2), ta có $2(y-3)+y^2-2y-2=0 \Leftrightarrow y=\pm2\sqrt{2}$ Khi đó $x^2=-3\pm2\sqrt{2}<0$ không thỏa mãn; Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(1;0)$ và $(-1;0)$.
Câu 2b	b) Điều kiện $x\ge -2$; Ta có $2(x-2)\sqrt{x+2}=-x^2+3x+3$ $\Leftrightarrow \left(x-2+\sqrt{x+2}\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2+\sqrt{x+2}=3\\ x-2+\sqrt{x+2}=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+2}=5-x & (1)\\ \sqrt{x+2}=-1-x & (2)\end{array}\right.$ $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5\\ x^2-11x+23=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5\\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{29}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$ $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1\\ x^2+x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.$ Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$ và $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Câu 3a	Đặt $x^2=2n+2021$; $y^2=3n+2020$ Suy ra $3x^2-2y^2=2023$. $(x,y\in N^*)$ Từ phương trình trên suy ra x^2là số lẻ đặt $x=2m+1$ $(m\in N)$ Ta có $3(2m+1)^2-2y^2=2023 \Leftrightarrow 3.4m(m+1)-2y^2=2020$ $\Leftrightarrow 3.2m(m+1)-1010=y^2 \Leftrightarrow 3.2m(m+1)-1012=y^2-2$ Ta có $m(m+1)\vdots 2$, suy ra $2m(m+1)\vdots 4$, đồng thời $1012\vdots 4$, suy ra $(y^2-2)\vdots 4$ Mặt khác, y^2là số chính phương nên $y^2\equiv 0(\bmod 4)$ hoặc $y^2\equiv 1(\bmod 4)$

	Nên không tồn tại y để $(y^2-2)\vdots 4$. Vậy không tồn tại n thỏa mãn điều kiện trên
Câu 3b	Từ giả thiết suy ra $\frac{y\left(x^2-2\right)}{xy+2}$ là số nguyên. Ta có $\frac{y\left(x^2-2\right)}{xy+2}=\frac{x(xy+2)-2(x+y)}{xy+2}=x-\frac{2(x+y)}{xy+2}$ Suy ra tồn tại giá trị k nguyên dương sao cho $2\left(x+y\right)=k(xy+2)$ Nếu $k\ge 2$, ta có $k(xy+2)\ge 2\left(xy+2\right)$, suy ra $x+y\ge xy+2\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(y-1\right)+1\le 0$ (1) Do $x\ge 1, y\ge 1\Rightarrow \left(x-1\right)\left(y-1\right)\ge 0$ nên bất phương trình (1) vô nghiệm. Nếu $k=1$, ta có $2\left(x+y\right)=xy+2\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=2$ (2) Giải ra ta được các cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn (2) là $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases},\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases},\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$. Thử lại ta có $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$ là cặp số nguyên duy nhất thỏa mãn.
Câu 4a	 Kéo dài AO cắt (O) tại E, kéo dài AO′ cắt đường tròn (O′) tại F. Suy ra E, B, F thẳng hàng. Ta có $\widehat{ACD}=\widehat{AEF}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ của (O)). $\widehat{AFE}=\widehat{ADC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ của (O′)). Nên ΔACD và ΔAEF đồng dạng Suy ra $\frac{AC}{AE}=\frac{CD}{EF}$, do $\frac{AC}{AE}\le 1\Rightarrow \frac{CD}{EF}\le 1\Rightarrow CD\le EF$ (không đổi) Vậy CD lớn nhất khi d đi qua B và vuông góc với AB.

Câu 4b	 	Gọi I là trung điểm của EF. Ta có O’I song song và bằng đoạn OA, suy ra $AOIO'$ là hình bình hành Suy ra $\widehat{AOI}=\widehat{AO'I}$ Do $\widehat{MOA}=\widehat{AO'N}$ và M, N di chuyển ngược chiều. Xét hai trường hợp Trường hợp 1. M trùng P hoặc P’. - Nếu M trùng P khi đó N trùng Q Suy ra $IM=IP=IO+OP=O'I+O'Q=IN$ - Nếu M trùng P' khi đó N trùng Q' Suy ra $IM=IP'=IO-OP'=O'Q'-O'I=IQ'=IN$
	TH2. Nếu M không trùng P và P’ khi đó N không trùng với Q và Q' Do $\widehat{MOA}=\widehat{NO'A}$ và $\widehat{AOI}=\widehat{AO'I}$ suy ra $\widehat{MOI}=\widehat{IO'N}$ Ta có $MO=IO'$; $OI=O'N$ Suy ra $\Delta MOI=\Delta IO'N\Rightarrow IM=IN$ Trong mọi trường hợp ta luôn có $IM=IN$,suy ra trung trực của đoạn MN luôn đi qua điểm I cố định	

Câu 5	Chứng minh BĐT $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{8}{(a+b)^2}$ với $\forall a,b>0$. Ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab}$; mặt khác $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow\frac{1}{ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}$ suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{8}{(a+b)^2}$ $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2z}+1\right)^2}+\frac{8}{(y+3)^2}\ge\frac{8}{\left(x+\frac{1}{2z}+2\right)^2}+\frac{8}{(y+3)^2}\ge\frac{64}{\left(x+y+\frac{1}{2z}+5\right)^2}$ Từ giả thiết suy ra z là số dương, ta có $x^2z^2+y^2z^2+1\le 3z\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{1}{z^2}\le\frac{3}{z}$. Đặt $\frac{1}{z}=t$ suy ra $x^2+y^2+t^2\le 3t$. Ta có $P=\frac{64}{\left(x+y+\frac{1}{2z}+5\right)^2}=\frac{256}{(2x+2y+t+10)^2}$. Ta có $2x\le x^2+1$; $2y\le y^2+1$; $4t\le t^2+4$, suy ra $2x+2y+4t\le x^2+y^2+t^2+6\le 3t+6$ Suy ra $2x+2y+t\le 6$. Suy ra $P\ge\frac{256}{(6+10)^2}=1$, dấu = xảy ra khi $x=y=1, z=\frac{1}{2}$. Vậy GTNN của P bằng 1.

UBND TỈNH THÁI NGUYÊN
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 8

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2020 - 2021
MÔN: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Tin)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1 ***(1,0 điểm).*** Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức

$$A=\sqrt{2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\sqrt{-1+4\sqrt{7-4\sqrt{3}}}.$$

Câu 2 ***(1,0 điểm).*** Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

Câu 3 ***(1,0 điểm).*** Tìm các cặp số nguyên dương $(x;\ y)$ thỏa mãn $x^2=y^2+y+8$.

Câu 4 ***(1,0 điểm).*** Chứng minh $P=5+17^{2019}+2020^{2021}$ không là số chính phương.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho một bảng ô vuông có kích thước 2020×2020 (gồm 2020 hàng và 2020 cột). Người ta tô màu đen 3030 ô vuông bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra 1010 hàng và 1010 cột của bảng sao cho các ô được tô màu đen đều nằm trên 1010 hàng hoặc 1010 cột đã chọn.

Câu 6 ***(2,0 điểm).*** Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt C, D. Trên đường tròn (O), lấy điểm M nằm trên cung nhỏ AC với $M\neq A, M\neq C$. Đoạn thẳng BM cắt đường tròn (A) tại điểm N. Chứng minh :

a) $\widehat{CMB}=\widehat{DMB}$.

b) $MN^2=MC.MD$.

Câu 7 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi H, I lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

a) Chứng minh $\widehat{HAI}=\widehat{OAI}$.

b) Cho $\widehat{BAC}=30^0$, tính độ dài đoạn thẳng AH theo R.

------ HẾT ------

Họ và tên thí sinh:…………………………...............**Số báo danh**………

UBND TỈNH THÁI NGUYÊN
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2020- 2021
MÔN THI: TOÁN
Dành cho chuyên Tin

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Bản hướng dẫn chấm gồm có ***03*** *trang)*

I. Hướng dẫn chung

- Giám khảo cần nắm vững yêu cầu của hướng dẫn chấm để đánh giá đúng bài làm của thí sinh. Thí sinh làm cách khác đáp án nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Khi vận dụng đáp án và thang điểm, giám khảo cần chủ động, linh hoạt với tinh thần trân trọng bài làm của học sinh.

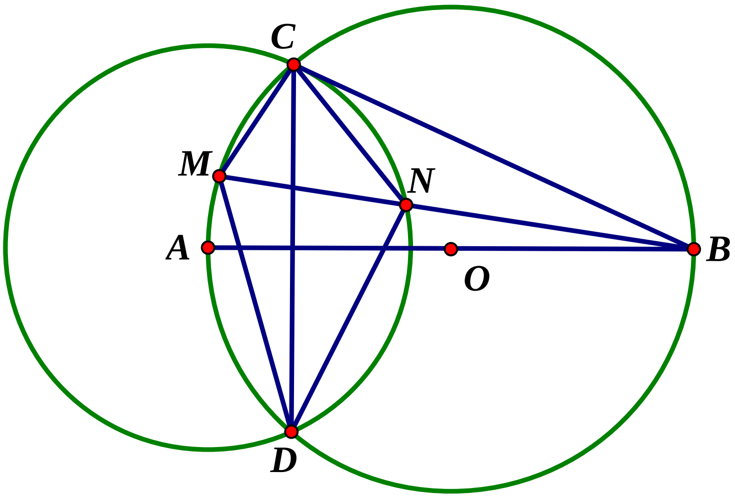
- Nếu có việc chi tiết hóa điểm các ý cần phải đảm bảo không sai lệch với tổng điểm và được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.

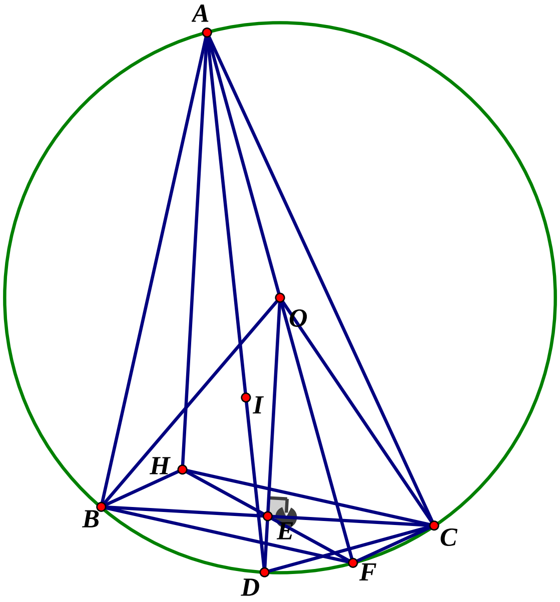
- Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu hỏi trong đề thi, chấm điểm lẻ đến 0,25 và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Ta có: $A=\sqrt{2-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\sqrt{-1+4\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ $=\sqrt{2-2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}+\sqrt{-1+4\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}$ $=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ $=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$ $=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1$	**0.25** **0.25** **0.25** **0.25**
Câu 2	Ta có: $\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ \dfrac{5}{xy}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$	**0.25**

	$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=9\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-3\\ xy=2\end{cases}\end{array}\right.$ TH1: $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}$ suy ra $x,\ y$ là nghiệm của phương trình $X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=1\\ X=2\end{array}\right.$ Ta có hai nghiệm $(1,\ 2);\ (2,\ 1)$. TH2: $\begin{cases}x+y=-3\\ xy=2\end{cases}$ suy ra $x,\ y$ là nghiệm của phương trình $X^2+3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=-1\\ X=-2\end{array}\right.$ Ta có hai nghiệm $(-1,-2);\ (-2,-1)$. Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1,\ 2);\ (2,\ 1);\ (-1,-2);\ (-2,-1)$.	0.25 0.25 0.25
Câu 3	Ta có: $x^2=y^2+y+8$ $\Leftrightarrow 4x^2=4y^2+4y+32$ $\Leftrightarrow (2x)^2=(2y+1)^2+31$ $\Leftrightarrow (2x-2y-1)(2x+2y+1)=31$ (*) Vì $x,\ y$ là các số nguyên dương nên ta có $1\le 2x-2y-1<2x+2y+1$ Nên từ (*) suy ra $\begin{cases}2x-2y-1=1\\ 2x+2y+1=31\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=8\\ y=7\end{cases}$	**0.5** 0.25 0.25
Câu 4	Ta có: $5\equiv 1(\text{mod } 4)$ $17\equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow 17^{2019}\equiv 1(\text{mod } 4)$ $2020^{2012}\equiv 0(\text{mod } 4)$ Suy ra $P\equiv 2(\text{mod } 4)$ Vậy P không là số chính phương vì một số chính phương chia cho 4 chỉ có dư là 0 hoặc 1.	0.25 0.25 0.25 0.25

Câu 5	Vì có 2020 cột nên ta có thể chọn ra 1010 cột có số ô được tô màu đen nhiều nhất. Khi có có hai khả năng xảy ra: **Khả năng 1:** Trong 1010 cột đã chọn chứa hết 3030 ô màu đen, khi đó ta chọn 1010 hàng bất kì thì bài toán được giải quyết. **Khả năng 2:** Trong 1010 cột đã chọn không chứa đủ 3030 ô màu đen. Ta đi chứng minh số ô màu đen còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 1010. Khi đó, ta chỉ cần chọn ra 1010 hàng chứa các ô màu đen còn lại thì bài toán được chứng minh. Thật vậy, giả sử số ô màu đen còn lại lớn hơn 1010 (hay tổng số ô đen trong 1010 cột đã chọn nhỏ hơn 2020). Theo nguyên lý Dirichlet, trong 1010 cột còn lại không được chọn, có ít nhất 1 cột chứa hai ô màu đen. Mặt khác vì 1010 cột ta chọn chứa số ô màu đen nhiều nhất nên mỗi cột phải chứa ít nhất 2 ô đen. Suy ra tổng số ô đen trong 1010 cột đã chọn lớn hơn hoặc bằng 2020 (mâu thuẫn) Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.	**1.0** **1.0**
Câu 6	 a) Ta có AB là đường trung trực của CD suy ra trên $\left(O\right)$ có $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{DB}$. Do đó $\widehat{CMB}=\widehat{DMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau) (1) b) Ta có : $\widehat{CNM}=\widehat{CBM}+\widehat{NCB}=\widehat{CDM}+\widehat{NCB}$ Mặt khác ta có $\widehat{ACB}=90^0$ (chắn nửa đường tròn) suy ra BC là tiếp tuyến của $\left(A\right)$ Do đó $\widehat{NCB}=\widehat{CDN}\Rightarrow\widehat{CNM}=\widehat{CDM}+\widehat{CDN}=\widehat{MDN}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra tam giác MNC và tam giác MDN đồng dạng (g-g). Suy ra $\frac{MN}{MD}=\frac{MC}{MN}\Rightarrow MN^2=MC.MD.$	**0.5** **0.5** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25**

Câu 7	 a) Kẻ AI cắt (O) tại D suy ra D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ hay OD là đường trung trực của BC. Gọi OD cắt BC tại E, khi đó E là trung điểm của BC Ta có ΔAOD cân tại O suy ra $\widehat{OAD}=\widehat{ODA}$ (1). Mặt khác ta có $AH//OD$ (cùng vuông góc với AB) suy ra $\widehat{HAD}=\widehat{ODA}\,(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OAD}=\widehat{HAD}$. b) Kẻ đường kính AF của đường tròn (O) suy ra $\widehat{ACF}=\widehat{ABF}=90^0$ (chắn nửa đường tròn). Xét tứ giác $BHCF$ có $\begin{cases} BH//CF\ (\text{cùng vuông góc với } AC) \\ CH//BF\ (\text{cùng vuông góc với } AB) \end{cases}$ suy ra $BHCF$ là hình bình hành hay E là trung điểm của HF. Xét ΔAHF có OE là đường trung bình nên suy ra $AH=2OE$ $(*)$. Mặt khác theo đề bài ta có: $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=60^0$ suy ra tam giác BOC đều Khi đó $OE=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (**) Từ (*) và (**) suy ra $AH=R\sqrt{3}$.	**0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25**

---- Hết---

UBND TỈNH THÁI NGUYÊN
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 9

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2020 - 2021
MÔN: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1 *(1,5 điểm)*. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $ab = 2$. Chứng minh

$$a^9 + b^9 = \left(a^4 + b^4\right)\left(a^5 + b^5\right) - 16(a + b).$$

Câu 2 *(1,5 điểm)*. Giải phương trình $\sqrt{16x^2 - 1} - 2\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x - 1} = 2$.

Câu 3 *(1,0 điểm)*. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 3b + 5c = 2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3ab}{a + 3b} + \dfrac{15bc}{3b + 5c} + \dfrac{5ca}{5c + a}$.

Câu 4 *(1,0 điểm)*. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương. Chứng minh $15n + 8$ là hợp số.

Câu 5 *(1,0 điểm)*. Bạn Chi được thưởng mỗi ngày ít nhất một chiếc kẹo, nhưng trong 7 ngày liên tiếp, tổng số kẹo Chi nhận được không quá 10 chiếc. Chứng minh trong một số ngày liên tiếp, tổng số kẹo Chi nhận được là 27 chiếc.

Câu 6 *(2,0 điểm)*. Cho đường tròn (O), từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M khác D.

a) Chứng minh tam giác AMB và tam giác ABD đồng dạng.

b) Gọi N là giao điểm của BM và AO. Chứng minh $NH^2 = NM.NB$.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC. Điểm M thuộc cạnh BC với $M \neq B, M \neq C$. Đường tròn (I_1, r_1) nội tiếp tam giác AMC. Đường thẳng song song với BC, tiếp xúc với đường tròn (I_1, r_1) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại B', C'. Gọi N là giao điểm của AM với $B'C'$, đường tròn (I_2, r_2) nội tiếp tam giác $AB'N$. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, I, I_1, I_2 cùng nằm trên một đường tròn.

b) $r = r_1 + r_2$.

------ HẾT ------

Họ và tên thí sinh:…………………….………………..............**Số báo danh**………

UBND TỈNH THÁI NGUYÊN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2020- 2021

MÔN THI: TOÁN

Dành cho chuyên Toán

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Bản hướng dẫn chấm gồm có ***04*** *trang)*

I. Hướng dẫn chung

- Giám khảo cần nắm vững yêu cầu của hướng dẫn chấm để đánh giá đúng bài làm của thí sinh. Thí sinh làm cách khác đáp án nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Khi vận dụng đáp án và thang điểm, giám khảo cần chủ động, linh hoạt với tinh thần trân trọng bài làm của học sinh.

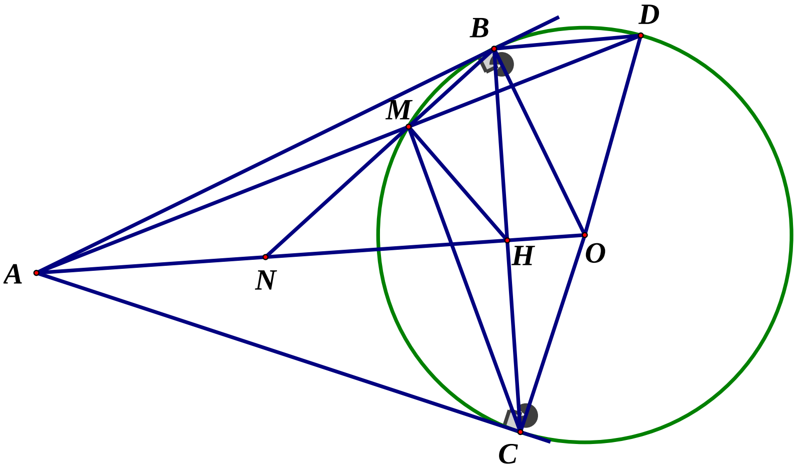
- Nếu có việc chi tiết hóa điểm các ý cần phải đảm bảo không sai lệch với tổng điểm và được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.

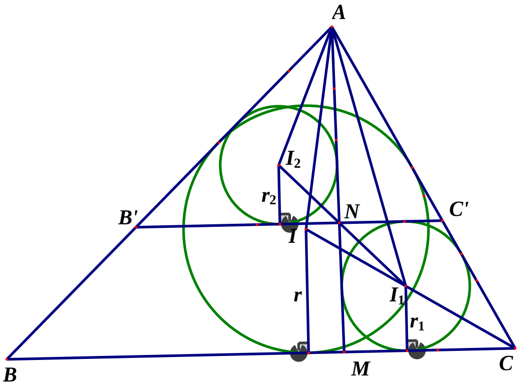
- Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu hỏi trong đề thi, chấm điểm lẻ đến 0,25 và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Ta có $\left(a^4+b^4\right)\left(a^5+b^5\right)-16(a+b)$ $=a^9+b^9+a^5b^4+a^4b^5-16(a+b)$ $=a^9+b^9+a^4b^4(a+b)-16(a+b)$ $=a^9+b^9+16(a+b)-16(a+b)$ (do $ab=2$) $=a^9+b^9$.	**0,5** **0,5** **0,5**
Câu 2	ĐK : $x\ge\frac{1}{4}$. Ta có: $\sqrt{16x^2-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}=2$ $\Leftrightarrow\sqrt{(4x+1)(4x-1)}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}-2=0$ $\Leftrightarrow\sqrt{4x+1}\left(\sqrt{4x-1}-2\right)+\sqrt{4x-1}-2=0$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x+1}+1\right)\left(\sqrt{4x-1}-2\right)=0$ (*)	**0,25** **0,25**

	Do $\sqrt{4x+1}+1>0$ với mọi $x\ge\frac{1}{4}$ nên từ (*) suy ra $\sqrt{4x-1}-2=0\Leftrightarrow 4x-1=4\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\left(TM\right)$. Vậy phương trình có một nghiệm $x=\frac{5}{4}$.	**0,5** **0,5**
Câu 3	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a và $3b$ ta có: $\frac{3ab}{a+3b}\le\frac{\left(\frac{a+3b}{2}\right)^2}{a+3b}=\frac{a+3b}{4}$ CMTT ta có: $\frac{15bc}{3b+5c}\le\frac{3b+5c}{4};\ \frac{5ca}{5c+a}\le\frac{5c+a}{4}$ Từ đó suy ra: $P\le\frac{2\left(a+3b+5c\right)}{4}=1010$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 1010 khi và chỉ khi $a=3b=5c=\frac{2020}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2020}{3}\\ b=\frac{2020}{9}\\ c=\frac{404}{3}\end{cases}.$	**0,5** **0,25** **0,25**
Câu 4	Đặt $\begin{cases}2n+1=a^2\\ 3n+1=b^2\end{cases}\left(a,\ b\in\mathbb{N}^*\right)$. Khi đó ta có: $9a^2-b^2=9\left(2n+1\right)-\left(3n+1\right)$ $\Leftrightarrow\left(3a-b\right)\left(3a+b\right)=15n+8.$ Vì $a,\ b\in\mathbb{N}^*$ suy ra $3a+b>1$. Ta cần chứng minh $3a-b>1$ Hay $3\sqrt{2n+1}-\sqrt{3n+1}>1\Leftrightarrow 3\sqrt{2n+1}>1+\sqrt{3n+1}$ $\Leftrightarrow 9\left(2n+1\right)>3n+2+2\sqrt{3n+1}\Leftrightarrow 15n+7>\sqrt{12n+4}$ (luôn đúng)	**0,25** **0,5** **0,25**

	Vậy $15n+8$ là hợp số.	
Câu 5	Xét 28 ngày liên tiếp từ ngày thứ nhất đến ngày thứ 28 mà Chi nhận được kẹo. Gọi $T(n)$ là tổng số kẹo Chi nhận được đến ngày thứ n. Vì tổng số kẹo Chi nhận được trong 7 ngày liên tiếp không vượt quá 10 chiếc nên ta có: $1 \le T(1) < T(2) < ... < T(28) \le 40$. Xét 28 số nguyên dương phân biệt $T(1),\ T(2),...,\ T(28)$. Theo nguyên lý Đirichlet, tồn tại hai số $T(a) \equiv T(b) (\bmod 27)$ với $1 \le a < b \le 28$ hay $\left[T(b)-T(a)\right] \vdots\, 27$. Mặt khác ta có: $1 \le T(b)-T(a) \le 39$ suy ra $T(b)-T(a)=27$. Vậy từ ngày thứ $a+1$ đến ngày thứ b thì Chi nhận đúng 27 chiếc kẹo.	**0,5** **0,25** **0,25**
Câu 6	 a) Xét tam giác AMB và tam giác ABD có: $\widehat{ABM}=\widehat{ADB}\left(\text{cùng bằng } \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right)$ $\widehat{A}$ chung Do đó tam giác AMB và tam giác ABD đồng dạng (g-g) b) Xét tam giác ABO vuông tại B, đường cao BH có : $AB^2=AH.AO$ (1) Mặt khác ta có hai tam giác ABM và ADB đồng dạng (g-g) suy ra $\frac{AB}{AD}=\frac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2=AM.AD$ (2).	**1,0** **0,25**

	Từ (1) và (2) suy ra $AH.AO=AM.AD$ suy ra hai tam giác AMH và AOD đồng dạng. Do đó $\widehat{MHN}=\widehat{MDC}$ Mặt khác $\widehat{MDC}=\widehat{MBC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MC}$) suy ra $\widehat{MHN}=\widehat{MBH}$ Xét hai tam giác NHM và NBH có: $\widehat{MHN}=\widehat{MBH}$, $\widehat{MNH}$ chung, suy ra hai tam giác NHM và NBH đồng dạng Do đó $\frac{NH}{NB}=\frac{NM}{NH}\Rightarrow NH^2=NB.NM$.	**0,25** **0,25** **0,25**
Câu 7	 a) Ta có: $\widehat{AI_2N}=\widehat{AI_2I_1}=180^0-\frac{\widehat{ANB'}+\widehat{B'AN}}{2}=180^0-\frac{180^0-\widehat{AB'N}}{2}=90^0+\frac{\widehat{AB'N}}{2}$. Mà $B'C'//BC$ suy ra $\widehat{AB'N}=\widehat{ABC}$ suy ra $\widehat{AI_2I_1}=90^0+\frac{\widehat{ABC}}{2}$ (1) Tương tự ta có $\widehat{AIC}=\widehat{AII_1}=90^0+\frac{\widehat{ABC}}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AI_2I_1}=\widehat{AII_1}$ do đó bốn điểm A, I_2, I, I_1 cùng nằm trên một đường tròn. **Chú ý : Ra một trong hai nội dung ở (1) hoặc (2) cho 0,5 điểm.** b) Xét tam giác AI_2I_1 và AIC có : $\widehat{I_2AI_1}=\widehat{IAC}=\frac{\widehat{BAC}}{2}$; $\widehat{AI_2I_1}=\widehat{AIC}$ do đó hai tam giác AI_2I_1 và tam giác AIC đồng dạng.	**0,5**

	Suy ra : $\frac{I_2I_1}{IC}=\frac{AI_1}{AC}$ $(*)$ Xét tam giác ANI_1 và AI_1C có : $\widehat{NAI_1}=\widehat{CAI_1};\ \widehat{AI_1N}=\widehat{ACI_1}$ do đó hai tam giác ANI_1 và tam giác AI_1C đồng dạng. Suy ra $\frac{I_1N}{CI_1}=\frac{AI_1}{AC}$ $(**)$ Từ (*) và (**) suy ra $\frac{I_1I_2}{IC}=\frac{I_1N}{CI_1}\Rightarrow\frac{CI_1}{CI}=\frac{I_1N}{I_1I_2}$ $\Rightarrow\frac{r_1}{r}=\frac{r_1}{r_1+r_2}\Rightarrow r=r_1+r_2.$ (Do $\frac{I_1N}{I_2N}=\frac{r_1}{r_2}$ suy ra $\frac{I_1N}{I_1I_2}=\frac{r_1}{r_1+r_2}$) Vậy $r=r_1+r_2.$	**0,5** **0,25** **0,25** **0,25** **0,25**

---- Hết---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề số 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021
Bài thi môn chuyên: TOÁN; Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang

Câu 1 (2,0 điểm):

1. Cho $P=\sqrt{a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2}$ với $a\in\mathbb{Z}$. Chứng minh P là một số tự nhiên.

2. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}:\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x=4+2\sqrt{3}$.

Câu 2 (2,0 điểm):

1. Cho phương trình $x^2-2mx+2m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 ,$(x_1<x_2)$ thỏa mãn $4x_1=x_2^2$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-2y^2+xy+x-y=0\\x^2+y^2=10\end{cases}$

Câu 3 (1,5 điểm):

1. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2022 là số chính phương.

2. Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}<1$.

Câu 4 (3,0 điểm): Cho đường tròn (T) tâm O và dây cung AB cố định $(O\notin AB)$. P là điểm di động trên đoạn thẳng AB $(P\neq A,B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng $AB)$. Đường tròn (T_1) tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại A. Đường tròn (T_2) tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại B. Hai đường tròn (T_1) và (T_2) cắt nhau tại N $(N\neq P)$. Gọi (d_1) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_1) tại A, (d_2) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_2) tại B, (d_1) cắt (d_2) tại điểm Q.

1. Chứng minh tứ giác $AOBQ$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh: $\widehat{ANP}=\widehat{BNP}$ và bốn điểm O,D,C,N cùng nằm trên một đường tròn.

3. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng ON luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đoạn thẳng $AB(P\neq A,B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng $AB)$.

Câu 5 (1,5 điểm):

1. Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2021}.$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$.

2. Với số thực a, ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$. Dãy các số $x_0, x_1, x_2, \ldots.., x_n, \ldots$ được xác định bởi công thức $x_n=\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]$. Hỏi trong 200 số $\{x_0, x_1, x_2, \ldots.., x_{199}\}$ có bao nhiêu số khác 0? (Biết $1,41<\sqrt{2}<1,42$)

------HẾT------

Lưu ý: Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay không có thẻ nhớ và không có chức năng soạn thảo văn bản.

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:..

Họ và tên, chữ ký: Cán bộ coi thi thứ nhất:..

Cán bộ coi thi thứ hai:..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2020 - 2021
Bài thi môn chuyên: TOÁN - Ngày thi: 18/7/2020
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

I. Hướng dẫn chung

1. Bài làm của học sinh đúng đến đâu cho điểm đến đó.
2. Học sinh có thể sử dụng kết quả câu trước làm câu sau.
3. Đối với bài hình, nếu vẽ sai hình hoặc không vẽ hình thì không cho điểm.
4. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà đúng vẫn cho điểm đủ từng phần như hướng dẫn, thang điểm chi tiết do Ban chấm thi thống nhất.
5. Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn phải đảm bảo không sai lệch và đảm bảo thống nhất thực hiện trong toàn Ban chấm thi.
6. Tuyệt đối không làm tròn điểm.

II. Hướng dẫn chi tiết

Câu	Nội dung	Điểm
1 **(2,0 đ)**	**1. (1,0 điểm) Cho** $P=\sqrt{a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2}$ **với** $a\in\mathbb{Z}$**. Chứng minh** P **là một số tự nhiên.**	

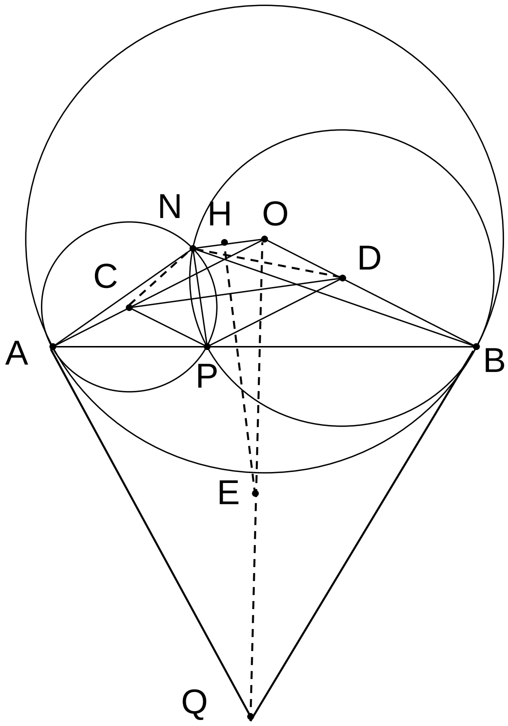
	$P=\sqrt{a^2+a^2(a^2+2a+1)+(a+1)^2}=\sqrt{a^4+2a^3+2a^2+(a+1)^2}$	0,25
	$=\sqrt{a^4+2a^2(a+1)+(a+1)^2}$	0,25
	$=\sqrt{(a^2+a+1)^2}=a^2+a+1$	0,25
	Vì $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow P\in\mathbb{N}$ (đpcm).	0,25
	2. (1,0 điểm) Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ **với** $x=4+2\sqrt{3}$**.**	
	Với $0<x\ne 1$ Ta có: $A=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$	0,25
	$=\frac{1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}}$	0,25
	Với $x=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{3}+1$	0,25
	Suy ra $A=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0,25
2 **(2,0 đ)**	**1. (1,0 điểm). Cho phương trình** $x^2-2mx+2m-1=0$**. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt** $x_1,x_2,\left(x_1<x_2\right)$ **thỏa mãn:** $4x_1=x_2^2$**.**	
	$x^2-2mx+2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-1\end{array}\right.$	0,25
	+) Nếu $1<2m-1\Leftrightarrow m>1$ Từ giả thiết $4x_1=x_2^2\Leftrightarrow 4=\left(2m-1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-1=2\\2m-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{3}{2}\\m=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$	0,25
	+) Nếu $2m-1<1\Leftrightarrow m<1$ $4x_1=x_2^2\Leftrightarrow 1=4\left(2m-1\right)\Leftrightarrow m=\frac{5}{8}$	0,25
	Kết luận $m\in\left\{\frac{3}{2};\frac{5}{8}\right\}$.	0,25
	2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-2y^2+xy+x-y=0\\x^2+y^2=10\end{cases}$	

	Có $x^2-2y^2+xy+x-y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-1-2y \end{array}\right.$	0,25
	+) Trường hợp 1: thay $y=x$ vào $x^2+y^2=10$ ta được $2x^2=10 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$	0,25
	+) Trường hợp 2: thay $x=-1-2y$ vào $x^2+y^2=10$ ta được $(-1-2y)^2+y^2=10 \Leftrightarrow 5y^2+4y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{9}{5} \end{array}\right.$	0,25
	Vậy hệ có 4 nghiệm $(x;y)\in\left\{(\sqrt{5};\sqrt{5}),(-\sqrt{5};-\sqrt{5}),(-3;1),(\frac{13}{5};\frac{-9}{5})\right\}$.	0,25
3 **(1,5 đ)**	**1. (0,75 điểm) . Tìm tất cả các số nguyên** n **sao cho** n^2+2022 **là số chính phương**.	
	Đặt $n^2+2022=y^2$ với y là số nguyên khác 0. $n^2+2022=y^2 \Leftrightarrow (y-n)(y+n)=2022$. Có $(y-n)+(y+n)=2y$ là số chẵn nên $(y-n)$ và $(y+n)$ cùng tính chẵn lẻ	0,25
	Nếu $(y-n)$ là số lẻ thì $(y+n)$ cũng lẻ $\Rightarrow (y-n)(y+n)$ là số lẻ $\Rightarrow (y-n)(y+n)\neq 2022$.	0,25
	Nếu $(y-n)$ là số chẵn thì $(y+n)$ cũng chẵn $\Rightarrow (y-n)(y+n) \vdots 4 \Rightarrow 2022 \vdots 4$ (vô lý) Vậy không tồn tại n thỏa mãn bài toán.	0,25
	2. (0,75 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}<1$	
	Điều kiện: $-1\leq x\leq 4$.	0,25
	$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}<1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-2\right)+\left(1-\sqrt{4-x}\right)<0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}<0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}\right)<0 \Leftrightarrow x<3$ Đối chiếu ĐK tập nghiệm của bất phương trình là: $[-1;3)$	0,25
4 **(3,0 đ)**	**Câu 4 (3,0 điểm):** Cho đường tròn (T) tâm O và dây cung AB cố định ($O\notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P\neq A,B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng AB). Đường tròn (T_1) tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại A. Đường tròn (T_2) tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại B. Hai đường tròn (T_1) và (T_2) cắt nhau tại N ($N\neq P$). Gọi (d_1) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_1) tại A, (d_2) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_2) tại B, (d_1) cắt (d_2) tại điểm Q.	

1. Chứng minh tứ giác $AOBQ$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh: $\widehat{ANP}=\widehat{BNP}$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

3. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng ON luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng AB).



Vẽ hình được **0,5 điểm**

1. (0,5 điểm) Chứng minh tứ giác $AOBQ$ nội tiếp đường tròn.

Có $\widehat{OAQ}=90^0$ (Tính chất tiếp tuyến)	0,25
$\widehat{OBQ}=90^0$ (Tính chất tiếp tuyến) . A, B cùng nhìn OQ dưới một góc vuông nên tứ giác $AOBQ$ nội tiếp (1) .	0,25

2. (1,25 điểm)

Chứng minh rằng $\widehat{ANP}=\widehat{BNP}$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

Trong đường tròn (T_1) có $\widehat{ANP}=\widehat{QAP}$ $(=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AP})$ Trong đường tròn (T_2) có $\widehat{BNP}=\widehat{QBP}$ $(=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BP})$	0,25

	Trong đường tròn (T) có $\widehat{QAP}=\widehat{QBP}$ $(=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB})$ $\rightarrow \widehat{ANP}=\widehat{BNP}$	0,25
	Ta có $\widehat{ANB}=\widehat{ANP}+\widehat{BNP}=\widehat{QAP}+\widehat{QBP}=180^0-\widehat{AQB}$, suy ra NAQB nội tiếp$(2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OAN}=\widehat{OBN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ON}$)	0,25
	Trong (T_1) có $\widehat{OCN}=2\widehat{OAN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung). Trong (T_2) có $\widehat{ODN}=2\widehat{OBN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung). $\Rightarrow \widehat{OCN}=\widehat{ODN}$suy ra bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.	0,25
	3.(0,75 điểm). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng ON **luôn đi qua một điểm cố định khi** P **di động trên đoạn thẳng** AB **(**$P\neq A,B$ **và** P **khác trung điểm của đoạn thẳng** AB**).**	
	Theo các ý trên suy ra 5 điểm O,N,A,Q,B cùng nằm trên đường tròn đường kính O	0,25
	Gọi E là trung điểm OQ; do O,Q cố định suy ra E cố định và E là tâm đường trò đi đi qua các điểm O,N,A,Q,B.	0,25
	$\Rightarrow OE=NE\Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng ON Suy ra đường trung trực của ON luôn đi qua điểm E cố định.	0,25
5 **(1,5đ)**	**1. (0,75 đ) Cho ba số dương** a,b,c **thoả mãn:** $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2021}.$ **Chứng minh rằng:** $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}.$	
	Đặt $x=\sqrt{b^2+c^2},\ y=\sqrt{c^2+a^2},\ z=\sqrt{a^2+b^2}$ với $(x,y,z>0;x+y+z=\sqrt{2021})$; $\rightarrow a^2=\frac{y^2+z^2-x^2}{2},b^2=\frac{x^2+z^2-y^2}{2},c^2=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}$ và áp dụng các BĐT: $b+c\leq\sqrt{2(b^2+c^2)}=\sqrt{2}x,c+a\leq\sqrt{2(c^2+a^2)}=\sqrt{2}y,\ a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2}z$ suy ra $VT\geq\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$	0,25
	$\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}-x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}-y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right)\right]$ $=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]$	0,25

	$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z)-3x\right)+\left(2(z+x)-3y\right)+\left(2(x+y-3z)\right]$ Suy ra $VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$ (đpcm).	0,25
	2. (0,75 đ) Với số thực a **, ta định nghĩa phần nguyên của số** a **là số nguyên lớn nhất không vượt quá** a **và kí hiệu là** $[a]$**. Dãy các số** $x_0, x_1, x_2, \ldots.., x_n, \ldots$ **được xác định bởi công thức** $x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]$**. Hỏi trong 200 số** $\{x_0, x_1, x_2, \ldots.., x_{199}\}$ **có bao nhiêu số khác 0 ?** **(Biết** $1,41<\sqrt{2}<1,42$ **)**	
	Ta có $x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] < \frac{n+1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+1<2 \Rightarrow 0 \leq x_n \leq 1$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_n = 0 \\ x_n = 1 \end{array}\right.$ Nên các số khác 0 chỉ nhận giá trị bằng 1.	0,25
	$\sum_{i=0}^{199} x_i = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right]+\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+\ldots+\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{199}{\sqrt{2}}\right]$	0,25
	$=\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]=\left[100\sqrt{2}\right]$ Mà $141<100\sqrt{2}<142$ nên số các số khác 0 là 141	0,25

------------ Hết ------------

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2020 – 2021
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 11

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}=-1$

b) Giải phương trình $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+x=4 \\ x^2+y^2-\frac{5}{x^2}=4-2xy \end{cases}$

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2+3p+4$ cũng là số nguyên tố.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a!+b!+c!=d!$.

Cho biết kí hiệu $n!$ là tích các số tự nhiên từ 1 đến n.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 16$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác A). Đường thẳng OD cắt đường tròn (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F.

a) Chứng minh rằng tam giác IBD cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Chứng minh $ID.IE=IF.DE$.

c) Gọi các điểm M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh AB,AC. Gọi H,K lần lượt là các điểm đối xứng với M,N qua I. Biết rằng $AB+AC=3.BC$, chứng minh $\widehat{KBI}=\widehat{HCI}$.

Câu 5 (0,5 điểm). Thầy Du viết số 2020^{2021} thành tổng của các số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số 2021 hoặc 2022 được không? Tại sao?

-------------Hết------------

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ………………......

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2020 – 2021
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin

Lưu ý chung:

- Hướng dẫn chỉ trình bày các bước cơ bản của 1 cách giải, nếu học sinh có cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm theo thang điểm của hướng dẫn chấm.

- Trong một bài, thí sinh giải đúng đến đâu cho điểm đến đó.

- Bài hình học nếu không vẽ hình thì không cho điểm, nếu vẽ hình sai thì không cho điểm ứng với phần vẽ hình sai.

- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

Câu 1 (*4,0 điểm*).

a) (1,5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}=-1$

Nội dung	Điểm
Điều kiện xác định: $x\ge -1$ Phương trình: $\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+1=2\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow 2x+3+1+2\sqrt{2x+3}=4\left(x+1\right)$	0,5
$\Leftrightarrow 2x+4+2\sqrt{2x+3}=4x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left(x+1\right)\left(x-3\right)=0 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.	0,25

b) (1,5 điểm). Giải phương trình $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$

Nội dung	Điểm
Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2+x+3\ne 0 \\ x^2-5x+3\ne 0 \end{cases}$ (1)	0,25
+) Nhận xét: $x=0$ không là nghiệm của phương trình. +) Với $x\ne 0$: Khi đó phương trình viết được thành $\dfrac{4}{\dfrac{x^2+x+3}{x}}+\dfrac{5}{\dfrac{x^2-5x+3}{x}}=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{x+1+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{5}{x-5+\dfrac{3}{x}}=-\dfrac{3}{2}$	0,25

Đặt $t=x+1+\frac{3}{x}$, thay vào phương trình trên ta được: $\frac{4}{t}+\frac{5}{t-6}=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{4\left(t-6\right)+5t}{t\left(t-6\right)}=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 8t-48+10t=-3t^2+18t\Leftrightarrow 3t^2=48\Leftrightarrow t=\pm4.$	0,5
Với $t=4,$ ta có: $x+1+\frac{3}{x}=4\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ vô nghiệm do $\Delta=\left(-3\right)^2-4.3=-3<0$. Với $t=-4,$ ta có: $x+1+\frac{3}{x}=-4\Leftrightarrow x^2+5x+3=0,$ ta có $\Delta=5^2-4.3=13>0$ suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2};x_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$. So sánh với điều kiện (1) ta được phương trình có hai nghiệm $x=\frac{-5-\sqrt{13}}{2};x=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.	0,5

c) (1,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+x=4\\x^2+y^2-\frac{5}{x^2}=4-2xy\end{cases}$

Nội dung	Điểm
Điều kiện $x\neq0$. $\begin{cases}x^2+xy+x=4\\x^2+y^2-\frac{5}{x^2}=4-2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+y+1\right)-4=0\\x^2+y^2+2xy-\frac{5}{x^2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+1=\frac{4}{x}\\\left(x+y\right)^2-\frac{5}{x^2}=4\end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{4}{x}-1\\\left(\frac{4}{x}-1\right)^2-\frac{5}{x^2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{4}{x}-1\\\frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1-\frac{5}{x^2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{4}{x}-1\\\frac{11}{x^2}-\frac{8}{x}-3=0\end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{4}{x}-1\\3x^2+8x-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{4}{x}-1\\\left(x-1\right)\left(3x+11\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{4}{x}-1\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{11}{3}\end{array}\right.\end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-\frac{11}{3}\\y=\frac{52}{33}\end{cases}\end{array}\right.$ Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;2),\left(-\frac{11}{3};\frac{52}{33}\right)$.	0,25

Câu 2 (1,5 điểm).

a) (0,5 điểm). Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2+3p+4$ là số nguyên tố.

Nội dung	Điểm
Nếu $p\vdots 3 \Rightarrow p=3$ thì $2p^2+3p+4=31$ là số nguyên tố suy ra $p=3$ thỏa mãn. Nếu $p=3k+1, k\in\mathbb{N}$ thì $2p^2+3p+4=2(3k+1)^2+3(3k+1)+4=18k^2+21k+9\vdots 3$, kết hợp với $2p^2+3p+4>3$ suy ra $2p^2+3p+4$ không là số nguyên tố.	0,25
Nếu $p=3k+2, k\in\mathbb{N}$ thì $2p^2+3p+4=2(3k+2)^2+3(3k+2)+4=18k^2+33k+18\vdots 3$, kết hợp với $2p^2+3p+4>3$ suy ra $2p^2+3p+4$ không là số nguyên tố.	0,25

b) (1,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a!+b!+c!=d!$.

Cho biết kí hiệu $n!$ là tích các số tự nhiên từ 1 đến n.

Nội dung	Điểm
Giả sử $a\le b\le c$, kết hợp với giả thiết ta được $1\le a\le b\le c<d$. *) Nếu $a<b \Rightarrow a!+a!(a+1)...b+a!(a+1)...c=a!(a+1)...d$ $\Rightarrow 1+(a+1)...b+(a+1)...c=(a+1)...d \Rightarrow 1\vdots a+1$ vô lí.	0,25
*) Nếu $a=b$ thì $2a!+c!=d!$ +) Nếu $a=b<c$ thì từ phương trình trên ta được: $2a!+a!(a+1)...c=a!(a+1)...d \Leftrightarrow 2+(a+1)...c=(a+1)...d$	0,25
Từ phương trình này ta được: $2\vdots a+1 \Rightarrow a=1$ Với $a=1\Rightarrow b=1$, ta được phương trình $2+c!=d!$ + Nếu $c>2\Rightarrow c!\vdots 3, d!\vdots 3 \Rightarrow 2\vdots 3$ vô lí. + Nếu $c=2\Rightarrow 4=d!$ vô lí.	0,25
+) Nếu $a=b=c$ thì từ phương trình đã cho ta được: $3.a!=d!\Rightarrow 3=(a+1)...d \Rightarrow 3\vdots a+1 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ d=3 \end{cases}$ Vậy $(a,b,c,d)=(2,2,2,3)$.	0,25

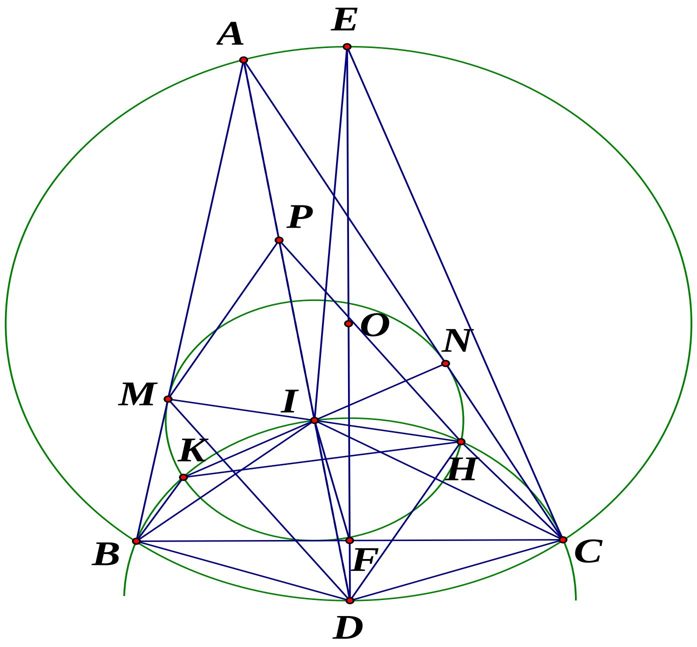
Câu 3 (1,0 điểm). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 16$$

Nội dung	Điểm

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 2\sqrt{\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$ $\ge 2\sqrt{\frac{8\frac{(a+b+c)^2}{3}}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}=12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}$	0,5
Ta sẽ chứng minh $12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}\ge 16\Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(ab+bc+ca)(a+b+c)$	0,25
$\Leftrightarrow 9\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc\right]\ge 8\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc\right]$ $\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc$ $\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{c}\right)+\left(\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{c+a}{b}\right)\ge 6\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\ge 0$ $\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\ge 0$ (luôn đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Do đó bất đẳng thức được chứng minh.	0,25

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác điểm A). Đường thẳng OD cắt đường tròn (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F.



a) (1,0 điểm). Chứng minh rằng tam giác IDB cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

Nội dung	Điểm
Ta có $\widehat{IBD}=\widehat{IBC}+\widehat{DBC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\widehat{DAC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1) (do *AI, BI* lần lượt là phân giác các góc *BAC, ABC* và tứ giác *ABDC* nội tiếp đường tròn).	0,25
Mặt khác $\widehat{BID}=\widehat{IBA}+\widehat{IAB}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (do *AI, BI* tương ứng là phân giác góc *BAC, ABC*) (2). Từ (1) và (2) ta được $\widehat{BID}=\widehat{IBD}\Rightarrow$ tam giác *DBI* cân tại *D*.	0,25
Ta có $\widehat{ICD}=\widehat{ICA}+\widehat{DCB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}+\widehat{DAB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (3) (do *AI, CI* lần lượt là phân giác các góc *BAC, ACB* và tứ giác *ABDC* nội tiếp đường tròn). Mặt khác $\widehat{CID}=\widehat{ICA}+\widehat{IAC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (do *AI, BI* tương ứng là phân giác góc *BAC, ABC*) (4). Từ (3) và (4) ta được $\widehat{CID}=\widehat{ICD}\Rightarrow$ tam giác *DCI* cân tại *D*.	0,25
Do tam giác *DBI* và *DCI* cân tại *D* nên $DB=DI$, $DC=DI\Rightarrow DB=DC=DI\Rightarrow$ *D* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IBC*.	0,25

b) (1,0 điểm). Chứng minh $ID.IE=IF.DE$.

Nội dung	Điểm
Theo kết quả phần a ta có tam giác *DIC* cân tại *D* nên $CD=DI$ Do *OD* là trung trực của *BC* suy ra *F* là trung điểm của *BC*. Do *DE* là đường kính của đường tròn *(O)* suy ra $\widehat{DCE}=90^0$.	0,25

Kết hợp với CF là đường cao của tam giác DCE nên $CD^2 = DF.DE = DI^2 \Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$.	0,25
Xét hai tam giác DIF và DEI có: $\frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$ và $\widehat{IDF} = \widehat{EDI}$ suy ra tam giác DIF đồng dạng với tam giác DEI	0,25
Suy ra $\frac{IF}{IE} = \frac{ID}{DE} \Leftrightarrow ID.IE = IF.DE$.	0,25

c) (1,0 điểm) Gọi các điểm M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh AB, AC. Gọi H, K lần lượt là các điểm đối xứng với M, N qua I. Biết rằng $AB + AC = 3.BC$, chứng minh $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$.

Nội dung	Điểm
Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ ta được: $AB.DC + AC.DB = AD.BC \Leftrightarrow (AB + AC).DB = AD.BC$ $\Leftrightarrow 3.BC.ID = AD.BC \Leftrightarrow 3.ID = AD \Leftrightarrow IA = 2.ID$	0,25
Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng AI, suy ra $MP = AP = PI = ID = \frac{1}{2}AI \Rightarrow I$ là trung điểm của PD. Mặt khác I là trung điểm HM suy ra tứ giác $MPHD$ là hình bình hành $\Rightarrow MP = DH$. Từ đó suy ra $DH = MP = DI$ (5).	0,25
Chứng minh tương tự ta được $DK = DI$ (6). Mặt khác theo kết quả phần a ta được $DB = DC = DI$ (7). Từ (5), (6), (7) ta được $DB = DC = DH = DK = DI$ suy ra B, C, H, K, I cùng thuộc đường tròn tâm D.	0,25
Do B, C, H, K, I cùng thuộc đường tròn tâm D nên $\widehat{KBI} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{IK}$, $\widehat{ICH} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{IH}$. Do $IK = IH \Rightarrow \overset{\frown}{IK} = \overset{\frown}{IH} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{IK} =$ sđ $\overset{\frown}{IH}$. Từ đó suy ra $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$.	0,25

Câu 5 (0,5 điểm). Thầy Du viết số 2020^{2021} thành tổng của một vài số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số 2021 hoặc 2022 được không? Tại sao?

Nội dung	Điểm
Nhận xét. Cho số nguyên dương m, kí hiệu $S(m)$ là tổng các chữ số của m. Khi đó $S(m) \equiv m \pmod 9$. Chứng minh. Giả sử $m = \overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_1.10 + a_0$ $\equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 \pmod 9 \Rightarrow S(m) \equiv m \pmod 9$.	0,25

Ta có $2020 \equiv 4\left(\bmod 9\right) \Rightarrow 2020^{2021} \equiv 4^{2021}\left(\bmod 9\right) \equiv 4^{3.673+2}\left(\bmod 9\right)$ Do $4^{3} \equiv 1\left(\bmod 9\right) \Rightarrow 2020^{2021} \equiv 4^{2}\left(\bmod 9\right) \equiv 7\left(\bmod 9\right)$ Mặt khác $2021 \equiv 5\left(\bmod 9\right), 2022 \equiv 6\left(\bmod 9\right)$ Từ đó suy ra $2020^{2021} \not\equiv 2021\left(\bmod 9\right)$, $2020^{2021} \not\equiv 2022\left(\bmod 9\right)$. Do đó thầy Du không nhận được kết quả là 2021 và 2022.	0,25

-----------------HẾT-----------------

UBND TỈNH KONTUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN KONTUM
NĂM HỌC 2019- 2020
Môn: **TOÁN**
Thời gian: **120** phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi:

Đề số 12

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $A=\sqrt{28}+\sqrt{63}-5\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

2. Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$ $\left(x>0,x\neq 1\right)$.

Câu 2 (2,0 điểm).

1. Cho phương trình: $x^2-2mx-m^2+2m-1=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2$ và $|x_1|-|x_2|=8$.
2. Giải phương trình $(3x+2)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2$.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho đường tròn tâm I nội tiếp trong tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh $BC,\ CA,\ AB$ theo thứ tự tại các điểm $D,\ E,\ F$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt EF tại K. Đường thẳng ID cắt EF tại N. Từ điểm N kẻ đường thẳng song song với BC cắt $AB,\ AC$ lần lượt tại $P,\ Q$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I,N,P,F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng ba điểm $A,\ N,\ M$ thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng $IM\perp DK$.

Câu 4 (2,0 điểm).

1. Cho các số thực dương a,b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}.$$

2. Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A=2^{30}+2^{2020}+4^n$ là số chính phương

Câu 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có diện tích bằng $184cm^2$. Gọi M thuộc cạnh BC sao cho $\dfrac{MC}{BC}=\dfrac{2}{7}$, N thuộc cạnh AC sao cho $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{3}{5}$. Gọi giao điểm của AM và BN là I. Tính diện tích tam giác ANI.

------------------------HẾT---------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Giám thị không được giải thích gì thêm.

UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành,
THPT Kon Tum, THCS – THPT Liên Việt Kon Tum
Năm học 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (Môn chuyên)**
Ngày thi: **26/7/2020**
Thời gian: **150** phút *(Không kể thời gian giao đề)*

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Bản Hướng dẫn này có 06 trang)

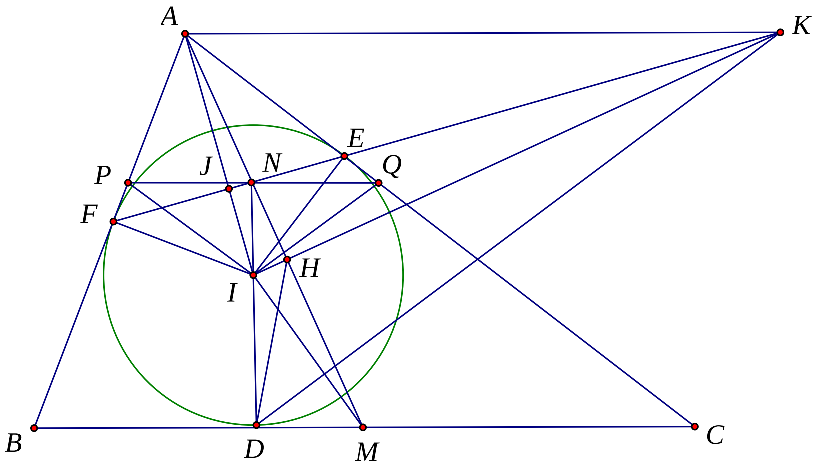
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Chấm theo đúng đáp án và thang điểm.
- Học sinh làm cách khác đúng thì cho điểm tối đa. Nếu chỉ đúng một phần trên nào đó của bài thi căn cứ vào thang điểm tương ứng để cho điểm.
- Trong quá trình giải bài của học sinh nếu bước trên sai, các bước sau có sử dụng kết quả phần sai đó nếu có đúng thì không cho điểm.
- Bài hình học, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.
- Điểm chi tiết từng ý nhỏ của mỗi bài là 0.25. Tổng điểm toàn bài tính đến 0,25 điểm.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

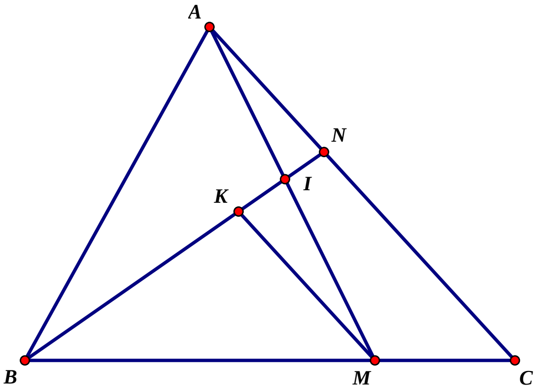
Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 *(2,0điểm)*	1	**Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức** $A=\sqrt{28}+\sqrt{63}-5\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ **.**	**1.0 đ**
		$A=\sqrt{2^2.7}+\sqrt{3^2.7}-5\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}$	0.25
		$=2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-5\left\|\sqrt{7}-1\right\|$	0.25
		$=2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-5\left(\sqrt{7}-1\right)$	0.25
		$=5.$	0.25
	2	**Rút gọn biểu thức** $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}\quad\left(x>0,x\neq 1\right).$	**1.0 đ**
		$\forall x>0,x\neq 1,\ B=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$	0.25
		$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}^3-1\right)}{\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}$	0.25
		$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}$	0.25

		$=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1.$	0.25
Câu 2 *(2,0điểm)*	1	**Cho phương trình:** $x^2-2mx-m^2+2m-1=0$ **(**m **là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số** m **để phương trình có hai nghiệm** x_1,x_2 **thỏa mãn** $x_1<x_2$ **và** $\lvert x_1\rvert-\lvert x_2\rvert=8$**.**	**1.0 đ**
		$x^2-2mx-m^2+2m-1=0$ $\Leftrightarrow x^2-2mx-(m-1)^2=0$ Ta có $1.\left[-(m-1)^2\right]=-(m-1)^2\le 0,\ \forall m.$	0.25
		Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1\le 0\le x_2,\ \forall m$. Khi đó theo định lí Vi-et ta có $x_1+x_2=2m.$	0.25
		Vậy $\lvert x_1\rvert-\lvert x_2\rvert=8\Leftrightarrow -x_1-x_2=8$	0.25
		$\Leftrightarrow -2m=8\Leftrightarrow m=-4$ Vậy $m=-4$ là giá trị cần tìm.	0.25
	2	**Giải phương trình** $(3x+2)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2.$	**1.0 đ**
		$(3x+2)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2\ (1)$ $\Leftrightarrow(3x+2)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2+1-1$ $\Leftrightarrow(3x+2)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3x-1\right)=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^2+1}=1 & (2)\\ \sqrt{x^2+1}=3x+1 & (3)\end{array}\right..$	0.25
		$+$ Giải (2): $\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x^2+1=1\Leftrightarrow x=0.$	0.25
		$+$ Giải (3): $\sqrt{x^2+1}=3x+1$ Bình phương hai vế phương trình (3) ta được $x^2+1=9x^2+6x+1$ $\Leftrightarrow 4x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$ Thử lại ta suy ra $x=0$ là nghiệm của phương trình (3)	0.25
		Vậy phương trình (1) có một nghiệm $x=0.$	0.25
Câu 3 *(3,0điểm)*	1	**Cho đường tròn tâm** I **nội tiếp trong tam giác** ABC**, tiếp xúc với các cạnh** $BC,\ CA,\ AB$ **theo thứ tự tại các điểm** $D,\ E,\ F$**. Đường thẳng đi qua** A **và song song với** BC **cắt** EF **tại** K**. Đường thẳng** ID **cắt** EF **tại** N**. Từ điểm** N **kẻ đường thẳng**	**3.0 đ**

	3	**song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.**	
		Hình vẽ  	
		Chứng minh rằng bốn điểm I,N,P,F cùng nằm trên một đường tròn.	**1.0 đ**
		$+BC$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm I, D là tiếp điểm $\Rightarrow ID\perp BC$	0.25
		mà $PQ\,//\,BC$ $\Rightarrow ID\perp PQ \Leftrightarrow IN\perp PQ \Rightarrow \widehat{INP}=90^o$	0.25
		$+AB$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm I, E là tiếp điểm $\Rightarrow$ IF $\perp AB \Rightarrow \widehat{PFI}=90^o$	0.25
		Tứ giác $INPF$ có $\widehat{INP}=\widehat{PFI}=90^o$ nên nội tiếp trong một đường tròn $\Rightarrow$ 4 điểm I,N,P,F cùng nằm trên một đường tròn.	0.25
	2	**Chứng minh rằng ba điểm $A,\ N,\ M$ thẳng hàng.**	**1.0 đ**
		+Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IFPN$ $\Rightarrow\ \widehat{IFN}=\widehat{IPN}$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{IN}$)	0.25
		Chứng minh tương tự ý 1), ta được tứ giác $IQEN$ nội tiếp nên $\widehat{IEN}=\widehat{IQN}$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{IN}$).	0.25
		+ $IE=IF$ (bán kính đường tròn tâm I)$\Rightarrow \Delta IEF$ cân tại I $\Rightarrow\ \widehat{IEN}=\widehat{IFN}$ $\Rightarrow\ \widehat{IPN}=\widehat{IQN}\ \Rightarrow\ \Delta IPQ$ cân tại I. Do $IN\perp PQ$ nên N là trung điểm của PQ.	0.25
		+Trong tam giác ABC có $PQ//BC$; M là trung điểm của BC nên AM đi qua trung điểm N của PQ $\Rightarrow A,\ N,\ M$ thẳng hàng.	0.25
	3	**Chứng minh rằng $IM\perp DK$.**	**1.0 đ**
		+ $AK\,//\,PQ$ và $IN\perp PQ \Rightarrow IN\perp AK$ (1) $+AE=AF$ (Tiếp tuyến qua A của đường tròn (I))	0.25

		$IE = IF$ (bán kính đường tròn tâm I) $\Rightarrow AI$ là đường trung trực của đoạn thẳng $EF \Rightarrow AI \perp EF$ $\Rightarrow KN \perp AI\ (2)$. + Từ (1) và (2) suy ra do đó N là trực tâm của ΔAIK $\Rightarrow AM \perp IK$.	
		Gọi H là giao điểm của AM và IK; J là giao điểm của IA và EF + Tam giác IHA đồng dạng với tam giác IJK (g-g) $\Rightarrow \frac{IH}{IJ} = \frac{IA}{IK} \Rightarrow IJ.IA = IH.IK$. +Tam giác IEA vuông tại E có JE là đường cao nên $IJ.IA = IE^2$. + $IE = ID$ (bán kính đường tròn tâm I) Vậy $IH.IK = IJ.IA = IE^2 = ID^2 \Rightarrow \frac{IH}{ID} = \frac{ID}{IK}$ $\Rightarrow$Tam giác IHD đồng dạng với tam giác IDK (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IKD}$.	0.25
		+ AM vuông góc với IK tại H nên $\widehat{IHM} = 90^0$ và $\widehat{IDM} = 90^0$ nên tứ giác $IHMD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IMH}$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{IH}$) $\Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{IMH}$	0.25
		Vì $\widehat{IMH} + \widehat{MIK} = 90^0$ (Tam giác IMH vuông tại H) nên $\widehat{MIK} + \widehat{IKD} = 90^0$ $\Rightarrow IM \perp DK$.	0.25
Câu 4 *(2,0điểm)*	1	**Cho các số thực dương a,b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức** $M = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}}$.	**1.0 đ**
		Với mọi số dương x, y ta có $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}\ (1)$ Dấu $"="$ xảy ra khi $x = y$.	0.25
		+ Áp dụng (1) với $x = a^2,\ y = \frac{1}{b^2}$ ta được $a^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2.\frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{2}.\sqrt{\frac{a}{b}}$ + Áp dụng (1) với $x = b^2,\ y = \frac{1}{a^2}$ ta được $b^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2.\frac{b}{a} \Rightarrow \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2}.\sqrt{\frac{b}{a}}$	0.25

		$\Rightarrow \sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}\ge \sqrt{2}.\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\ (2)$ Dấu $"="$ xảy ra khi $a^2.b^2=1$.	
		+ Áp dụng (1) với $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ và $y=\sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{a}}}=2$ $\Rightarrow \sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}\ge 2\sqrt{2}$ Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b$.	0.25
		Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $2\sqrt{2}$ khi $a=b=1$.	0.25
	2	**Tìm số nguyên dương** n **lớn nhất để** $A=2^{30}+2^{2020}+4^n$ **là số chính phương**	**1.0 đ**
		Giả sử A là số chính phương, ta có $A=2^{30}+2^{2020}+4^n=\left(2^{15}\right)^2\left(1+2^{1990}+2^{2n-30}\right)$ Vì A và $\left(2^{15}\right)^2$ là số chính phương nên $1+2^{1990}+2^{2n-30}$ là số chính phương.	0.25
		Vì $1+2^{1990}+2^{2n-30}>\left(2^{n-15}\right)^2$ mà $1+2^{1990}+2^{2n-30}$ là số chính phương nên ta có	0.25
		$1+2^{1990}+2^{2n-30}\ge\left(1+2^{n-15}\right)^2\Leftrightarrow 2^{1990}\ge 2^{n-14}$ $\Leftrightarrow n-14\le 1990\Rightarrow n\le 2004$	0.25
		Với $n=2004$ thì $A=2^{30}+2^{2020}+4^{2004}=\left(2^{15}+2^{2004}\right)^2$ là số chính phương. Vậy $n=2004$ là số cần tìm.	0.25
Câu 5 *(1,0điểm)*		**Cho tam giác** ABC **có diện tích bằng** $184cm^2$**. Gọi** M **thuộc cạnh** BC **sao cho** $\frac{MC}{BC}=\frac{2}{7}$**,** N **thuộc cạnh** AC **sao cho** $\frac{NA}{NC}=\frac{3}{5}$**. Gọi giao điểm của** AM **và** BN **là** I**. Tính diện tích tam giác** ANI**.**	**1.0 đ**

			
		Qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt BN tại K. Vì $\dfrac{MC}{BC}=\dfrac{2}{7}$ nên $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{5}{7}$. Trong tam giác BNC có $MK//NC$ nên $\dfrac{MK}{NC}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{5}{7}$. Do $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{3}{5}$ nên $\dfrac{MK}{NA}=\dfrac{25}{21}$	0.25
		MK song song với $AC \Rightarrow MK$ song song với NA $\Rightarrow \dfrac{MK}{NA}=\dfrac{IM}{IA}\Rightarrow\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{25}{21}\Rightarrow IA=\dfrac{21}{46}AM$ $\Rightarrow S_{\Delta AIN}=\dfrac{21}{46}S_{\Delta AMN}\ (1)$	0.25
		Từ $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{3}{5}$ suy ra $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\dfrac{3}{8}S_{\Delta AMC}\ (2)$ Vì $\dfrac{MC}{BC}=\dfrac{2}{7}$ nên $S_{\Delta AMC}=\dfrac{2}{7}S_{\Delta ABC}\ (3)$	0.25
		$\Rightarrow$Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $S_{\Delta AIN}=\dfrac{21}{46}.\dfrac{3}{8}.\dfrac{2}{7}S_{\Delta ABC}=\dfrac{9}{184}S_{\Delta ABC}$ $\Rightarrow S_{\Delta AIN}=9cm^2$.	0.25

----------------------- **HẾT** ------------------------

UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 5 câu, 1 trang)

Đề số 13

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành,
THPT Kon Tum, THCS – THPT Liên Việt Kon Tum
Năm học 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (Môn chuyên)**
Ngày thi: **26 / 7 / 2020**
Thời gian: **150** phút *(Không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (*2,0 điểm*)

1) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức $A=\sqrt{28}+\sqrt{63}-5\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

2) Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}\quad\left(x>0,x\neq 1\right)$.

Câu 2. (*2,0 điểm*)

1) Cho phương trình: $x^2-2mx-m^2+2m-1=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2$ và $\left|x_1\right|-\left|x_2\right|=8$.

2) Giải phương trình $\left(3x+2\right)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2$.

Câu 3. (*3,0 điểm*) Cho đường tròn tâm I nội tiếp trong tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại các điểm D, E, F. Đường thẳng đi qua A và song song với BC, cắt EF tại K. Đường thẳng ID cắt EF tại N. Từ điểm N kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

1) Chứng minh rằng bốn điểm I,N,P,F cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng ba điểm A, N, M thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng $IM\perp DK$.

Câu 4. (*2,0 điểm*)

1) Cho các số thực dương a,b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}.$$

2) Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A=2^{30}+2^{2020}+4^n$ là số chính phương.

Câu 5. (*1,0 điểm*) Cho tam giác ABC có diện tích bằng $184cm^2$. Gọi điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\dfrac{MC}{BC}=\dfrac{2}{7}$, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{3}{5}$. Gọi giao điểm của AM và BN là I. Tính diện tích tam giác ANI.

----------------HẾT----------------

UBND TỈNH KON TUM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành,
THPT Kon Tum, THCS – THPT Liên Việt Kon Tum
Năm học 2020 – 2021
Môn: **TOÁN (Môn chung)**
Ngày thi: **25/7/2020**
Thời gian: **120 phút** *(Không kể thời gian giao đề)*

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Bản Hướng dẫn này có 04 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG:

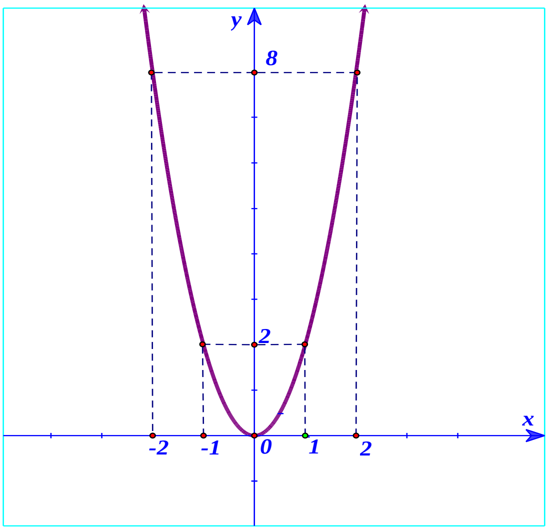
1) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

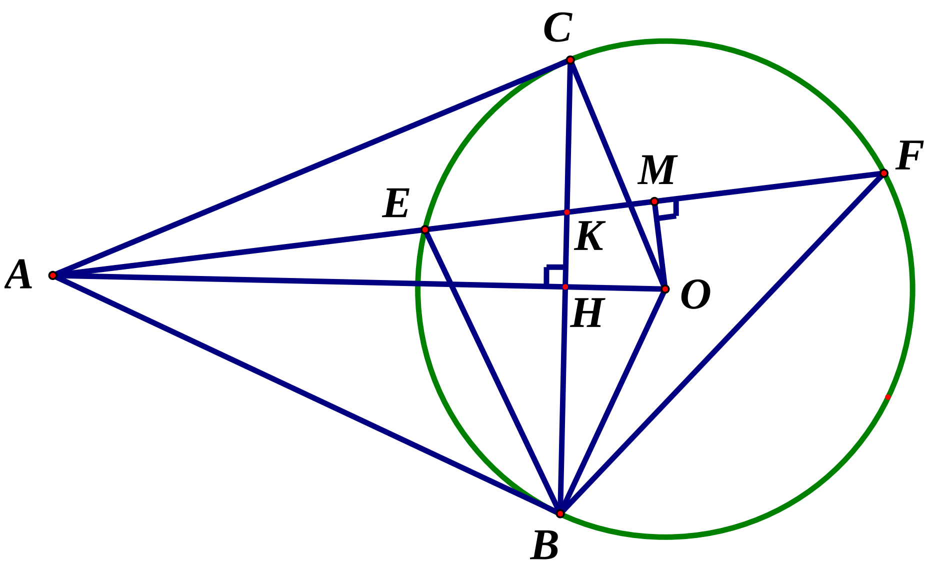
2) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) phải đảm bảo không làm thay đổi tổng số điểm của mỗi câu, mỗi ý trong hướng dẫn chấm và được thống nhất trong Hội đồng chấm thi.

3) Các điểm thành phần và điểm toàn bài thi làm tròn đến 2 chữ số thập phân.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM:

Câu	**Ý**	**Đáp án**	**Điểm**
1 **(2,0 đ)**	*a*	*Cho hàm số bậc nhất* $y=2x-1$. *Tính giá trị của* y *khi* $x=-2$.	
		Khi $x=-2$ ta có $y=2(-2)-1$	0,5
		$\Rightarrow y=-5$	0,5
	b	*Rút gọn biểu thức* $M=\dfrac{2(x+2)}{x^2-4}-\dfrac{x}{x-2}$ *với* $x\neq 2$ *và* $x\neq -2$.	
		$M=\dfrac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{x}{(x-2)}$	0,25
		$=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x}{x-2}$	0,25
		$=\dfrac{2-x}{x-2}=-1$	0,5
2 **(2,0 đ)**		*Giải phương trình và hệ phương trình sau: a)* $x^2-5x+4=0$; *b)* $\begin{cases}2x-y=4\\3x+y=1.\end{cases}$	
	a	Ta có $\Delta=25-16=9>0$	0,5
		Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{5-3}{2}=1,\ x_2=\dfrac{5+3}{2}=4$	0,5

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"><i>b</i></td><td>$\begin{cases}2x-y=4\\3x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=5\\3x+y=1\end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\3x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-2)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="8">3
(2,0 đ)</td><td></td><td colspan="2"><i>a) Vẽ đồ thị (P)</i> $y=2x^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><i>a</i></td><td>+ Ta có bảng giá trị<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y=2x^2$</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>8</td></tr></table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>+ Vẽ đồ thị (P)
 </td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="5"><i>b</i></td><td colspan="2"><i>Tìm giá trị của m để đường thẳng (d): y = 2x + m cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ</i> x_1 <i>và</i> x_2 <i>thỏa mãn điều kiện</i> $(x_1-3)(x_2-3)=5$.</td></tr>
<tr><td>Hoành độ giao điểm của <i>(d)</i> và <i>(P)</i> là nghiệm của phương trình
$2x^2=2x+m \Leftrightarrow 2x^2-2x-m=0$ (*)
Đường thẳng <i>(d)</i> cắt <i>(P)</i> tại hai điểm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 4+8m>0 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-\frac{m}{2}\end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Theo đề ra ta có: $(x_1-3)(x_2-3)=5 \Leftrightarrow x_1x_2-3(x_1+x_2)=-4$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow \frac{-m}{2}-3=-4 \Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn)</td><td>0,25</td></tr>
</table>

		Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.	
4 **(1,0 đ)**		*Hưởng ứng phong trào "Tết trồng cây đời đời nhớ ơn Bác Hồ", lớp 9A được phân công trồng 390 cây xanh. Lớp dự định chia đều số cây phải trồng cho học sinh trong lớp, nhưng khi lao động có 4 học sinh vắng nên mỗi học sinh có mặt phải trồng thêm 2 cây mới hoàn thành công việc. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh ?*	
		Gọi số học sinh lớp 9A là x $(x>4$ và $x\in\mathbb{N})$ Số cây dự định mỗi học sinh phải trồng là $\frac{390}{x}$ (cây)	0,25
		Số cây thực tế mỗi học sinh phải trồng là $\frac{390}{x-4}$ (cây)	0,25
		Theo bài ra ta có phương trình $\frac{390}{x}+2=\frac{390}{x-4}$	0,25
		Giải phương trình tìm được $x=30$ (thỏa mãn) hoặc $x=-26$ (loại) Vậy số học sinh lớp 9A là 30 (học sinh).	0,25
5 **(2,5 đ)**			0,25 *(hình vẽ đến câu a)*
	a	*Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp*	
		+ Ta có $OB\perp AB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow\widehat{ABO}=90^0$	0,25
		+ Ta có $OC\perp AC$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow\widehat{ACO}=90^0$	0,25
		$\Rightarrow$ $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^0$ suy ra $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b	*Chứng minh $AH.AO=AE.AF$*	
		Ta có $OB=OC$ (cùng bằng bán kính) và $AB=AC$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow$ AO là đường trung trực của BC $\Rightarrow AO\perp BC$ tại H.	0,25

		Ta có tam giác OBA vuông tại B, BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (1)	0,25
		Xét hai tam giác ΔABE và ΔAFB có $\widehat{AFB} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn cung BE) và $\widehat{FAB}$ chung $\Rightarrow \Delta ABE$ đồng dạng với ΔAFB (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE.AF$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra $AH.AO = AE.AF$	0,25
	c	*Chứng minh* $\frac{AK}{AE} + \frac{AK}{AF} = 2$	
		Ta có $\frac{AK}{AE} + \frac{AK}{AF} = \frac{AK(AF+AE)}{AE.AF} = \frac{AK(AE+EF+AE)}{AE.AF} = \frac{AK.2(AE+EM)}{AE.AF}$ $= \frac{2AK.AM}{AE.AF} = \frac{2AK.AM}{AH.AO}$ *(theo câu b)*	0,25
		Xét hai tam giác ΔAHK và ΔAMO có $\widehat{AHK} = \widehat{AMO} = 90^0$ và $\widehat{MAO}$ chung $\Rightarrow \Delta AHK$ đồng dạng với ΔAMO (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AK.AM = AH.AO$ Suy ra $\frac{AK}{AE} + \frac{AK}{AF} = \frac{2AK.AM}{AH.AO} = 2.$	0,25
6 **(0,5 đ)**		*Giải phương trình* $\frac{1-\sqrt{x-2019}}{x-2019} + \frac{1-\sqrt{y-2020}}{y-2020} + \frac{1-\sqrt{z-2021}}{z-2021} + \frac{3}{4} = 0$ (**)	
		Điều kiện: $x > 2019;\ y > 2020;\ z > 2021$ Đặt $a = \sqrt{x-2019};\ b = \sqrt{y-2020};\ c = \sqrt{z-2021}$ (với $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$) Khi đó (**) trở thành $\frac{1-a}{a^2} + \frac{1-b}{b^2} + \frac{1-c}{c^2} + \frac{3}{4} = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{4}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow a = b = c = 2$ Suy ra $x = 2023;\ y = 2024;\ z = 2025.$	0,25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 14

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Khóa ngày 21 tháng 7 năm 2020
Môn thi: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (*2,0 điểm*)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 2y+3 \\ y^2 = 2x+3 \end{cases}$.
2. Giải phương trình $x^2+3-(x+3)\sqrt{x^2+3}+2(x+1)=0$.

Câu 2. (*2,0 điểm*)

1. Cho các parabol $(P_1): y = mx^2$, $(P_2): y = nx^2$ $(m \neq n)$. Lấy các điểm A, B thuộc (P_1) và C, D thuộc (P_2) sao cho $ABCD$ là hình vuông nhận Oy làm trục đối xứng. Tính diện tích hình vuông $ABCD$.
2. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{a^3+1}{a}=\frac{b^3+1}{b}=\frac{c^3+1}{c}$. Chứng minh rằng $abc+1=0$.

Câu 3. (*1,0 điểm*) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $3a^2+3b^2+8c^2=32$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab+bc+ca$.

Câu 4. (*2,0 điểm*)

1. Tìm các số nguyên dương n để n^2+2020 là số chính phương.
2. Chứng minh rằng có thể chọn 3 số a_1, a_2, a_3 trong 7 số nguyên tố phân biệt bất kì sao cho $P=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)$ chia hết cho 216.

Câu 5. (*3,0 điểm*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung AB không chứa C và I là điểm trên đoạn MC sao cho $MI = MA$.

1. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
2. Vẽ đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F .
   a. Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.
   b. Chứng minh tứ giác $DIFC$ nội tiếp.

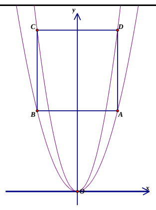
------ HẾT------

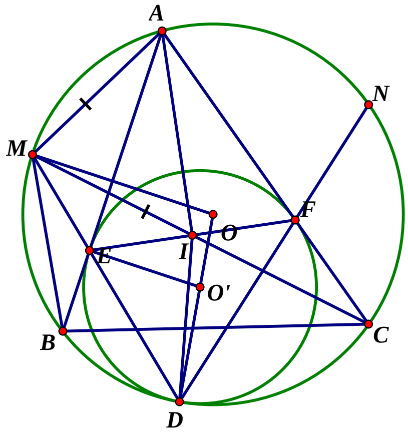
Họ và tên thí sinh ....Số báo danh..................

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC MÔN TOÁN (CHUYÊN)
KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Khóa ngày 21 tháng 7 năm 2020.

(Hướng dẫn này có 2 trang)

HDC chỉ gợi ý một cách giải, thí sinh có cách giải khác nếu đúng cho điểm theo quy định của ý (câu) đó. Điểm toàn bài làm tròn đến hàng 0,25.

Câu	Ý	NỘI DUNG YÊU CẦU VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
1 *2,0 điểm*	**1**	Hệ $\Rightarrow x^2-y^2=2(y-x)\Leftrightarrow(x-y)(x+y+2)=0$	0.25
		TH $x=y$. Ta được $x^2=2x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$ Hệ có nghiệm $(-1;-1);(3;3)$	0,25
		TH $y=-x-2$. Ta được $x^2=2(-x-2)+3\Leftrightarrow x=-1$ Hệ có nghiệm $(-1;-1)$	0,25
		Vậy hệ có 2 nghiệm $(-1;-1);(3;3)$	0,25
	2	Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\,(t\geq 0)$. Ta được $t^2-(x+3)t+2x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=x+1\end{array}\right.$	0,25
		$t=2\Rightarrow\sqrt{x^2+3}=2\Leftrightarrow x=\pm1$ (thỏa mãn)	0,25
		$t=x+1\Rightarrow\sqrt{x^2+3}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)	0,25
		Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\pm1$.	0,25
2 *2,0 điểm*	**1**	 Gọi $A(a,ma^2)$. Khi đó do Oy là trục đối xứng của hình vuông nên $\mathrm{B}(-a,ma^2)$. Do $DA//BC//Oy$ nên $\mathrm{C}(-a,na^2),\mathrm{D}(a,na^2)$	0,25
		$AB=2\|a\|,AD=\|m-n\|a^2;\ AB=AD\Rightarrow\|a\|=\dfrac{2}{\|m-n\|}$	0,5
		Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S=AB^2=\dfrac{16}{(m-n)^2}$	0,25
	2	Đặt $\dfrac{a^3+1}{a}=\dfrac{b^3+1}{b}=\dfrac{c^3+1}{c}=m$. Ta có $\begin{cases}a^3-ma+1=0\\b^3-mb+1=0\\c^3-mc+1=0\end{cases}$ nên a,b,c là 3 nghiệm của đa thức $f(x)=x^3-mx+1$	0.25
		Do $f(x)$ có 3 nghiệm a,b,c nên $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$	0,25
		Từ đó suy ra $x^3-mx+1=(x-a)(x-b)(x-c)\ \forall x\in\mathbb{R}$	0,25
		Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $-abc=1\Rightarrow abc+1=0$	0,25
3	**1**	Ta có	0,5

1,0 điểm		$ab\le\frac{a^2+b^2}{2};bc\le\frac{b^2+4c^2}{4};ca\le\frac{a^2+4c^2}{4}$	
		Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có $ab+bc+ca\le\frac{1}{4}(3a^2+3b^2+8c^2)=8$	0,25
		Dấu "=" xảy ra khi $a=b=2c=2$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 8	0,25
4 *2,0 điểm*	**1**	Gọi m là số nguyên dương sao cho $m^2=n^2+2020$. Khi đó $(m+n)(m-n)=2^2.5.101$	0.25
		Ta có $(m+n)+(m-n)=2m$ và $m+n>m-n$ nên $\begin{cases}m+n=202\\m-n=10\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m+n=1010\\m-n=2\end{cases}$	0,25
		Giải ra ta được $m=106;n=96$ hoặc $m=506;n=504$	0,25
		Vậy n^2+2020 là số chính phương khi $n=96$ hoặc $n=504$.	0,25
	2	Trong 7 số nguyên tố phân biệt, có ít nhất 5 số lớn hơn 3. Chọn 5 số lớn hơn 3 đó. Các số trong 5 số này chia cho 3 có số dư là 1 hoặc 2. Như thế có ít nhất 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Chọn ra 3 số a_1,a_2,a_3	0,75
		Khi đó các hiệu $a_i-a_j\,\vdots\,6$. Vậy $P\,\vdots\,216$	0,25
5 *2,0 điểm*	**1**	 Ta có $MA=MI$ nên $\angle MAI=\angle MIA$	0.25
		Mặt khác $\angle MAI=\angle MAB+\angle BAI$; $\angle MIA=\angle MCA+\angle IAC$	0,25
		Mà $\angle MAB=\angle MCA$ nên $\angle BAI=\angle IAC$	0,25
		Suy ra AI,CI là các phân giác trong tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp.	0,25
	2.a	Ta có D,O,O' thẳng hàng và $OM//O'E$ vì cùng vuông góc AB nên $\angle MOD=\angle EO'D$	0.5
		Do đó $2\angle ODM=2\angle ODE\Rightarrow\angle ODM=\angle ODE$. Suy ra M,E,D thẳng hàng	0,5
	2.b	$\Delta MEB\sim\Delta MBD\Rightarrow MB^2=ME.MD\Rightarrow MI^2=ME.MD\Rightarrow\Delta MEI\sim\Delta MID$ Suy ra $\angle MIE=\angle MDI$. Gọi N là điểm chính giữa cung AC không chứa B.	0,25

		Chứng minh tương tự $\angle NIF = \angle NDI$	
		Từ đó suy ra $\angle EIM + \angle MIN + \angle NIF = \angle MDN + \angle MIN = 180^o$. Do đó E, I, F thẳng hàng.	0,25
		Khi đó $\angle ICD = \frac{1}{2}\angle MOD = \frac{1}{2}\angle EO'D = \angle EFD = \angle IFD$. Suy ra tứ giác $IFDC$ nội tiếp.	0,5
Tổng số điểm toàn bài là 10 điểm.			

------ Hết -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm **01** trang
Đề số 15

KỲ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: **TOÁN**
(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 18 tháng 7 năm 2020

Câu I (*2,0 điểm*)

1. Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a+b+c=1$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng trong ba số a,b,c có ít nhất một số bằng 1.

2. Cho x,y,z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2045$ và $(x-18)^3+(y-7)^3+(z-2020)^3=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$F=(x-18)^{2021}+(y-7)^{2021}+(z-2020)^{2021}.$$

Câu II (*2,0 điểm*)

1. Giải hệ phương trình $1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12x}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-3y=4x^2+3x+3 \\ y^2+4y+18=7x^2+16x \end{cases}$

Câu III (*2,0 điểm*)

1. Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $xy^2-(x-2)(x^4+2x+1)=2y^2$.

2. Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b$ (với a, b, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0<b<10$, $n>3$) thì ab chia hết cho 6.

Câu IV (*3,0 điểm*) Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC}>45°$. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Đường thẳng AQ cắt đoạn thẳng BM tại E, đường thẳng AN cắt đoạn thẳng CP tại F.

1. Chứng minh tứ giác $EFQN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Đường thẳng MN cắt đường thẳng PQ tại D. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K (K khác D). Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh bốn điểm D,A,K,J thẳng hàng.

Câu V (*2,0 điểm*) Trên một đường tròn người ta lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xem kẻ nhau. Tại mỗi điểm người ta ghi một số thực khác 0 và 1 sao cho quy tắc sau được thỏa mãn “số tại mỗi điểm màu xanh bằng tổng hai số ghi tại mỗi điểm màu đỏ kề nó, số ghi tại mỗi điểm màu đỏ bằng tích hai số ghi tại mỗi điểm màu xanh kề nó”. Tính tổng 2024 số đó.

LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn: TOÁN CHUYÊN

Câu I.1. Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a+b+c=1$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng trong ba số a,b,c có ít nhất một số bằng 1.

Lời giải

Xét tích $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)=abc-\left(ab+bc+ca\right)+\left(a+b+c\right)-1=abc-\left(ab+bc+ca\right)$

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow ab+bc+ca=abc$

Suy ra $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)=0$.

Vậy trong ba số a,b,c có ít nhất một số bằng 1.

Câu I.2. Cho x,y,z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2045$ và $\left(x-18\right)^3+\left(y-7\right)^3+\left(z-2020\right)^3=0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$F=\left(x-18\right)^{2021}+\left(y-7\right)^{2021}+\left(z-2020\right)^{2021}.$$

Lời giải

Ta thấy, với ba số a,b,c tùy ý thì

$a^3+b^3+c^3=\left(a+b\right)^3+c^3-3ab\left(a+b\right)=\left(a+b+c\right)^3-3c\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)-3ab\left(a+b\right)$

$=\left(a+b+c\right)^3-3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

Do đó, nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Đặt $a=x-18,b=y-7,c=z-2020$ từ giả thiết suy ra $a+b+c=0$. Theo trên suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Mặt khác, theo giả thiết ta có $a^3+b^3+c^3=0$ suy ra $3abc=0$.

Vậy $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $c=0$.

Nếu $a=0\Rightarrow b+c=0$, khi đó $F=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=0+b^{2021}+\left(-b\right)^{2021}=0$.

Tương tự nếu $b=0$ hoặc $c=0$ thì cũng suy ra $F=0$.

Vậy $F=0$.

Câu II.1. Giải hệ phương trình $1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12x}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$

- Nếu $x<-1$ thì phương trình vô nghiệm do hai vế trái dấu

- Nếu $x>1$ thì phương trình tương đường với $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}\Leftrightarrow\frac{x^4}{x^2-1}+2.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1225}{144}=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>0$ phương trình trở thành $t^2+2t-\dfrac{1225}{144}=0\Leftrightarrow(t+1)^2-\left(\dfrac{37}{12}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{25}{12}$ (do $t>0$)

Khi đó $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{25}{12}\Leftrightarrow 25\sqrt{x^2-1}=12x^2\Leftrightarrow 144x^4-625x^2+625=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{25}{9}\\ x^2=\dfrac{25}{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{5}{3}\\ x=\pm\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $x>1$ thì có $x=\dfrac{5}{3}$ và $x=\dfrac{5}{4}$ là các giá trị thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{5}{3}$ và $x=\dfrac{5}{4}$.

Câu II.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy-3y=4x^2+3x+3\\ y^2+4y+18=7x^2+16x\end{cases}$

Lời giải

Nhân phương trình đầu với 2 rồi trừ đi phương trình thứ hai vế với vế ta được

$$2xy-y^2-10y-18=x^2-10x+6\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-10x+10y+24=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-5)^2=1\Leftrightarrow x-y-5=\pm1.$$

- Nếu $x-y-5=1\Leftrightarrow y=x-6$, thay vào phương trình đầu ta được

$$x(x-6)-3(x-6)=4x^2+3x+3\Leftrightarrow 3x^2+12x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-5\end{array}\right.$$

Với $x=1$ suy ra $y=-5$, nên hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;-5)$.

Với $x=-5$ suy ra $y=-11$, nên hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-5;-11)$.

- Nếu $x-y-5=-1\Leftrightarrow y=x-4$, thay vào phương trình đầu ta được

$$x(x-4)-3(x-4)=4x^2+3x+3\Leftrightarrow 3x^2+10x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5-2\sqrt{13}}{3}\\ x=\dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{-17-2\sqrt{13}}{3}\\ x=\dfrac{-17+2\sqrt{13}}{3}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(x;y)$ là

$$(1;-5),\ (-5;-11),\ \left(\frac{-5-2\sqrt{13}}{3};\frac{-17-2\sqrt{13}}{3}\right),\ \left(\frac{-5+2\sqrt{13}}{3};\frac{-17+2\sqrt{13}}{3}\right).$$

Câu III.

1. Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $xy^2-(x-2)(x^4+2x+1)=2y^2$.

2. Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b$ (với a, b, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0<b<10$, $n>3$) thì ab chia hết cho 6.

Lời giải

1. $xy^2-(x-2)(x^4+2x+1)=2y^2 \Leftrightarrow (x-2)(x^4+2x+1-y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^4+2x+1=y^2 \end{array}\right.$

TH1: $x=2$ thì mọi giá trị $y\in\mathbb{Z}$ đều thỏa mãn.

TH2: $x>2$, ta có $x^4<x^4+2x+1=y^2<x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$, mà x là số nguyên nên x^4 và $(x^2+1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Suy ra không tồn tại số nguyên y thỏa mãn.

TH3: $x\le -2$, ta có $x^4>x^4+2x+1=y^2>x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$, mà x là số nguyên nên x^4 và $(x^2-1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. Suy ra không tồn tại số nguyên y thỏa mãn.

TH4: $x=-1 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0$.

TH5: $x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$.

TH6: $x=1 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(-1;0)$, $(0;\pm 1)$, $(1;\pm 2)$ và $\{(2;y)/\,y\in\mathbb{Z}\}$

2. Vì $2^n=10a+b$ mà $0<b<10$ nên 2^n có tận cùng là b.
Đặt $n=4k+r$ (với k, r là các số tự nhiên thỏa mãn $0\le r\le 3$), khi đó $2^n=2^{4k+r}=16^k.2^r$

TH1: $r=0 \Rightarrow 2^n=16^k$ có tận cùng là 6, suy ra $b=6 \Rightarrow ab \,\vdots\, 6$ (1).

TH2: $1\le r\le 3$ thì $2^n-2^r=2^r(16^k-1)$ có tận cùng bằng 0 (vì 16^k-1 có tận cùng bằng 5).

Suy ra 2^n có tận cùng là 2^r , hay $b=2^r$. Khi đó
$10a=2^n-b=2^n-2^r=2^r(16^k-1) \,\vdots\, (16-1) \Rightarrow 10a \,\vdots\, 3 \Rightarrow a \,\vdots\, 3 \Rightarrow ab \,\vdots\, 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

Câu IV. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} > 45°$. Vẽ phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Đường thẳng AQ cắt đoạn thẳng BM tại E, đường thẳng AN cắt đoạn thẳng CP tại F.

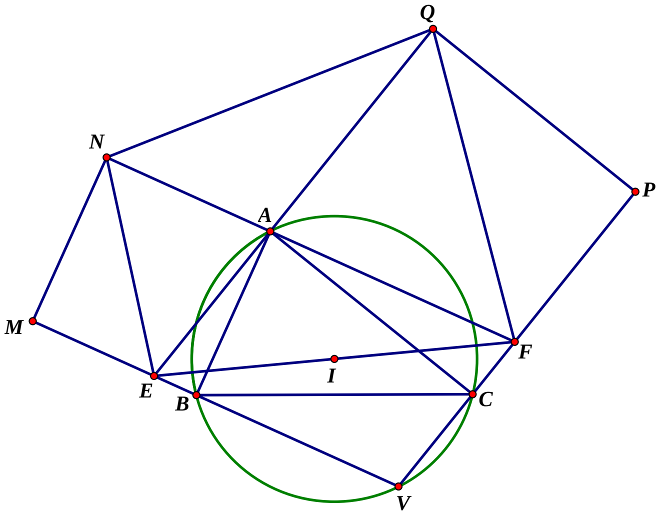
1. Chứng minh tứ giác $EFQN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Đường thẳng MN cắt đường thẳng PQ tại D. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K (K khác D). Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh bốn điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Lời giải

1.



Xét hai tam giác vuông ABE và ACF ta có $\widehat{ABE} = \widehat{ACF} = 90°$ và $\widehat{EAB} = \widehat{FAC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AN}{AQ} = \frac{AE}{AF}$.

Xét hai tam giác ANE và AQF có $\widehat{NAE} = \widehat{QAF}$ (đối đỉnh) và do $\frac{AN}{AQ} = \frac{AE}{AF}$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\widehat{ENA} = \widehat{FQA} \Rightarrow \widehat{ENF} = \widehat{FQE}$.

Do đó tứ giác $EFQN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

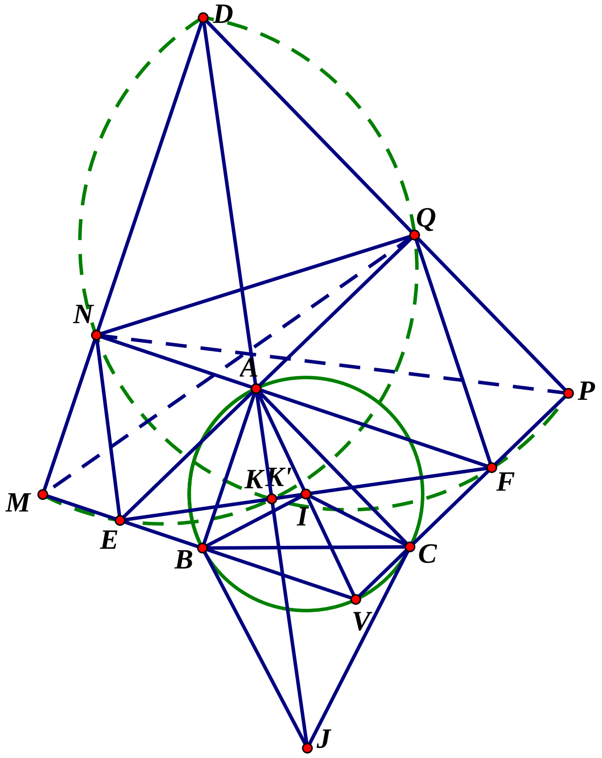
2. Gọi V là giao điểm của hai đường thẳng EB và FC.

Tứ giác $EAFV$ có $AF // EV, AE // VF$ nên nó là hình bình hành.

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng EF nên nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng AV. Suy ra ba điểm A, I, V thẳng hàng.

Mặt khác, ta thấy tứ giác $ABVC$ có $\widehat{ABV} = \widehat{ACV} = 90°$ nên nó nội tiếp được trong đường tròn đường kính AV. Suy ra $IA = IB = IC$ hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3.



Ta chứng minh D,A,K ***thẳng hàng***

Gọi K' là giao điểm của DA và EF. Dễ thấy tứ giác $NDQA$ nên $\widehat{NDK'}=\widehat{NQA}$.

Lại có $\widehat{NFK'}=\widehat{NQA}$ (Do tứ giác $EFQN$ nội tiếp), suy ra $\widehat{NDK'}=\widehat{NFK'}$.

Do đó tứ giác $NDFK'$ nội tiếp.

Mặt khác, do $NDPF$ nội tiếp nên năm điểm N,D,P,F,K' cùng thuộc một đường tròn. Vậy K' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác NDP.

Chứng minh tương tự ta có K' cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác DMQ.

Suy ra $K\equiv K'$. Vậy ba điểm D,A,K thẳng hàng (1).

Ta chứng minh A,K,J ***thẳng hàng***

Do năm điểm D,Q,K,E,M cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{AKE}=\widehat{DQE}=90^\circ$, suy ra $AK\perp KE$. Từ đó suy ra tứ giác $AKBE$ nội tiếp nên $\widehat{EKB}=\widehat{EAB}=90^\circ-\widehat{BAC}$.

Tương tự ta có $\widehat{FKC}=\widehat{FAC}=90^\circ-\widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{BKC}=180^\circ-\left(\widehat{EKB}+\widehat{FKC}\right)=2\widehat{BAC}=\widehat{BIC}$

(góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung). Suy ra tứ giác $BKIC$ nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{JBI}=\widehat{JCI}=90^\circ$ nên tứ giác $BICJ$ nội tiếp.

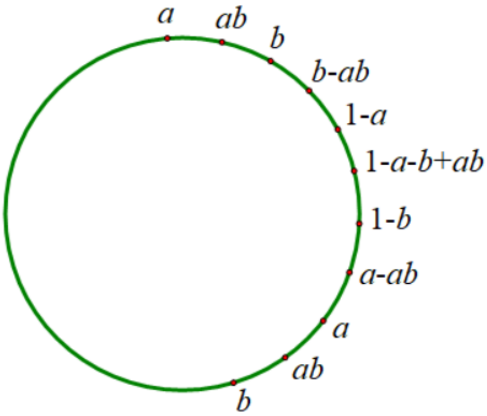
Do đó năm điểm B,K,I,C,J cùng thuộc một đường tròn nên ta có $\widehat{IKJ}=\widehat{JBI}=90^\circ$, suy ra $JK\perp EF$.

Mà $AK\perp KE$, suy ra ba điểm A,K,J thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra bốn điểm D,A,K,J thẳng hàng.

Câu V. Trên một đường tròn người ta lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xem kẻ nhau. Tại mỗi điểm người ta ghi một số thực khác 0 và 1 sao cho quy tắc sau được thỏa mãn "số tại mỗi điểm màu xanh bằng tổng hai số ghi tại mỗi điểm màu đỏ kề nó, số ghi tại mỗi điểm màu đỏ bằng tích hai số ghi tại mỗi điểm màu xanh kề nó". Tính tổng 2024 số đố.

Lời giải



Theo chiều kim đồng hồ ta gọi a,b là hai số ghi tại hai điểm màu xanh liên tiếp nào đó trên đường tròng (a,b khác 0 và 1). Khi đó số ghi tại điểm màu đỏ nằm giữa hai điểm màu xanh nói trên là ab. Theo quy tắc ghi số đã cho, năm điểm liên tiếp tiếp theo sẽ được ghi năm số lần lượt là (xem hình trên)

$$b-ab;1-a;1-a-b+ab;1-b;a-ab.$$

Tổng các số ghi tại điểm trên là

$$a+ab+b+b-ab+1-a+1-a-b+ab+1-b+a-ab=3.$$

Cũng theo quy tắc ghi số này, dễ suy ra điểm thứ 9 được tô màu xanh và tại đó ghi $\left(a-ab\right):\left(1-b\right)=a$. Từ đó suy ra điểm thứ 10 được tô màu đỏ và ghi số $a-\left(a-ab\right)=ab$, điểm thứ 11 được tô màu xanh và ghi số $ab:a=b$.

Như vậy, bộ 8 điểm tiếp theo được lặp lại như bộ 8 điểm đầu tiên.

Do đó, 2024 số đã ghi được chia thành 253 nhóm, mỗi nhóm gồm 8 số theo quy luật trên.

Vậy tổng 2024 số ghi trên đường tròn là $253.3=759$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA-VŨNG TÀU

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 16

ĐỀ THI LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
NĂM HỌC: 2020-2021
MÔN: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 15 tháng 7 năm 2020

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P=\frac{x-4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+3}$ với $0\le x\ne 4$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}=x+\sqrt{2x-1}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y+2=xy\\ \left(2-x\right)y=x^2+y^2\end{cases}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho đa thức $P\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x+4\right)\left(x^2+ax-8\right)+bx^2$ với a,b là hai số thực thỏa mãn $a+b<1$. Chứng minh phương trình $P\left(x\right)=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn: $x\left(x+y\right)^2-y+1=0$.

Câu 3 (1,0 điểm). Với các số thực dương a và b thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right)$.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn $\left(O\right)$ có đường kính AB. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB kẻ đến $\left(O\right)$ hai tiếp tuyến SC và SD (C và D là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của đường kính AB và dây CD. Vẽ đường tròn $\left(O'\right)$ đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AB tại S. Hai đường tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$ cắt nhau tại điểm M khác C.

a) Chứng minh tứ giác $SMHD$ nội tiếp.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên BD, I là giao điểm của BM và CK. Chứng minh rằng HI song song với BD.

c) Các đường thẳng SM và HM lần lượt cắt $\left(O\right)$ tại các điểm L và T (L,T khác M). Chứng minh rằng tứ giác $CDTL$ là hình vuông khi và chỉ khi $MC^2=MS.MD$.

Bài 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và có trực tâm H. Gọi D,E,F lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ A,B,C của tam giác ABC. Biết $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2+\left(\frac{BC}{HD}\right)^2+\left(\frac{CA}{HE}\right)^2=36$, hãy chứng minh rằng tam giác ABC đều.

--------- HẾT---------

Họ và tên thí sinh:...................................... ……..……..Số báo danh:......................................

BÀI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+3}$ với $0\le x\ne 4$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}=x+\sqrt{2x-1}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-y+2=xy\\(2-x)y=x^2+y^2\end{cases}$.

Lời giải

a) $P=\dfrac{x-4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+3}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}+\dfrac{x+\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4}=\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}+4}=1$

b) Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Khi đó $PT\Leftrightarrow x^2+3=x^2+2x\sqrt{2x-1}+2x-1\Leftrightarrow 2x\sqrt{2x-1}+2x-4=0$

Đặt $t=\sqrt{2x-1},t\ge 0$, ta có phương trình $t^2-3+\left(t^2+1\right)t=0\Leftrightarrow(t-1)\left(t^2+2t+3\right)=0\Leftrightarrow t=1$.

Ta được $\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

c) $\begin{cases}x-y+2=xy & (1)\\(2-x)y=x^2+y^2 & (2)\end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow(x+y)^2-(x+y)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=-1\\x+y=2\end{array}\right.$

TH1: $x+y=-1\Leftrightarrow y=-1-x$, thay vào phương trình (1) ta được $x^2+3x+3=0$ (vô nghiệm)

TH2: $x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$, thay vào phương trình (1) ta được $x=0\Rightarrow y=-1$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là $(0;-1)$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho đa thức $P(x)=(x-2)(x+4)\left(x^2+ax-8\right)+bx^2$ với a,b là hai số thực thỏa mãn $a+b<1$. Chứng minh phương trình $P(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x+y)^2-y+1=0$.

Lời giải

a) $P(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+ax-8\right)+bx^2=0\Leftrightarrow\left(x^2-8\right)^2+(a+2)x\left(x^2-8\right)+(2a+b)x^2=0$

- $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- $x\ne 0, PT\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2-8}{x}\right)^2+(a+2)\left(\dfrac{x^2-8}{x}\right)+2a+b=0$

Đặt $t=\dfrac{x^2-8}{x}$, ta được phương trình $t^2+(a+2)t+2a+b=0$

Ta có $\Delta=(a+2)^2-4(2a+b)=a^2-4(a+b-1)>0$ nên phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt $t_1,\,t_2$.

Do đó phương trình cho $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-t_1x-8=0\ (1)\\ x^2-t_2x-8=0\ (2)\end{array}\right.$

Ta thấy mỗi phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm phân biệt và hai phương trình này không có nghiệm chung nên phương trình cho có bốn nghiệm phân biệt.

b) Nhân $4x$ vào hai vế của phương trình ta được

$$4x^2(x+y)^2-4xy+4x=0\Leftrightarrow 4\left(x^2+xy\right)^2-4\left(x^2+xy\right)+4x^2+4x=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+2xy-1\right)^2+4x^2+4x-1=0$$

Suy ra $4x^2+4x-1\le 0\Rightarrow(2x+1)^2\le 2$. Do $(2x+1)^2$ là số chính phương lẻ nên $(2x+1)^2=1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$$

Với $x=0$, thay vào phương trình ta được $-y+1=0\Leftrightarrow y=1$.

Với $x=-1$, thay vào phương trình ta được $-(-1+y)^2-y+1=0\Leftrightarrow -y^2+y=0\Leftrightarrow y=0;y=1$.

Vậy có 3 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(0;1),(-1;0),(-1;1)$

Câu 3 (1,0 điểm).

Với các số thực dương a và b thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=(a+b)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right).$$

Lời giải

a) $S^2\le 2(a+b)^2\left(\dfrac{1}{a^2-ab+2b^2}+\dfrac{1}{b^2-ab+2a^2}\right)=\dfrac{2(a+b)^2\left(3a^2+3b^2-2ab\right)}{2a^4-3a^3b+6a^2b^2-3ab^3+2b^4}$

$=\dfrac{2\left(a^2+2ab+b^2\right)\left(3a^2+3b^2-2ab\right)}{2\left(a^2+b^2\right)^2-3ab\left(a^2+b^2\right)+2a^2b^2}$. Do đó $S^2\le\dfrac{2\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}+2\right)\left(\dfrac{3\left(a^2+b^2\right)}{ab}-2\right)}{2\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^2-3\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)+2}$.

Đặt $t=\dfrac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$, ta được $S^2\le\dfrac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}$

Ta chứng minh được $\dfrac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2} \le 8\ (1)$. Thật vậy

$(1) \Leftrightarrow 3t^2+4t-4 \le 8t^2-12t+8 \Leftrightarrow (t-2)(5t-6) \ge 0$ đúng $\forall t \ge 2$

Do đó $S \le 2\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$. Vậy $\max S = 2\sqrt{2}$.

Bài 4 (3,0 điểm).

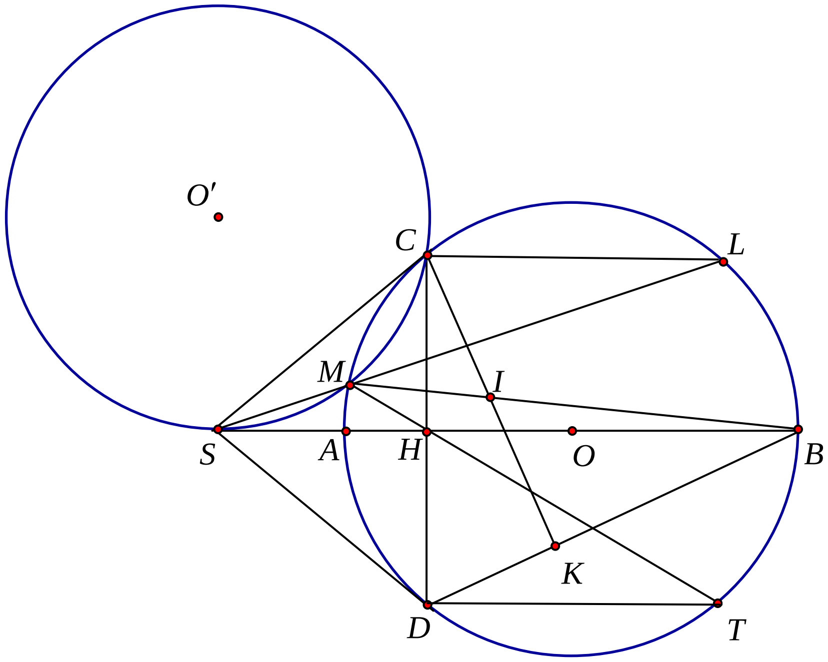
Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Từ điểm S thuộc tia đối của tia AB kẻ đến (O) hai tiếp tuyến SC và SD (C và D là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của đường kính AB và dây CD. Vẽ đường tròn (O') đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AB tại S. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm M khác C.

a) Chứng minh tứ giác $SMHD$ nội tiếp.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên BD, I là giao điểm của BM và CK. Chứng minh rằng HI song song với BD.

c) Các đường thẳng SM và HM lần lượt cắt (O) tại các điểm L và T (L,T khác M). Chứng minh rằng tứ giác $CDTL$ là hình vuông khi và chỉ khi $MC^2 = MS.MD$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{MSH} = \widehat{SCM} = \widehat{MDC} \Rightarrow SMHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) $SMHD$ là tứ giác nội tiếp $\widehat{DMH} = \widehat{DSA} = \widehat{DAB} - \widehat{SDA} = \widehat{DMB} - \widehat{ABD}$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DMB} - \widehat{DMH} = \widehat{HMI}$

Tứ giác $CHKB$ có $\widehat{CHB} = \widehat{CKB} = 90^0$ nên nội tiếp $\widehat{HCI} = \widehat{HBK} = \widehat{HMI}$ $\Rightarrow CMHI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MIH}=\widehat{MCH}=\widehat{HBD}\Rightarrow HI\,//\,BD$.

c) Ta có $\widehat{DTM}=\widehat{SDM}=\widehat{SHM}\Rightarrow DT\,//\,AB$; $\widehat{CLM}=\widehat{SCM}=\widehat{MSA}\Rightarrow CL\,//\,AB$

$\Rightarrow \widehat{LCD}=\widehat{TDC}=90^0\Rightarrow CDTL$ là hình chữ nhật. Do đó $CDTL$ là hình vuông $\Leftrightarrow \Delta OCD$ vuông cân, tức là ΔSCD vuông cân.

Như vậy $SO=R\sqrt{2}$ với R là bán kính đường tròn (O). Khi đó

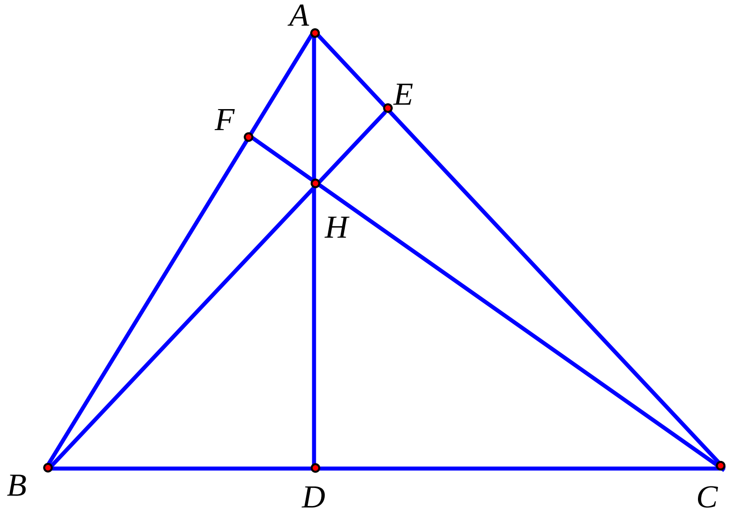
$\widehat{MCS}=\widehat{MSH}=\widehat{MDC}\Rightarrow \widehat{MCD}=\widehat{MSC}$

Suy ra ΔMCS; ΔMDC đồng dạng $\Rightarrow MC^2=MS.MD$.

Bài 5 (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và có trực tâm H. Gọi D,E,F lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ A,B,C của tam giác ABC. Biết $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2+\left(\frac{BC}{HD}\right)^2+\left(\frac{CA}{HE}\right)^2=36$, hãy chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải



Đặt $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$ và S là diện tích ΔABC. Ta có

$$a^2=BC^2=BE^2+EC^2=BE^2+\left(b-AE\right)^2=BE^2+b^2+AE^2-2b.AE=b^2+c^2-2b.AE$$

$$\Rightarrow AE=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}.\text{ Do đó } 4S^2=BE^2.b^2=b^2\left(c^2-AE^2\right)=b^2\left(c^2-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2}\right)$$

$$16S^2=4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2=\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)$$
$$=\left(b+c+a\right)\left(b+c-a\right)\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)$$
$$\le\left(b+c+a\right)\left(\frac{b+c-a+a+b-c+a-b+c}{3}\right)^3=\frac{\left(a+b+c\right)^4}{27}$$

Suy ra $(a+b+c)^2 \geq 12S\sqrt{3}$.

Ta lại có $\left(\frac{a}{HD}+\frac{b}{HE}+\frac{c}{HF}\right)(a.HD+b.HE+c.HF) \geq (a+b+c)^2 \geq 12S\sqrt{3}$

Mà $a.HD+b.HE+c.HF=2S \Rightarrow \frac{a}{HD}+\frac{b}{HE}+\frac{c}{HF} \geq 6\sqrt{3}$

Do đó $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2+\left(\frac{BC}{HD}\right)^2+\left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{HD}+\frac{b}{HE}+\frac{c}{HF}\right)^2 \geq 36$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b+c-a=c+a-b=a+b-c \\ HD=HE=HF \\ \frac{a}{HD}=\frac{b}{HE}=\frac{c}{HF} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy ΔABC đều.

SỞ GD&ĐT SƠN LA

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Đề số 17

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN CHUYÊN
Ngày thi: 23/7/2020
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. ***(2,0 điểm)***

a) Tính giá trị của biểu thức: $A = \dfrac{2019}{1-\sqrt{2020}} + \dfrac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}} - \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{2020}}+\dfrac{1}{2020}}}{1+\sqrt{2020}}$.

b) Giải phương trình: $x+\sqrt{4-x^2}=2$.

Câu 2. ***(2,0 điểm)*** Cho Parabol (P) $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=4mx-m-3$ (m là tham số).

a) Tìm m để Parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm m để Parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ cùng nhỏ hơn 1.

Câu 3. ***(1,0 điểm)*** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(4x+y)(x+4)=6 \\ x^2+8x+y=-5 \end{cases}$.

Câu 4. ***(3,0 điểm)*** Cho đường tròn *(O)*, từ điểm *A* ngoài đường tròn vẽ đường thẳng *AO* cắt đường tròn *(O)* tại *B* và *C* $(AB < AC)$. Qua *A* vẽ đường thẳng không đi qua tâm *O* cắt đường tròn tại *D* và *E* $(AD < AE)$. Đường thẳng vuông góc với *AB* tại *A*, cắt đường thẳng *CE* tại *F*.

a) Chứng minh rằng tứ giác *ABEF* nội tiếp đường tròn.

b) Gọi *M* là giao điểm thứ hai của *FB* với đường tròn *(O)*, chứng minh $DM \perp AC$.

c) Chứng minh: $CE.CF + AD.AE = AC^2$.

Câu 5. ***(1,0 điểm)***

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} > 5$.

Câu 6. ***(1,0 điểm)*** Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. *M* là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$, *C* là một điểm trên nửa đường tròn. *AC* cắt *MO* tại *D*. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MCD* luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi C di động trên nửa đường tròn.

-------------Hết-------------

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ……………………………………………….

Số báo danh: ………….

SỞ GD&ĐT SƠN LA

ĐỀ CHÍNH THỨC

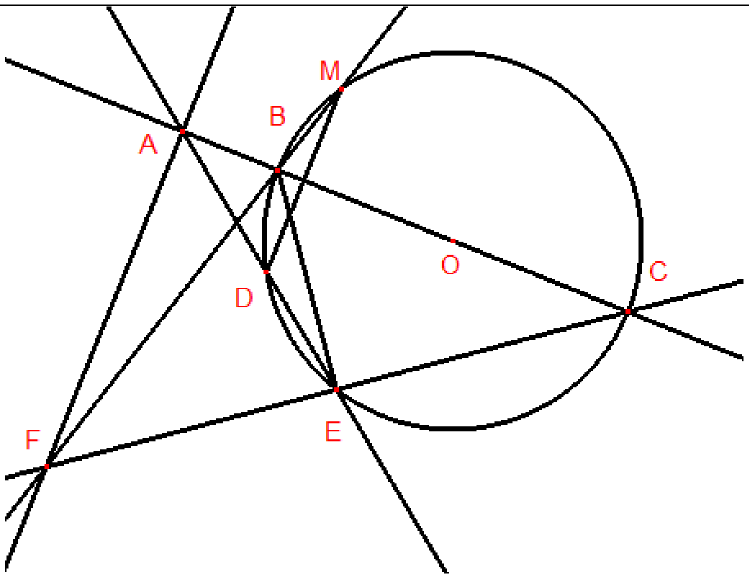
(HDC có 06 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: TOÁN CHUYÊN

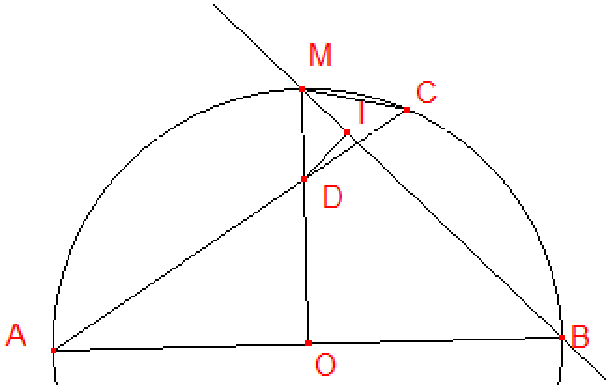
Câu	**Đáp án**	**Điểm**
1	a) *Tính giá trị của biểu thức:* $A=\dfrac{2019}{1-\sqrt{2020}}+\dfrac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}}-\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{\sqrt{2020}}+\dfrac{1}{2020}}}{1+\sqrt{2020}}.$ b) *Giải phương trình:* $x+\sqrt{4-x^2}=2.$	
	a) *Ta có:* $A=\dfrac{2019}{1-\sqrt{2020}}+\dfrac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}}-\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2020}}\right)^2}}{1+\sqrt{2020}}.$	0,25
	$=\dfrac{2019}{1-\sqrt{2020}}+\dfrac{2021+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}}-\dfrac{1}{\sqrt{2020}}$	0,25
	$=\dfrac{2019}{1-\sqrt{2020}}+\dfrac{2020+\sqrt{2020}}{\sqrt{2020}}$ $=\dfrac{2019}{1-\sqrt{2020}}+\sqrt{2020}+1$	0,25
	$=0$	0,25
	b) *Ta có:* $x+\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=2-x$ $\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0\\4-x^2=(2-x)^2\end{cases}$	0,5

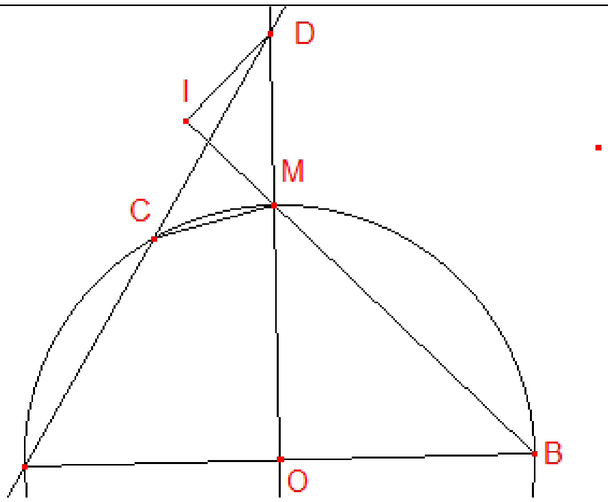
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ x(x-2)=0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$	0.25
2	Cho Parabol (P) $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=4mx-m-3$ a) Tìm m để Parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt. b) Tìm m để Parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ cùng nhỏ hơn 1.	
	a) (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt. ⇔ Phương trình $x^2-4mx+m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow 4m^2-m-3>0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$ (*)	0,25
	b) Với điều kiện (*) thì Parabol (P) cắt d tại hai điểm phân biệt. Khi đó, parabol (P) cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 cùng nhỏ hơn 1. $\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1)(x_2-1)>0 \\ x_1+x_2<2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \\ x_1+x_2<2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)-4m+1>0 \\ 4m<2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{4}{3} \\ m<\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$	0,25
	Kết hợp với điều kiện (*) ta được: parabol (P) cắt đường thẳng d	

	tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 cùng nhỏ hơn 1 khi $m < -\frac{3}{4}$.	0,25
3	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(4x+y)(x+4)=6 \\ x^2+8x+y=-5 \end{cases}$.	
	Ta có: $\begin{cases} x(x+4)(4x+y)=6 \\ x^2+8x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+4x)(4x+y)=6 \\ (x^2+4x)+(4x+y)=-5 \end{cases}$	0,25
	Vậy x^2+4x và $4x+y$ là 2 nghiệm của phương trình: $X^2+5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-2 \\ X=-3 \end{array}\right.$	0,25
	+) Với $\begin{cases} x^2+4x=-2 \\ 4x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\pm\sqrt{2} \\ y=-4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2+\sqrt{2} \\ y=5-4\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2-\sqrt{2} \\ y=5+4\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$	0,25
	+) Với $\begin{cases} x^2+4x=-3 \\ 4x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=10 \end{cases} \end{array}\right.$ Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là: $\left(-2+\sqrt{2};5-4\sqrt{2}\right)$, $\left(-2-\sqrt{2};5+4\sqrt{2}\right)$, $(-1;2)$, $(-3;10)$.	0,25
4	*Cho đường tròn (O), từ điểm A ngoài đường tròn vẽ đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại B và C* $(AB < AC)$. *Qua A vẽ đường thẳng không đi qua tâm O cắt đường tròn tại D và E* $(AD < AE)$. *Đường thẳng vuông góc với AB tại A, cắt đường thẳng CE tại F.* *a) Chứng minh rằng tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn.* *b) Gọi M là giao điểm thứ hai của FB với đường tròn (O), chứng minh* $DM \perp AC$. *c) Chứng minh:* $CE.CF + AD.AE = AC^2$.	

		0,25
	a) Ta có $\widehat{FAB}=90^{o}$, Vì AF $\perp AB$, $\widehat{BEC}=90^{o}$ tứ giác *ABEF* có $\widehat{FAB}+\widehat{BEF}=180^{o}$ Suy ra tứ giác *ABEF* nội tiếp.	0,25 0,5
	b) Ta có $\widehat{AFB}=\widehat{AEB}$ bằng $\frac{1}{2}$sđ cung $\overset\frown{AB}$ (của đường tròn ngoại tiếp tứ giác *ABEF*) Mặt khác $\widehat{AEB}=\widehat{BMD}$ bằng $\frac{1}{2}$sđ cung $\overset\frown{BD}$ (của đường tròn tâm O) Do đó $\widehat{AFB}=\widehat{BMD}\Rightarrow AF//DM$ mà AF $\perp AC\Rightarrow DM\perp AC$.	0,5 0,5
	c) Xét tam giác ACF và tam giác ECB $\Delta ACF\sim\Delta ECB(g.g)\Rightarrow\frac{AC}{CE}=\frac{CF}{BC}\Rightarrow CE.CF=AC.BC\ (1)$ $\Delta ABD\sim\Delta AEC(g.g)\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AD.AE=AB.AC\ (2)$ $(1)+(2)\Rightarrow AD.AE+CE.CF=AC(AB+BC)=AC^2$. Vậy $CE.CF+AD.AE=AC^2$ *(đpcm)*	0,5 0,5
5	*a) Cho ba số thực dương* a,b,c *thỏa mãn* $a+b+c=4$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P=\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$. *b) Chứng minh rằng:*	

	$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}>5.$	
	a) Áp dụng BĐT: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$. Ta có $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{4}{c\left(a+b\right)}$.	0,25
	Mặt khác $\frac{4}{c(a+b)}\geq\frac{4}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}=1$ *(vì* $4c\left(a+b\right)\leq\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow c(a+b)\leq\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$ *)*	
	Vậy $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\geq1.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $c=2, a=b=1.$	
	b) Đặt $S_1=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}$ Xét biểu thức $S_2=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$.	0,25
	Ta có $S_1+S_2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ $S_1+S_2=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{121}-\sqrt{120}=\sqrt{121}-1=10$	

	Mặt khác dễ dàng chứng minh được: $\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}} > \frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}}, \forall k \geq 1, k \in N$ $\Rightarrow S_1 > S_2$. Vậy $S_1 > 5$, hay $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} > 5$. *(đpcm).*	0,25
6	*Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. M là điểm chính giữa cung* $\overset{\frown}{AB}$, *C là một điểm trên nửa đường tròn. AC cắt MO tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi C di động trên nửa đường tròn.*	
	Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MDC*, xảy ra hai khả năng Trường hợp 1. Điểm *C* nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$  Ta có $\widehat{MID} = 2.\widehat{MCD} = 90^{\circ}$. Lại có $IM = ID$ nên tam giác *MID* vuông cân tại *I*, do đó $\widehat{DMI} = 45^{\circ}$, hay $\widehat{OMI} = 45^{\circ} = \widehat{OMB}$. Suy ra *M, I, B* thẳng hàng nên *I* thuộc *BM* cố định	0,5
	Trường hợp 2. Điểm *C* nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AM}$	

	 Tương tự ta có $\widehat{MID} = 2.\widehat{MCD} = 90^{\circ}$. Mà $IM = ID$ nên tam giác MID vuông cân tại I, do đó $\widehat{DMI} = 45^{\circ} \Rightarrow \widehat{IMO} = 135^{o}$. Mặt khác $\widehat{OMB} = 45^{\circ}$ nên $\widehat{IMB} = \widehat{IMO} + \widehat{OMB} = 180^{o}$. Suy ra ba điểm I, M, B thẳng hàng, hay I thuộc BM cố định.	0,5

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN**
TỈNH YÊN BÁI **NĂM HỌC 2020 - 2021**
Môn thi: **Toán**
ĐỀ CHÍNH THỨC Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
(Đề thi có 05 câu) Khóa thi ngày: **20/07/2020**
Đề số 18

Câu 1. *(1,5 điểm)* Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\left(\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$, với $a>0, a\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm tất cả các giá trị của a để $P>2$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Cho parabol (P): $y=2x^2$ và đường thẳng (d): $y=2x+m-1$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=1$.

2. Giải phương trình $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+10}}+2=\sqrt{x^2+x+4}$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4x+2y=0 \\ \left(2x-y^2\right)^2+4-2y=0 \end{cases}$.

Câu 3. *(3,5 điểm)* Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M khác điểm B. Kẻ BH vuông góc với CM (H thuộc CM). Gọi K là giao điểm của OH với BC.

1. Chứng minh tứ giác $BHCO$ nội tiếp, HO là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.

2. Chứng minh $BK.BH=CK.MH$.

3. Gọi I là trung điểm của cạnh AD, tia BI cắt đường tròn (O) tại E. Tính độ dài đoạn thẳng DE theo R.

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Chứng minh ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Câu 4. *(1,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A=n^2+2n+8$ là số chính phương.

2. Cho biểu thức $P=ab(a+b)+2$, với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì $a-b$ chia hết cho 3.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

1. Cho các số thực a,b,c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

2. Cho 25 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một lục giác đều cạnh $6cm$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $3cm$.

__________ Hết __________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 - 2021

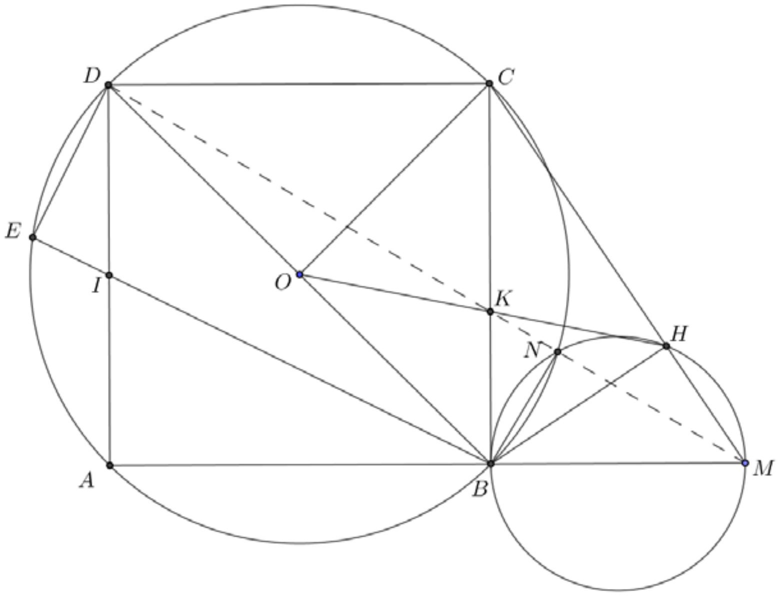
HDC ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 05 câu)

Môn thi: **Toán**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Khóa thi ngày: **20/07/2020**

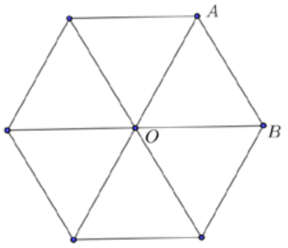
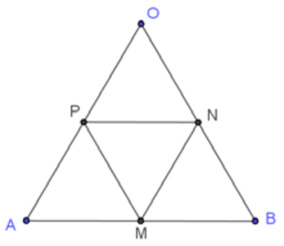
Thí sinh không sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh: ……………………………………………… Số báo danh:……………………....
Cán bộ coi thi thứ nhất: ……………………………….… Kí tên: ……………………………….
Cán bộ coi thi thứ hai: ..…………………………….……………… Kí tên: ………………………………

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 *(1,5 đ)*	Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right):\left(\frac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$, với $a>0, a\neq 1$. 1. Rút gọn biểu thức P. 2. Tìm tất cả các giá trị của *a* để $P>2$.	
	1. Với $a>0, a\neq 1$ ta có $P=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}\left(a-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right):\left(\frac{a\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}\right)$	0,25
	$=\frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1+4\text{a}\sqrt{a}-4\sqrt{a}}{a-1}:a\sqrt{a}$	0,25
	$=\frac{4\text{a}\sqrt{a}}{a-1}:a\sqrt{a}$	0,25
	$=\frac{4}{a-1}$. Vậy $P=\frac{4}{a-1}$	0,25
	2. Tìm tất cả các giá trị của *a* để $P>2$. $P>2\Leftrightarrow\frac{4}{a-1}>2\Leftrightarrow\frac{2}{a-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{3-a}{a-1}>0\Leftrightarrow 1<a<3$ Vậy $1<a<3$ thì $P>2$.	0,5
Câu 2 *(3,0 đ)*	1. Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m-1$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\mid x_1-x_2\mid=1$.	
	Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2-2x-m+1=0\,(*)$ (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta'=2m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.	0,25

	Gọi x_1,x_2 là nghiệm của (*) khi đó x_1,x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1.x_2=\dfrac{1-m}{2} \end{cases}$.	0,25
	Do đó $\lvert x_1-x_2\rvert=1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2=1 \Leftrightarrow 1-4\dfrac{(1-m)}{2}=1 \Leftrightarrow m=1$. Thỏa mãn điều kiện $m>\dfrac{1}{2}$. Vậy $m=1$.	0,5
	2. Giải phương trình $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+10}}+2=\sqrt{x^2+x+4}$.	
	Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2+x+10>0 \\ x^2+x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{39}{4}>0 \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0 \end{cases}$ thỏa mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đặt $t=\sqrt{x^2+x+4}$,Điều kiện $t>0$. Phương trình trở thành $\dfrac{t^2-4}{\sqrt{t^2+6}}+2=t$	0,25
	$\Leftrightarrow \dfrac{(t-2)(t+2)}{\sqrt{t^2+6}}-(t-2)=0 \Leftrightarrow (t-2)\left(\dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+6}}-1\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ \sqrt{t^2+6}=t+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).	0,25
	* Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+x+4}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$. * Với $t=\dfrac{1}{2}$ ta có $\sqrt{x^2+x+4}=\dfrac{1}{2}$. Phương trình vô nghiệm. Vậy phương trình có các nghiệm là $x=-1$ và $x=0$.	0,25
	3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4x+2y=0 & (1) \\ \left(2x-y^2\right)^2+4-2y=0 & (2) \end{cases}$.	
	Cộng vế của hai phương trình (1) và (2) ta được $\left(2x-y^2\right)^2+x^2-4x+4=0$	0,25
	$\left(2x-y^2\right)^2+(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y^2=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y^2=4 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$. Thử lại ta thấy $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2,2)$.	0,5

Câu 3. *(3,5 đ)*	Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M khác điểm B. Kẻ BH vuông góc với CM (H thuộc CM). Gọi K là giao điểm của OH với BC. 1. Chứng minh tứ giác $BHCO$ nội tiếp, HO là tia phân giác của $\widehat{BHC}$. 2. Chứng minh $BK.BH = CK.MH$. 3. Gọi I là trung điểm của cạnh AD, tia BI cắt đường tròn (O) tại E. Tính độ dài đoạn thẳng DE theo R. 4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Chứng minh ba điểm M, N, K thẳng hàng.	
		
	1. Theo giả thiết $BH \perp CM$ nên $\widehat{BHC} = 90^o$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^o$. Suy ra $\widehat{BHC} + \widehat{BOC} = 180^o$ nên tứ giác $BHCO$ nội tiếp.	0,5
	Vì $BHCO$ nội tiếp nên $\widehat{BHO} = \widehat{BCO} = 45^o$. Suy ra HO là phân giác của $\widehat{BHC}$.	0,5
	2. Theo chứng minh ở phần a) ta có HK là phân giác của ΔHBC suy ra $\frac{BK}{CK} = \frac{BH}{CH}$ (1)	0,5
	Mặt khác dễ thấy $\Delta HMB \backsim \Delta HBC$ (g.g) nên $\frac{BH}{CH} = \frac{MH}{BH}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BK}{CK} = \frac{MH}{BH} \Leftrightarrow BK.BH = CK.MH$.	0,5
	3. Ta có $\Delta ABI \backsim \Delta EDI$ (g.g) Suy ra $\frac{DE}{AB} = \frac{ID}{IB} \Leftrightarrow DE = \frac{AB.ID}{IB}$	0,25
	Xét ΔABD vuông cân có $BD = 2R$ nên $AD = AB = R\sqrt{2}$,	0,25

	$IA = ID = \frac{1}{2}AD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.	
	Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông ABI ta có $IB = \sqrt{AB^2 + AI^2} = \frac{R\sqrt{10}}{2}$. Vậy $DE = \frac{R\sqrt{2}.\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{10}}{2}} = \frac{R\sqrt{10}}{5}$.	0,25
	4. *Ta chứng minh M,K,D thẳng hàng. Thật vậy: Gọi K' là giao điểm của MD và đoạn BC Vì $BM//CD$ nên theo định lí Talet ta có $\frac{BK'}{CK'} = \frac{BM}{AD} = \frac{BM}{BC}$ (3) (vì $AD = BC$) Mà $\Delta HMB \backsim \Delta HBC$ (g.g) nên $\frac{BM}{BC} = \frac{HB}{HC}$. Mặt khác theo chứng minh phần b) ta có $\frac{HB}{HC} = \frac{BK}{CK}$. Từ đó suy ra $\frac{BM}{BC} = \frac{BK}{CK}$ (4) Từ (3), (4) ta có $\frac{BK'}{CK'} = \frac{BK}{CK}$ (với K, K' thuộc đoạn BC) suy ra $K' \equiv K$. Vậy M,K,D thẳng hàng (3)	0,25
	* Ta chứng minh M,N,D thẳng hàng. Thật vậy Vì $BH \perp MC$ nên đường tròn ngoại tam giác BHM có đường kính là BM suy ra $\widehat{BNM} = 90^o$. Vì BD là đường của đường tròn (O) nên $\widehat{BND} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)). Từ đó suy ra $\widehat{BNM} + \widehat{BND} = 180^o$ nên M,N,D thẳng hàng (4). Từ (3) và (4) ta có K,N,M thẳng hàng.	0,5
Câu 4. *(1,0 đ)*	1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + 2n + 8$ là số chính phương.	
	Đặt $n^2 + 2n + 8 = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$ $\Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1=7 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ n=2 \end{cases}$ Với $n = 2$ ta có $A = 16 = 4^2$ là số chính phương.	0,5
	2. Cho biểu thức $P = ab(a+b)+2$, với a,b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì $a-b$ chia hết cho 3.	
	Ta có $ab(a+b)+2$ chia hết cho 3, suy ra $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 1. Suy ra hai số a,b không chia hết cho 3 và phải có cùng số dư khi chia cho 3. Giả sử a,b đều chia cho 3 dư 1 thì $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 2 (trái giả thiết). Suy ra a,b đều chia cho 3 dư 2. Vậy $a-b$ chia hết cho 3.	0,5
Câu 5 (	1. Cho các số thực a,b,c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau	0,25

1,0 đ)	$P=\dfrac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\dfrac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\dfrac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$. 1. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $P=\sqrt{\left(\dfrac{2a}{a+b}\right)\left(\dfrac{2a}{a+c}\right)}+\sqrt{\left(\dfrac{\frac{b}{2}}{b+c}\right)\left(\dfrac{2b}{b+a}\right)}+\sqrt{\left(\dfrac{2c}{c+a}\right)\left(\dfrac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)}$ $\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2a}{a+c}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{b}{2}}{b+c}+\dfrac{2b}{b+a}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2c}{c+a}+\dfrac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)$ $=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{b+a}\right)+\left(\dfrac{2a}{a+c}+\dfrac{2c}{c+a}\right)+\left(\dfrac{\frac{b}{2}}{b+c}+\dfrac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(2+2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$.	
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{2a}{a+c}\\ \dfrac{\frac{b}{2}}{b+c}=\dfrac{2b}{b+a}\\ \dfrac{\frac{c}{2}}{c+b}=\dfrac{2c}{c+a}\end{cases}\Leftrightarrow a=7b=7c$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{9}{4}$ khi $a=7b=7c$.	0,25
	2. Cho 25 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một lục giác đều cạnh $6cm$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $3cm$.	
	+ Giả sử 25 điểm đã cho nằm trong hoặc nằm trên cạnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn tâm O   + Nối O với 6 đỉnh của lục giác tạo thành 6 tam giác đều. Khi đó sẽ có ít nhất 5 điểm nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều trong số 6 tam giác đó (theo nguyên lý Dirichlet)	0,25
	+ Giả sử 5 điểm trong 25 điểm đó cùng nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác đều OAB.	0,25

	+ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, OB, OA. Khi đó bốn tam giác AMP, BMN, ONP, MNP là các tam giác đều cạnh bằng $3cm$. + Năm điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác OAB sẽ có ít nhất hai điểm nằm trong một trong hay nằm trên cạnh của một trong bốn tam giác đều trong số bốn tam giác trên (theo nguyên lý Dirchlet). Khoảng cách giữa hai điểm đó không quá $3cm$.	

Chú ý: *Thí sinh làm bài theo cách khác chính xác vẫn cho điểm tối đa*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học: 2020 - 2021
Môn: Toán (Đề chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút

Đề số 19

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x>0; x\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm x để $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$.

Câu 2 (2,0 điểm).

1. Cho phương trình $x^4-2mx^2+2m+6=0$. Tìm giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 sao cho $x_1<x_2<x_3<x_4$ và $x_4-2x_3+2x_2-x_1=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} \end{cases}$.

Câu 3 (4,0 điểm).

Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K. Gọi L là giao điểm của MA và BC. Đường thẳng $A'I$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S.

1. Chứng minh tam giác ANA' là tam giác cân và $MA'.MK=ML.MA$.
2. Chứng minh $MI^2=ML.MA$ và tứ giác $NHIK$ là tứ giác nội tiếp.
3. Gọi T là trung điểm của cạnh SA, chứng minh ba điểm T,I,K thẳng hàng.
4. Chứng minh nếu $AB+AC=2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS.

Câu 4 (1,0 điểm).

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $2^x-y^2+4y+61=0$.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh :

$$\frac{a}{ca+4}+\frac{b}{ab+4}+\frac{c}{bc+4}\leq\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

---HẾT---

Họ và tên thí sinh……………………………….…….Số báo danh…………………………..……
Cán bộ coi thi thứ 1……………………………Cán bộ coi thi thứ 2……………………..……

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học: 2020-2021
Môn: Toán (Đề chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

(Hướng dẫn chấm thi có 5 trang)

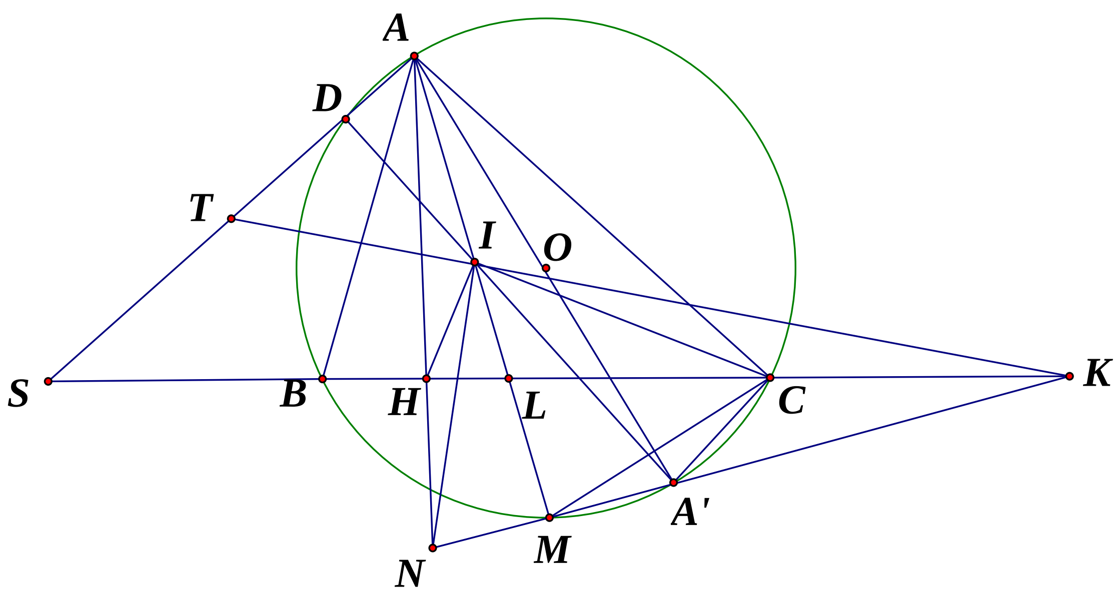
Lưu ý: - Điểm làm tròn đến 0,25.

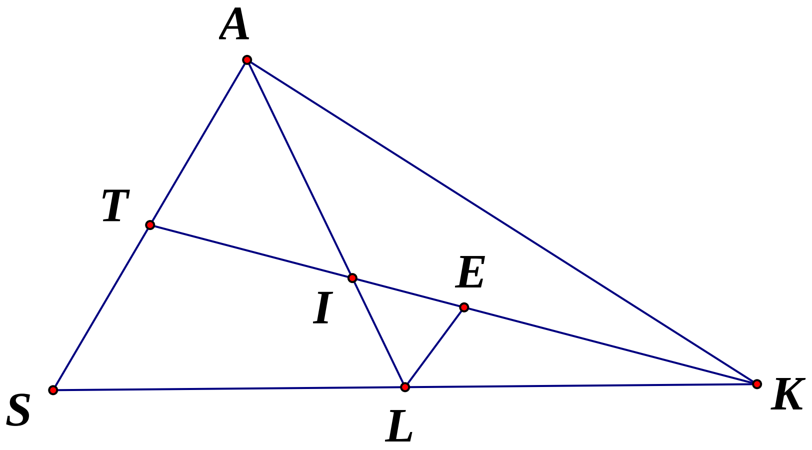
- Học sinh nếu dùng định lý Menelauyt mà không chứng minh thì trừ 0,25 điểm/bài.

- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	**Điểm**
Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x>0;x\neq 1$.	
1.(1,0 điểm) Rút gọn biểu thức P	
$P=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$	**0,25**
$=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$	**0,25**
$=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}$	**0,25**
$=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$	**0,25**
2.(1,0 điểm) Tìm x để $\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$	
$\frac{1}{P}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}-1\geq 0$	**0,25**
$\Leftrightarrow\frac{16\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1-8\sqrt{x}-8}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}\geq 0$	**0,25**
$\Leftrightarrow 6\sqrt{x}-x-9\geq 0$ (vì $8\left(\sqrt{x}+1\right)>0$ với mọi $x>0;\ x\neq 1$)	**0,25**
$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9\leq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)^2\leq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow x=9$	**0,25**

Vậy x = 9 thỏa mãn điều kiện.	
Câu 2.1 (1,0 điểm) Cho phương trình $x^4-2mx^2+2m+6=0$. Tìm giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2;\ x_3;x_4$ sao cho: $x_1<x_2<x_3<x_4$ và $x_4-2x_3+2x_2-x_1=0$.	
Phương trình $x^4-2mx^2+2m+6=0.$ (1) Đặt $t=x^2\left(t\ge 0\right)$, ta có : $t^2-2mt+2m+6=0$ (2) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1,t_2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ P=2m+6>0\\ S=2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-6>0\\ m>0\end{cases}$ (3)	0,25
Với điều kiện (3), phương trình (2) có 2 nghiệm dương $0<t_1<t_2$ => phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt: $x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$ Theo đề bài ta có $x_4-2x_3+2x_2-x_1=0\Leftrightarrow x_4-x_1=2\left(x_3-x_2\right)$ $\Leftrightarrow\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=4t_1(4).$	0,25
Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases}t_1+t_2=2m\\ t_1t_2=2m+6\end{cases}$ (5) Từ (4) và (5) ta có: $5t_1=2m$ và $4t_1^{\ 2}=2m+6\Rightarrow 16m^2-50m-150=0$	0,25
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{15}{8}\\ m=5\end{array}\right.$ Đối chiếu với điều kiện suy ra với $m=5$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán.	0,25
Câu 2.2 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy^2+4y^2+8=x(x+2)\ \ (1)\\ x+y+3=3\sqrt{2y-1}\qquad (2)\end{cases}.$	
Điều kiện: $2y-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge\dfrac{1}{2}.$ Phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow(x+4)(y^2-x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=y^2+2\end{array}\right.$	0,5
Thế $x=-4$ vào phương trình thứ 2 ta được $y-1=3\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\ (y-1)^2=9(2y-1)\end{cases}\Leftrightarrow y=10+3\sqrt{10}$	0,25
Với $x=y^2+2$, thay vào (2) ta được: $y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}$ (3) Ap dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $y^2+y+5=(y^2-y+1)+(2y-1)+5>(2y-1)+5\ge 2\sqrt{5(2y-1)}\ge 3\sqrt{2y-1}$	0,25

Do đó phương trình (3) vô nghiệm	
Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AH và tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng AI cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K. Gọi L là giao điểm của MA và BC. Đường thẳng $A'I$ cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai D, hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S.	
	
1.(1,0 điểm) Chứng minh rằng tam giác ANA' là tam giác cân và $MA'.MK = ML.MA$.	
Ta có $\widehat{A'AC} = 90^0 - \widehat{AA'C} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}$ mà AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên AI là phân giác góc $\widehat{NAA'}$.	0,25
$AM \perp MA' \Rightarrow$ tam giác ANA' cân tại A.	0,25
$\widehat{HKN} = 90^0 - \widehat{HNK} = \widehat{HAM} = \widehat{LAA'}$	0,25
$\Delta MAA' \sim \Delta MKL(g.g) \Rightarrow MA'.MK = ML.MA$	0,25
2. (1,0 điểm) Chứng minh rằng $MI^2 = ML.MA$ và tứ giác NHIK là tứ giác nội tiếp.	
$\widehat{MIC} = \widehat{MAC} + \widehat{ACI} = \widehat{MCB} + \widehat{BCI} = \widehat{MCI} \Rightarrow MI = MC$	0,25
$\Delta MCL \sim \Delta MAC(g.g) \Rightarrow \quad ML.MA = MC^2 \Rightarrow ML.MA = MI^2$.	0,25
$MN.MK = MA'.MK = ML.MA = MI^2 \Rightarrow \Delta IMN \sim \Delta KIN(g.g) \Rightarrow \widehat{NIK} = 90^0$	0,25
$\widehat{NIK} = \widehat{NHK} = 90^0$. Vậy tứ giác $NHIK$ nội tiếp.	0,25
3. (1,0 điểm) Gọi T là trung điểm của cạnh SA. Chứng minh rằng ba điểm T, I, K thẳng hàng	
Tứ giác $NHIK$ nội tiếp suy ra $\widehat{IHK} = \widehat{INK} = \widehat{IA'M} = \widehat{IAD}$.	0,25

Suy ra tứ giác $AIHS$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AIS}=\widehat{AHS}=90^0$.	0,25
$\widehat{TIA}=\widehat{TAI}=\widehat{INK}$	0,25
$\Rightarrow \widehat{TIA}=\widehat{MIK}$, suy ra ba điểm T,I,K thẳng hàng	0,25
4. (1,0 điểm) Chứng minh rằng nếu $AB+AC=2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS.	
Ta có $\frac{AI}{IL}=\frac{AB}{BL}=\frac{AC}{CL}=\frac{AB+AC}{BL+CL}=\frac{2BC}{BC}=2$	0,5
	
Kẻ $LE \parallel SA\,(E\in TK)$. Ta có $\frac{LE}{AT}=\frac{IL}{IA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{LE}{ST}=\frac{1}{2}$	0,25
Suy ra L là trung điểm của SK mà $\frac{AI}{IL}=2$ nên I là trọng tâm của tam giác ASK.	0,25
Câu 4 (1,0 điểm). Tìm cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $2^x-y^2+4y+61=0$ (1).	
Ta có (1) $\Leftrightarrow 2^x+65=(y-2)^2$.	0,25
Vì 65 chia hết cho 5 và 2^x không chia hết cho 5 với mọi x nguyên dương nên nếu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình (1) thì $y-2$ là số nguyên không chia hết cho 5. Suy ra $(y-2)^2\equiv\pm1\pmod 5$. Do đó $2^x\equiv\pm1\pmod 5$, suy ra $x=2k$, với k là số nguyên dương.	0,25
Thay vào phương trình (1) ta được: $2^{2k}+65=(y-2)^2\Leftrightarrow 65=\left(y-2+2^k\right).\left(y-2-2^k\right)$ (2)	0,25
Vì $k;y$ nguyên dương nên $y-2+2^k>0$, từ (2) suy ra $y-2-2^k>0$ và $y-2+2^k>y-2-2^k$. Do đó	0,25

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-2+2^k=65\\y-2-2^k=1\end{cases}\\\begin{cases}y-2+2^k=13\\y-2-2^k=5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=5\\y=35\end{cases}\\\begin{cases}k=2\\y=11\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=10\\y=35\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\y=11\end{cases}\end{array}\right.$ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là $(10;35)$ và $(4;11)$	
Câu 5 (1,0 điểm). Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng $\frac{a}{ca+4}+\frac{b}{ab+4}+\frac{c}{bc+4}\le\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right).\ (1)$	
Vì a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$ nên tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho $a=\frac{2x}{y};b=\frac{2y}{z};c=\frac{2z}{x}$. Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$	**0,25**
$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\ge\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\ge3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\ (2)$ $\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$	**0,25**
$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+\frac{y}{z}.\frac{z}{x}+\frac{z}{x}.\frac{x}{y}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\quad(3)$ Từ (2) và (3) có $2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$	**0,25**
Lại có $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ $\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$ Ta có bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.	**0,25**

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Đề số 20

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM 2020
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN
Thời gian: 150 phút ***(không kể thời gian giao đề)***
Ngày thi: 19/07/2020

Câu 1. (1,0 điểm). Cho biểu thức $A=\left(1-\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $a=2021-2\sqrt{2020}$.

Câu 2. (*2,0 điểm*).

a) Giải phương trình: $2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0.$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $(d): y=2x-m$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+mx+8=0$ và phương trình $x^2+x+m=0$ có ít nhất một nghiệm chung.

c) Chứng minh rằng với *a, b, c* là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm

$4ax^2+2(b+c)x+c=0$ (1); $4bx^2+2(c+a)x+a=0$ (2); $4cx^2+2(a+b)x+b=0$ (3).

Câu 4. (3,5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC với $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$; $ABDE$ nội tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $DFEM$ nội tiếp.

c) Tia MH cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng các đường thẳng AI, EF, BC đồng quy.

Câu 5. (1,0 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $y^2+2y=4x^2y+8x+7$.

b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a,b) thỏa mãn $b^2+3a \vdots a^2b$.

Câu 6. (1,0 điểm).

a) Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng:

i. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$ ***ii.*** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge \frac{1}{4}\left(a+5b+2\right)$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$.

HẾT.

Lưu ý: *Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:..Số báo danh:..

Chữ ký của giám thị 1:..Chữ ký của giám thị 2:..................................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC

(Hướng dẫn chấm gồm 07 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2020

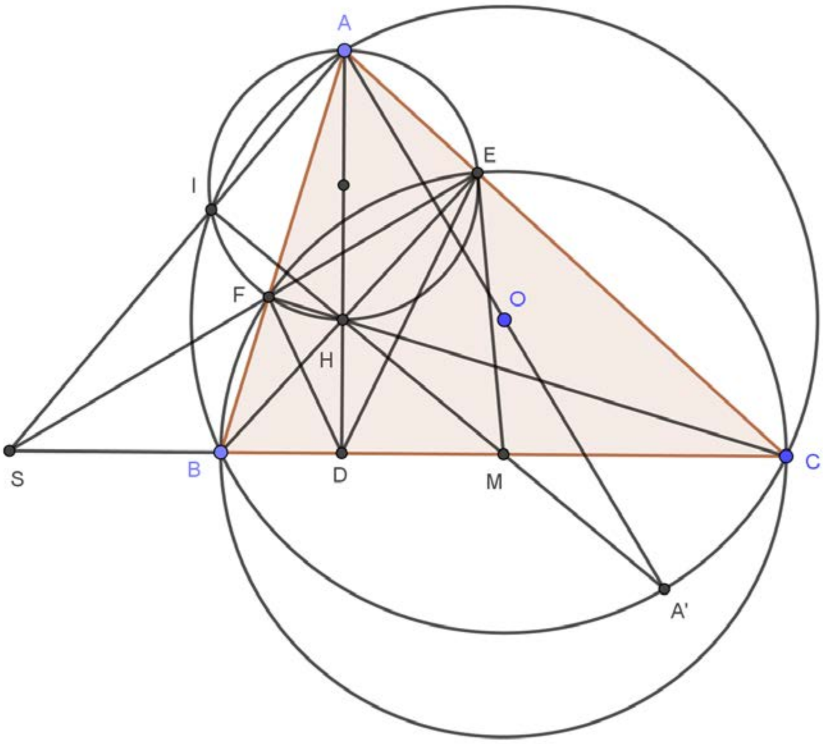
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN

Lưu ý: Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,125; thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho biểu thức $A=\left(1-\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$	**1,0**
	a) Rút gọn biểu thức *A*.	**0,5**
	ĐKXĐ: $a\ge 0; a\ne 1$	**0,125**
	$A=\left(\dfrac{a+1-2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\dfrac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)$	**0,25**
	$A=\sqrt{a}+1$	**0,125**
	b) Tính giá trị của *A* khi $a=2021-2\sqrt{2020}$.	**0,5**
	$a=2021-2\sqrt{2020}=\left(\sqrt{2020}-1\right)^2$	**0,125**
	Khi đó $A=\sqrt{\left(\sqrt{2020}-1\right)^2}+1=\sqrt{2020}-1+1=\sqrt{2020}$	**0,25**
	Vậy khi $a=2021-2\sqrt{2020}$ thì $A=\sqrt{2020}$	**0,125**
2	**a)** Giải phương trình: $2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0$ **b)** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$ **(I)**	**2,0**
	a) Giải phương trình: $2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0$ **(1)**	**1,0**
	ĐK: $x\ge\dfrac{4}{5}$	**0,125**
	(1) $\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{5x-4}\right)\left(2x-\sqrt{5x-4}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{5x-4}=0\\2x-\sqrt{5x-4}=0\end{array}\right.$	**0,25**

	$x=\sqrt{5x-4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.\end{cases}$	**0,25**
	$2x=\sqrt{5x-4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 4x^2=5x-4\end{cases}$ (vô nghiệm)	**0,25**
	Kết hợp với điều kiện $\Leftrightarrow x=1$ và $x=4$	**0,125**
	b) Giải hệ phương trình **:** $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\ 64x^3-y^3=61\end{cases}$ **(I)**	**1,0**
	$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.	**0,125**
	Xét $xy\ne 0$ $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}xy(4x-y)=5\\ (4x-y)(16x^2+4xy+y^2)=61\end{cases}$	**0,125**
	$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-y=\dfrac{5}{xy} & (1)\\ (4x-y)\left[(4x-y)^2+12xy\right]=61 & (2)\end{cases}$	**0,25**
	Đặt $t=4x-y$ thay vào (2) ta có: $t\left(t^2+\dfrac{60}{t}\right)=61\Leftrightarrow t^3-1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow xy=5$	**0,25**
	Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy=5\\ 4x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\ y=4\end{cases}$	**0,25**
3	**a)** Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $(d): y=2x-m$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương. **b)** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+mx+8=0$ và phương trình $x^2+x+m=0$ có ít nhất một nghiệm chung. **c)** Chứng minh rằng với *a, b, c* là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm $4ax^2+2(b+c)x+c=0$ (1); $4bx^2+2(c+a)x+a=0$ (2); $4cx^2+2(a+b)x+b=0$ (3).	**1,5**
	a) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $(d): y=2x-m$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.	**0,5**
	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2-2x+m=0$ (1)	**0,125**
	Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì phương trình (1) có	**0,125**

	hai nghiệm dương phân biệt	
	Tức là: $\begin{cases}\Delta'=1-m>0\\ S=2>0\\ P=m>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$	**0,125**
	Vậy với $0<m<1$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.	**0,125**
	b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+mx+8=0$ và phương trình $x^2+x+m=0$ có ít nhất một nghiệm chung.	**0,5**
	Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình Khi đó ta có: $x_0^2+mx_0+8=0$ (1) và $x_0^2+x_0+m=0$ (2)	**0,125**
	Suy ra: $(m-1)x_0=m-8$ (3)	
	Với m =1 ta được hai phương trình $x^2+x+8=0$ và $x^2+x+1=0$ đều vô nghiệm. Vậy m = *1* không thỏa mãn.	**0,125**
	Với $m\neq 1$ từ (3) suy ra $x_0=\dfrac{m-8}{m-1}$ thay vào (2) ta được $m^3-24m+72=0 \Leftrightarrow (m+6)(m^2-6m+12)=0 \Leftrightarrow m=-6$	**0,125**
	Khi $m=-6$ phương trình $x^2-6x+8=0$ có hai nghiệm là 2 và 4 ; phương trình $x^2+x-6=0$ có hai nghiệm là 2 và – 3. Vậy $m=-6$ thì hai phương trình có nghiệm chung là 2.	**0,125**
	c) Chứng minh rằng với *a, b, c* là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm $4ax^2+2(b+c)x+c=0$ (1); $4bx^2+2(c+a)x+a=0$ (2); $4cx^2+2(a+b)x+b=0$ (3).	**0,5**
	Với *a, b, c* là các số thực khác 0 nên các phương trình đã cho là phương trình bậc hai một ẩn. Ta có: $\Delta'_{(1)}=(b+c)^2-4ac$; $\Delta'_{(2)}=(a+c)^2-4ab$; $\Delta'_{(3)}=(a+b)^2-4bc$ Suy ra: $\Delta'_{(1)}+\Delta'_{(2)}+\Delta'_{(3)}=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$	**0,125**
	Ta có: $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ Suy ra: $\Delta'_{(1)}+\Delta'_{(2)}+\Delta'_{(3)}\geq 0$	**0,25**
	Vậy trong ba phương trình đã cho tồn tại ít nhất một phương trình có nghiệm.	**0,125**
4	Cho tam giác nhọn ABC với $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H .	**3,5**

	a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$; $ABDE$ nội tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF . **b)** Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $DFEM$ nội tiếp. **c)** Tia MH cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng các đường thẳng AI, EF, BC đồng quy.	
		
	a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$; $ABDE$ nội tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .	**1,5**
	Ta có $\angle BDH + \angle BFH = 180^0$ nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp	**0,25**
	Ta có $\angle BDA = \angle BEA = 90^0$ nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB	**0,25**
	Ta có $\angle FDH = \angle FBH$ (Cùng chắn cung FH của tứ giác nội tiếp $BFHD$)	**0,25**
	Mặt khác lại có $\angle FBH = \angle ABE = \angle ADE$ (Cùng chắn cung AE của tứ giác nội tiếp $ABDE$) .	**0,25**
	Suy ra $\angle FDH = \angle EDH$ hay DH là phân giác của góc $\angle EDF$.	**0,25**
	Tương tự FH cũng là phân giác của góc $\angle DFE$ hay H là tâm nội tiếp của tam giác DFE (đpcm)	**0,25**
	b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $DFEM$ nội tiếp.	**1,0**
	Vì EM là trung tuyến của tam giác vuông BEC nên ta có tam giác MBE cân tại M .	**0,125**

	Hay ta có $\angle EMC = 2\angle EBM$ (góc ngoài của tam giác MBE)	**0,25**
	Theo câu **a)** ta có $\angle EFD = 2\angle HFD$ (do FH cũng là phân giác của góc $\angle DFE$)	**0,25**
	Mà ta lại có $\angle HFD = \angle HBD = \angle EBM$ (Cùng chắn cung DH của tứ giác nội tiếp $BFHD$)	**0,125**
	Từ đó suy ra $\angle DFE = \angle EMC \Rightarrow DFEM$ nội tiếp (đpcm)	**0,25**
	c) Tia MH cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng các đường thẳng AI, EF, BC đồng quy.	**1,0**
	Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Ta có $BH//A'C$ vì cùng vuông góc với AC	**0,125**
	Và $CH//A'B$ vì cùng vuông góc với AB	**0,125**
	Nên có tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên có A', M, H, I thẳng hàng	**0,125**
	Từ đó ta có I nằm trên đường tròn $(AFHE)$ với đường kính AH (vì $\angle HIA = \angle A'IA = 90^0$)	**0,125**
	Gọi EF cắt BC tại S, AI cắt BC tại S'. Ta có $SF.SE = SB.SC$ và $S'I.S'A = S'B.S'C$	**0,25**
	Ta chứng minh được $SB.SC = SO^2 - R^2$ không đổi gọi là phương tích của S đối với đường tròn (O).	**0,125**
	Từ đó ta có S và S' có cùng phương tích đối với đường tròn $(AFHE)$ nên $S \equiv S'$	**0,125**
5	**a)** Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $y^2 + 2y = 4x^2y + 8x + 7$. **b)** Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a,b) thỏa mãn $b^2 + 3a \,\vdots\, a^2b$.	**1,0**
	a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $y^2 + 2y = 4x^2y + 8x + 7$.	**0,5**
	Phương trình đa cho tương đương với : $y^2 - 2\left(2x^2 - 1\right)y - 8x - 7 = 0$. Chúng ta xem đây là phương trình bậc hai đối với biến y. Do đó, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.	**0,125**
	Ta có: $\Delta = 4\left(x^4 - x^2 + 2x + 2\right) = 4(x+1)^2\left[(x-1)^2 + 1\right]$	**0,125**
	- Nếu $x = -1$. Thay vào phương trình ta được: $y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Do đó $(x; y) = (-1; 1)$ là một nghiệm của phương trình.	**0,125**
	- Nếu $x \neq -1$. Khi đó, để Δ là số chính phương thì phải tồn tại số $a \in \mathbb{Z}^*$ sao cho:	**0,125**

	$(x-1)^2+1=a^2 \Leftrightarrow a^2-(x-1)^2=1 \Leftrightarrow (a-x+1)(a+x-1)=1$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x+1=1\\a+x-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}a-x+1=-1\\a+x-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\x=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\x=1\end{cases}\end{array}\right.$ Với $x=1$, thay vào phương trình ta được: $y^2-2y-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=5\\y=-3\end{array}\right.$ Thử lại, ta thấy các nghiệm $(1;5),(1;-3)$ thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(x;y)=(-1;1),(1;5),(1;-3)$	
	b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a,b) thỏa mãn $b^2+3a \vdots a^2b$.	**0,5**
	Do $b^2+3a \vdots a^2b$ nên tồn tại số nguyên dương k sao cho: $b^2+3a=ka^2b$ hay $b^2=ka^2b-3a=a(kab-3)$ nên $b^2 \vdots a$. Hơn nữa, do $3a=ka^2b-b^2=b(ka^2-b)$ nên $3a \vdots b$.	**0,125**
	Do đó, các số $\frac{b^2}{a};\frac{3a}{b}$ và $\frac{b^2+3a}{a^2b}=\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}$ là các số nguyên dương. Ta có: $\frac{3a}{b}.\left(\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}\right)=\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}$ là một số nguyên dương nên $a\left(\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}\right)=3+\frac{9a}{b^2}$ là một số nguyên dương hay $\frac{9a}{b^2}$ là một số nguyên dương; do đó $9a \vdots b^2$.	**0,125**
	Khi đó, tồn tại hai số nguyên dương m,n sao cho: $\begin{cases}b^2m=9a\\an=b^2\end{cases}$. Từ đó, suy ra $mn=9$. Do đó, $n\in\{1,3,9\}$ nên $b^2\in\{a,3a,9a\}$. Khi đó, điều kiện ban đầu của bài toán trở thành: $na+3a \vdots a^2b \Leftrightarrow n+3 \vdots ab$	**0,125**
	Ta xét ba khả năng có thể có của n như sau: - Nếu $n=1$ thì $\begin{cases}b^2=a\\4 \vdots ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=a\\4 \vdots b^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ - Nếu $n=3$ thì $\begin{cases}b^2=3a\\6 \vdots ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=a\\18 \vdots b^3\end{cases}$. Do b là bội của 3 nên không tồn tại $(a;b)$. - Nếu $n=9$ thì $\begin{cases}b^2=9a\\12 \vdots ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=a\\108 \vdots b^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ Vậy có hai cặp số thỏa yêu cầu bài toán là $(1;1),(1;3)$.	**0,125**

6	**a)** Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng: **i.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ **ii.** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}\left(a+5b+2\right)$ **b)** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$	**1,0**
	a) Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng: **i.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ **ii.** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}\left(a+5b+2\right)$	**0,5**
	i. Ta chứng minh bằng phép biến đổi tương đương: Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\ge 0\Leftrightarrow\frac{b\left(a+b\right)+a\left(a+b\right)-4ab}{ab\left(a+b\right)}\ge 0$	**0,125**
	Hơn nữa: $b\left(a+b\right)+a\left(a+b\right)-4ab=a^2+b^2-2ab=\left(a-b\right)^2\ge 0$ Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.	**0,125**
	ii. Ta cần chứng minh $16\left(a^2-ab+3b^2+1\right)\ge\left(a+5b+2\right)^2\Leftrightarrow 15a^2+23b^2-26ab-4a-20b+12\ge 0$.	**0,125**
	Mặt khác, $15a^2+13b^2-26ab-4a-20b+12=13\left(a-b\right)^2+10\left(b-1\right)^2+2\left(a-1\right)^2\ge 0$ nên bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.	**0,125**
	b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$	**0,5**
	Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}\left(a+5b+2\right)$ ta được: $P\le\frac{4}{a+5b+2}+\frac{4}{b+5c+2}+\frac{4}{c+5a+2}$	**0,125**
	Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b},\forall a,b>0$ ta được:	**0,125**

	$\frac{4}{a+5b+2}\le\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{4b}$ (1) $\frac{4}{b+5c+2}\le\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{4c}$ (2) $\frac{4}{c+5a+2}\le\frac{1}{c+a+2}+\frac{1}{4a}$ (3)	
	Từ $(1),(2),(3)$ ta có: $P\le\left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $(*)$. Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b},\forall a,b>0$ ta có: $\frac{1}{a+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\right]$ (4) $\frac{1}{b+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\right]$ (5) $\frac{1}{c+a+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\right]$ (6)	**0,125**
	Từ $(*),(4),(5),(6)$ ta được: $P\le\frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{8}\le\frac{3}{2}$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=1$	**0,125**

HẾT.

Lưu ý: học sinh giải cách khác với đáp án thì giám khảo xem xét, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 21

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học 2020 – 2021
ĐỀ THI MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Lưu ý: Đề thi gồm 01 trang, thí sinh làm bài vào tờ giấy thi

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

Rút gọn P. Tìm tất cả các giá trị của x để $P \le -\dfrac{1}{7}$.

b) Cho phương trình ẩn x là $x^2 - px + q = 0$ (1) (với $p;q$ là các số nguyên tố). Tìm tất cả các giá trị của p và q biết phương trình (1) có nghiệm là các số nguyên dương.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{-x^2+2x+6} = 3+2x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy^2 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases}$.

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB* < *AC*), *M* là trung điểm cạnh *BC*. *P* là một điểm di động trên đoạn *AM* (*P* khác *A* và *M*). Đường tròn đi qua *P*, tiếp xúc với đường thẳng *AB* tại *A*, cắt đường thẳng *BP* tại *K* (*K* khác *P*). Đường tròn đi qua *P*, tiếp xúc với đường thẳng *AC* tại *A*, cắt đường thẳng *CP* tại *L* (*L* khác *P*).

a) Chứng minh $BP.BK + CP.CL = BC^2$.

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* luôn đi qua hai điểm cố định.

c) Gọi *J* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *PKC* và *E* là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng *AC*. Gọi *I* là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *PLB* và *F* là giao điểm thứ hai của đường tròn này với đường thẳng *AB*. Chứng minh *EF* // *IJ*.

Bài 4. (1,0 điểm) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 5$. Chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+5}} + \frac{3z}{\sqrt{6\left(z^2+5\right)}} \le \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y - xy - 2x^2 + 5x = 4$.

b) Giả sử rằng A là tập hợp con của tập hợp $\{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 1023\}$ sao cho A không chứa hai số nào mà số này gấp đôi số kia. Hỏi A có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:…………………….………………...Số báo danh: ………….................................

Cán bộ coi thi 1:…………………...….................Cán bộ coi thi 2:......………..……..……........

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HẢI PHÒNG

HDC ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

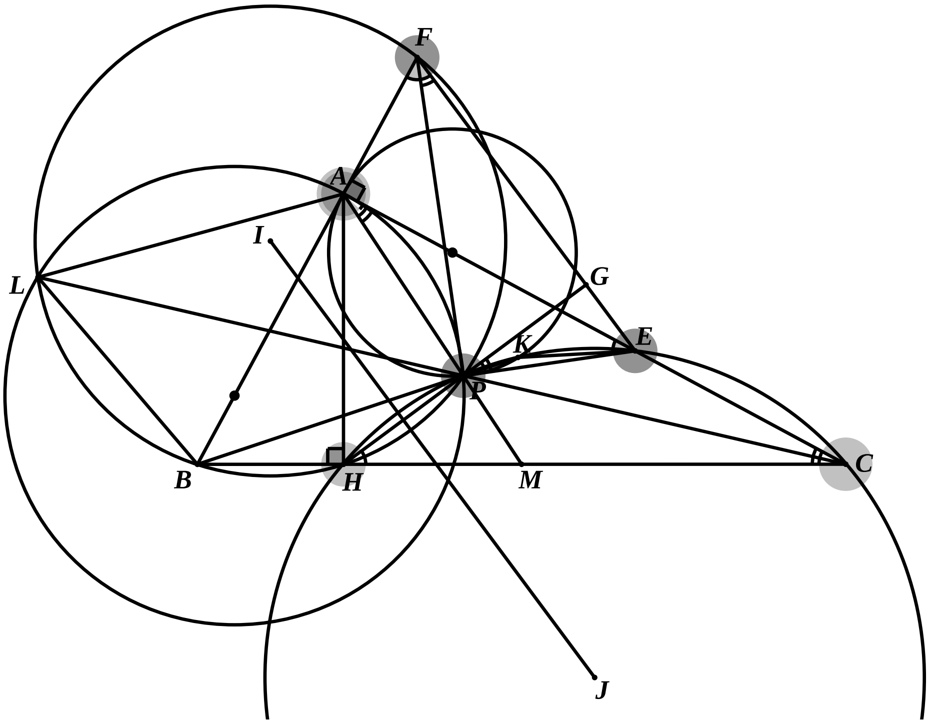
Năm học 2020 – 2021

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Hướng dẫn gồm 04

Bài	Đáp án	Điểm
1 **(2,0 điểm)**	**a) (1,0 điểm)**	
	$P=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}\right)$ ĐK: $x\ge 0, x\ne 1$	**0,25**
	$\Leftrightarrow P=\dfrac{2\sqrt{x}-x-1}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow P=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$	**0,25**
	$P\le -\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\le -\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow 7-7\sqrt{x}\le -x-\sqrt{x}-1\ \left(do\ x+\sqrt{x}+1>0\ \forall x\ge 0\right)$ $\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+8\le 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-4\right)\le 0\Leftrightarrow 2\le\sqrt{x}\le 4\Leftrightarrow 4\le x\le 16.$	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là $\Delta=p^2-4q\ge 0\ (*)$	**0,25**

	Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1x_2 = q \end{cases}$ với $x_1; x_2 \in \mathbb{Z}^+$.	
	Vì q là số nguyên tố nên $x_1 = 1$ hoặc $x_2 = 1$	**0,25**
	Nếu $x_1 = 1$ thì $1 + x_2 = p$ và x_2 là các số nguyên tố liên tiếp, suy ra x_2 là số nguyên tố chẵn nên $x_2 = q = 2; p = 3$. Tương tự, nếu $x_2 = 1$ thì $x_1 = q = 2; p = 3$	**0,25**
	Ta thấy $q = 2; p = 3$ thỏa mãn điều kiện $(*)$ là các giá trị cần tìm.	**0,25**
2 **(2,0 điểm)**	**a) (1,0 điểm)**	
	Đặt $a = x + 1; b = \sqrt{-x^2 + 2x + 6};\ b \geq 0$ Ta được $\begin{cases} ab = 3 + 2x \\ a^2 + b^2 = 4x + 7 \end{cases} \Rightarrow (a - b)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = a - 1 \\ b = a + 1 \end{array}\right.$	**0,5**
	Nếu $b = a - 1$, thay vào ta được: $\sqrt{-x^2 + 2x + 6} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$	**0,25**
	Nếu $b = a + 1$ thay vào ta được: $\sqrt{-x^2 + 2x + 6} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}\right\}$	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Với điều kiện $x, y \neq 0$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy^2 \\ xy + 3y^2 = 2xy^2 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0$	**0,25**
	$\Rightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y \\ x = 2y \end{array}\right.$	**0,25**
	Nếu $x = -y \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 + x^2 = 2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ do $x, y \neq 0$.	**0,25**

	Nếu $x=2y \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2+y^2=4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ do $x, y \neq 0$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) \in \left\{(1;-1), \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{4}\right)\right\}$	**0,25**
3 **(3,0 điểm)**	 Đáp án cho trường hợp hình vẽ trên, các trường hợp khác chứng minh tương tự.	
	a) (1,0 điểm)	
	BA là tiếp tuyến của đường tròn (APK) nên $BA^2 = BP.BK\ (1)$ CA là tiếp tuyến của đường tròn (APL) nên $CA^2 = CP.CL\ (2)$	**0,5**
	Từ (1) và (2) suy ra $BP.BK + CP.CL = BA^2 + CA^2 = BC^2$	**0,5**
	b) (1,0 điểm)	
	Gọi AH là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow BA^2 = BH.BC\ (3)$	**0,5**
	Từ (1) và (3) $\Rightarrow BP.BK = BH.BC$. Suy ra tứ giác $HPKC$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác PKC đi qua hai điểm cố định là C và H.	**0,5**
	c) (1,0 điểm)	
	Theo câu b) đường tròn (J) đi qua H. Chứng minh tương tự (I) đi qua H. (I) và (J) cắt nhau tại H, P nên $IJ \perp HP\ (4)$	**0,25**
	$HPEC\ nt \Rightarrow \widehat{AEP} = \widehat{PHC}\ (5)$	**0,25**

<table>
<tr><td></td><td>

$HPFB\ nt \Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{PHC}\ (6)$

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác $APEF$ nội tiếp nên

$\Rightarrow \widehat{EPF} = \widehat{EAF} = 90^0 \Rightarrow PE \perp PF$

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

Gọi G là giao điểm của HP và EF. Do các tứ giác $HPEC$ và $APEF$ nội tiếp nên

$\widehat{GPE} = \widehat{HCE} = \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = \widehat{PAE} = \widehat{PFE}$

$\Rightarrow \widehat{GPE} + \widehat{GEP} = \widehat{PFE} + \widehat{GEP} = 90^0 \Rightarrow PG \perp EF\ \ hay\ \ HP \perp EF\ (7)$

Từ (4), (7) suy ra IJ // EF.

</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4
(1,0 điểm)</td><td>

$$P = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{3z}{\sqrt{6(z+x)(z+y)}}$$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

$$= \frac{x}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{x+y}\cdot\frac{3}{x+z}} + \frac{y}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{3}{y+z}\cdot\frac{2}{y+x}} + \frac{3z}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{z+x}\cdot\frac{1}{z+y}}$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2x}{x+y} + \frac{3x}{x+z} + \frac{3y}{y+z} + \frac{2y}{y+x} + \frac{3z}{z+x} + \frac{3z}{z+y}\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}}(2+3+3) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{3}{y+z} = \dfrac{3}{z+x} \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x = 2y \\ 5x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2x = 2y = 2$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="6">5
(2,0 điểm)</td><td colspan="2">a) (1,0 điểm)</td></tr>
<tr><td>

Phương trình ban đầu tương đương với $xy(x-1) = 2x^2 - 5x + 4$

$$\Rightarrow y(x-1) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x} = 2x - 5 + \frac{4}{x}\ \ (do\ x \ne 0)$$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

Lập bảng các giá trị

<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>1</td><td>-2</td><td>2</td><td>-4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$\frac{11}{2}$</td><td>$\overline{\exists} y$</td><td>$\frac{11}{3}$</td><td>1</td><td>$\frac{14}{5}$</td><td>$\frac{4}{3}$</td></tr>
</table>

Mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 1)$

</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) (1,0 điểm)</td></tr>
<tr><td>

Chia các số từ 1 đến 1023 thành các tập con $A_0 = \{1\}, A_1 = \{2; 3\}, A_2 = \{4; 5; 6; 7\},$

</td><td>0,25</td></tr>
</table>

	$A_3=\{8;9;...;15\}$, $A_4=\{16;17;...;31\}$, $A_5=\{32;33;....;63\}$, $A_6=\{64;65;...;127\}$, $A_7=\{128;129;...;255\}$, $A_8=\{256;257;...;511\}$ $A_9=\{512;513;...;1023\}$ Dễ thấy số phần tử của tập A_k là $2^k, k=0,1,...,9$. Nhận thấy $n\in A_k \Leftrightarrow 2n\in A_{k+1}$.	
	Xét $A=A_9\cup A_7\cup A_5\cup A_3\cup A_1 \Rightarrow \|A\|=512+128+32+8+2=682$, rõ ràng A không chứa số nào gấp đôi số khác.	**0,25**
	Ta chỉ ra rằng không thể chọn tập con có nhiều hơn 682 số thỏa mãn bài ra. Thật vậy: Giả sử tập A thỏa mãn yêu cầu bài toán và chứa a_k phần tử thuộc A_k, $k=0,1,..,9$. Xét các tập hợp A_k và A_{k+1}. Với $m\in A_k$ tùy ý, ta có $2m\in A_{k+1}$. Số các cặp $(m,2m)$ như vậy là 2^k và trong mỗi cặp như vậy có nhiều nhất một số thuộc A.	**0,25**
	Ngoài ra tập A_{k+1} còn chứa 2^k số lẻ, tức là có nhiều nhất $2^k+2^k=2^{k+1}$ số thuộc A được lấy từ A_k và A_{k+1}. Suy ra $a_0+a_1\le 2^1, a_2+a_3\le 2^3, a_4+a_5\le 2^5, a_6+a_7\le 2^7, a_8+a_9\le 2^9$. Cộng các bất đẳng thức ta được $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9\le 682$. Vậy số phần tử lớn nhất của A là 682.	**0,25**

Chú ý: - *Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.*

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.

- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.

- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai thì không chấm điểm. Thí sinh không vẽ hình mà làm vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.

- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.

- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.

SỞ GD & ĐT HOÀ BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ
NĂM HỌC 2020 - 2021

ĐỀ THI MÔN TOÁN (DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)

Ngày thi: 13 tháng 7 năm 2020

Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(không kể thời gian giao đề)*

(Đề thi gồm có 01 trang, 05 câu)

Đề số 22

Câu I (***2,0 điểm***)

1) Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{a-9}{\sqrt{a}-3}$ b) $B=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}}$

2) Giải phương trình: $\left|x^2+3x-1\right|=3$

Câu II (***2,0 điểm)***

1) Cho phương trình: $x^2+mx+m-1=0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $x_1{}^2+x_2{}^2-4(x_1+x_2)=5$

2) Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 96km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B là 100km, thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.

Câu III (***2,0 điểm***)

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M (M khác B, M khác C), từ M kẻ MI, MK, MP lần lượt vuông góc với AB, AC, BC ($I\in AB$, $K\in AC$, $P\in BC$).

1) Chứng minh rằng: $\widehat{MPK}=\widehat{MBC}$

2) Chứng minh rằng : Tam giác MIP đồng dạng với tam giác MPK.

3) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu IV (***2,0 điểm***)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(y^2-2y)=-1\\ x-y^2+y=2\end{cases}$

2) Cho ba số $x,\ y,\ z$ thỏa mãn đồng thời: $x^2-2y+1=y^2-2z+1=z^2-2x+1=0$

Tính giá trị của biểu thức: $A=x^{1000}+y^{1000}+z^{1000}$

Câu V*(2,0 điểm)*

1) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn: $xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0$

2) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng $AB+AC<2AD$.

-------- Hết --------

Họ và tên thí sinh:**.. *****Số báo danh:***** .... *****Phòng thi:***** .....**

Giám thị 1:**.. *****Giám thị 2:***** ....**

SỞ GD & ĐT HOÀ BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ
NĂM HỌC 2020-2021

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
(DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)

(Hướng dẫn chấm này gồm có 03 trang)

Câu I ***(2,0 điểm)***

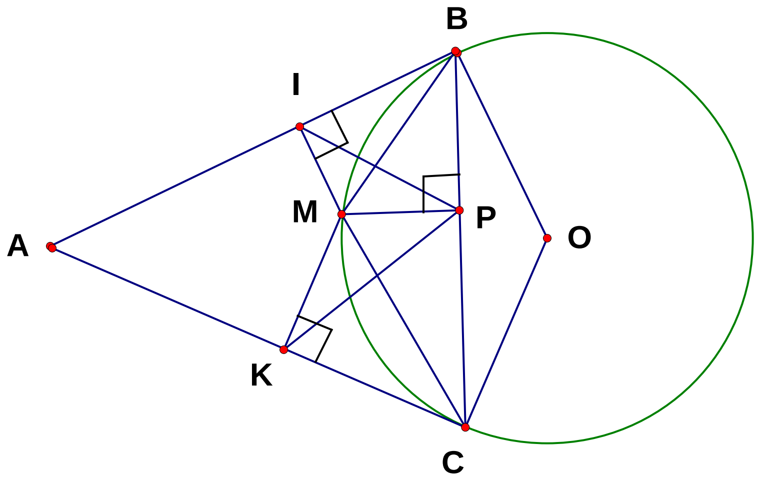
Phần	**Nội dung**	**Điểm**
1	$ĐKXĐ: a\ge 0; a\ne 9$ $A=\dfrac{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}-3}=\sqrt{a}+3$	0,5
	$B=\dfrac{\sqrt{3}(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-2$	0,5
2	TH1: $x^2+3x-1=3\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$ Giải phương trình ta được $x=1; x=-4$	0,5
	TH2: $x^2+3x-1=-3\Leftrightarrow x^2+3x+2=0$ Giải phương trình ta được $x=-1; x=-2$ KL….	0,5

Câu II ***(2,0 điểm)***

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
1	$\Delta=m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2\ge 0\forall m$ Nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m	0,25
	Ta có: $x_1{}^2+x_2{}^2-4(x_1+x_2)=5\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4(x_1+x_2)=5(*)$	0,25

	Theo hệ thức vi ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1.x_2=m-1 \end{cases}$	0,25
	$(*)\Leftrightarrow(-m)^2-2(m-1)-4(-m)=5\Leftrightarrow m^2+2m-3=0$ Giải phương trình ta được $m_1=1;m_2=-3$ KL…	0,25
2	Gọi vận tốc thực của ca nô là *x (km/h) (x > 4)* Vận tốc xuôi dòng là: $x+4$; vận tốc ngược dòng là: $x-4$	0,25đ
	Thời gian xuôi dòng là $\frac{96}{x+4}$, thời gian ngược dòng là $\frac{100}{x-4}$. Theo bài ra ta có phương trình $\frac{100}{x-4}-\frac{96}{x+4}=\frac{1}{2}(1)$	0,5đ
	$(1)\Leftrightarrow x^2-8x-1584=0$ Giải phương trình được $x_1=44;x_2=-36(KTM)$. KL………..	0,25đ

Câu III *(2,0 điểm)*

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
		
1	Tứ giác KMPC nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MPK}=\widehat{MCK}$ (cùng chắn cung KM)	0,5
	$\widehat{MCK}=\widehat{MBC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung CM)$\Rightarrow\widehat{MPK}=\widehat{MBC}$ (1)	0,5
2	Tứ giác IMPB nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MIP}=\widehat{MBP}$ (cùng chắn cung PM)(2) Từ (1) và (2)$\Rightarrow\widehat{MPK}=\widehat{MIP}$	0,25

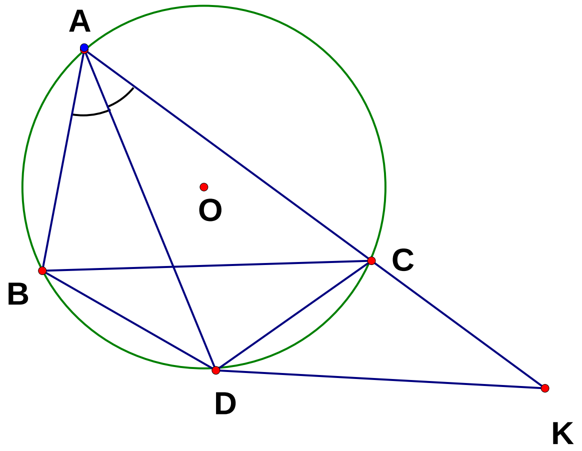
	Chứng minh tương tự $\widehat{MKP}=\widehat{MPI}$ $\Rightarrow \Delta MIP \backsim \Delta MPK(g-g)$	0,25
3	$\Delta MIP \backsim \Delta MPK \Rightarrow \dfrac{MI}{MP}=\dfrac{MP}{MK} \Leftrightarrow MI.MK=MP^2$	0,25
	Vì $MI.MK=MP^2 \Rightarrow MI.MK.MP=MP^3$ $\Rightarrow MI.MK.MP$ lớn nhất khi MP lớn nhất $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.	0,25

Câu IV ***(2,0 điểm)***

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
1	$\begin{cases}(x-y)(y^2-2y)=-1\\ x-y^2+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y^2-2y+2)(y^2-2y)=-1(*)\\ x=y^2-y+2\end{cases}$ Giải (*) Đặt $t=y^2-2y \Rightarrow t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=0 \Leftrightarrow t=-1$	0,5
	$\Rightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2$ Vậy hệ phương trình có một nghiệm là : $(x;y)=(2;1)$	0,5
2	$x^2-2y+1=y^2-2z+1=z^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x-1=y-1=z-1=0 \Leftrightarrow x=y=z=1 \Rightarrow A=3$	0,5

Câu V ***(2,0 điểm)***

Phần	**Nội dung**	**Điểm**
1	$xy^2+y^2-x^2+xy-2x+y=0 \Leftrightarrow (x+1)y^2+y(x+1)-(x+1)^2=-1$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=1\\ y^2+y-x-1=-1\end{cases}(I)\\ \begin{cases}x+1=-1\\ y^2+y-x-1=1\end{cases}(II)\end{array}\right.$	0,25
	Giải (I) được các nghiệm $(0;0);(0;-1)$	0,25
	Giải (II) được các nghiệm $(-2;0);(-2;-1)$ KL…………….	0,25

2		
	Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho CK = AB. Xét ΔCDK và ΔBDA có: CK = AB $\widehat{KCD} = \widehat{ABD}$ (vì cùng bù với $\widehat{ACD}$) CD = BD ($\overset\frown{DB} = \overset\frown{DC}$). $\Rightarrow \Delta CDK = \Delta BDA \ (c.g.c)$	0,5
	$\Rightarrow$ DK = DA. Trong ΔADK có AK < AD + DK $\Leftrightarrow$ AB + AC < AD + AD = 2AD.	0,5

**** Chú ý: Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.***

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐIỆN BIÊN

Đề chính thức
(Có 01 trang)
Đề số 23

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: Toán (Chuyên)
Ngày thi: 15/7/2020
Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ BÀI

Câu 1. *(2,0 điểm).*

1. Cho biểu thức: $P=\frac{a^2-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{2(a-1)}{\sqrt{a}-1}$ (với $a>0, a\neq 1$).

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\frac{1}{y+3}=1 \\ 4\sqrt{x-1}-\frac{3}{y+3}=7 \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm).* Cho phương trình: $x^2-5mx-4m=0$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.

b) Chứng minh rằng khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì:

$$x_1^2+5mx_2+m^2+14m+1>0.$$

Câu 3. *(2,0 điểm).*

a) Một con Robot được thiết kế có thể đi thẳng, quay một góc 90^0 sang phải hoặc sang trái. Robot xuất phát từ vị trí A đi thẳng $2m$ quay sang trái rồi đi thẳng $3m$, quay sang phải rồi đi thẳng $5m$ đến đích tại vị trí B. Tính khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot.

b) Cho hai số a, b thỏa mãn $a>b>0$ và $a.b=1$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{a-b}\geq 2\sqrt{2}$.

Câu 4. *(3,0 điểm).*

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Kéo dài BE, AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại F và M.

a) Chứng minh ΔHAF cân.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm H, I, M thẳng hàng và $AH=2OI$.

c) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm).*

a) Cho $xy+yz+xz=0$ và $xyz\neq 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}=3$.

b) Cho n là số nguyên dương. Biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ là hai số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.

……………… ***Hết*** ………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TỈNH ĐIỆN BIÊN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT

Năm học : 2020 - 2021

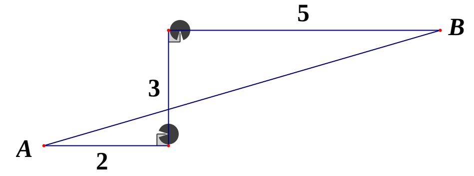
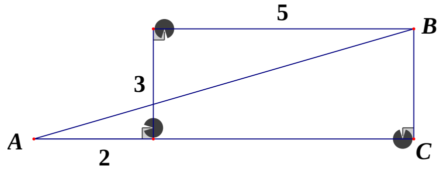
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

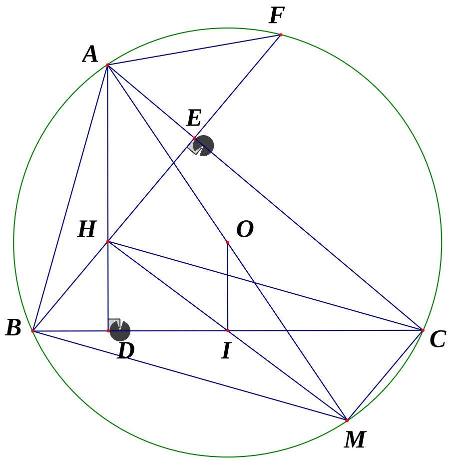
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

MÔN TOÁN CHUYÊN

Câu	**Hướng dẫn**	**Điểm**
1.1 **(1,0đ)**	Cho biểu thức: $P=\dfrac{a^2-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}-\dfrac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\dfrac{2(a-1)}{\sqrt{a}-1}$ a) Rút gọn P.	
	Với $a>0, a\neq 1\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}^3-1)}{a+\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}}+\dfrac{2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1}$	0,25
	$P=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{a+\sqrt{a}+1}-(2\sqrt{a}+1)+2(\sqrt{a}+1)=a-\sqrt{a}+1$	0,25
	b) Tính giá trị nhỏ nhất của P.	
	$P=a-\sqrt{a}+1=\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$ (Với $\forall a>0, a\neq 1$)	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{3}{4}$ khi $a=\dfrac{1}{4}$.	0,25
1.2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{y+3}=1\\4\sqrt{x-1}-\dfrac{3}{y+3}=7\end{cases}$	

	Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ne -3 \end{cases}$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \dfrac{1}{y+3} \end{cases}$ (điều kiện $u \ge 0$) $\Rightarrow \begin{cases} 2u + v = 1 \\ 4u - 3v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \dfrac{1}{y+3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy HPT có 1 nghiệm $(2;-4)$	0,25
2.a **(1,0đ)**	Phương trình: $x^2 - 5mx - 4m = 0$. a) Tìm m để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.	
	Ta có: $\Delta = 25m^2 + 16m$	0,25
	Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow 25m^2 + 16m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\dfrac{16}{25} \end{array} \right.$	0,25
	+) $m = 0$ nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \dfrac{5m}{2} = 0$	0,25
	+) $m = -\dfrac{16}{25}$ nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \dfrac{5m}{2} = -\dfrac{8}{5}$	0,25
2.b **(1,0đ)**	b) Chứng minh rằng khi phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1;\, x_2$ thì $x_1^2 + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1 > 0$.	
	PT có 2 nghiệm phân biệt $x_1;\, x_2$ thì $\Delta = 25m^2 + 16m > 0$	0,25
	và $x_1^2 - 5mx_1 - 4m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 5mx_1 + 4m$ và $x_1 + x_2 = 5m$	0,25
	Xét $P = x_1^2 + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1 = 5mx_1 + 4m + 5mx_2 + m^2 + 14m + 1$ $= 5m(x_1 + x_2) + m^2 + 18m + 1 = 26m^2 + 18m + 1$	0,25
	Suy ra $P = 25m^2 + 16m + m^2 + 2m + 1 = \Delta + (m+1)^2 > 0$ (vì $\Delta > 0$). Đpcm.	0,25
3.a **(1,0đ)**	a) Một con Robot được thiết kế có thể đi thẳng, quay một góc 90^0 sang phải hoặc sang trái. Robot xuất phát từ vị trí A đi thẳng $2m$ quay sang trái rồi đi thẳng $3m$, quay sang phải rồi đi thẳng $5m$ đến đích tại vị trí B. Tính khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot.	

	Học sinh vẽ được hình minh họa  	0,25
	Kẻ $AC \perp BC$ như hình vẽ:  	0,25
	Ta có: $AC = 7; BC = 3$	0,25
	$\Rightarrow AB = \sqrt{7^2 + 3^3} = \sqrt{58}$ Vậy khoảng cách giữa đích đến và nơi xuất phát của Robot là $\sqrt{58}$	0,25
3.b **(1,0đ)**	b) Chứng minh: $\dfrac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$. Với $a > b > 0$ và $a.b = 1$.	
	Vì $a.b = 1 \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{a-b} = \dfrac{(a-b)^2+2}{a-b} = (a-b) + \dfrac{2}{(a-b)}$	0,25
	Do $a > b > 0 \Rightarrow (a-b) + \dfrac{2}{(a-b)} \geq 2\sqrt{(a-b).\dfrac{2}{(a-b)}} = 2\sqrt{2}$ (BĐT AM-GM)	0,25
	Dấu bằng xẩy ra khi: $(a-b) = \dfrac{2}{(a-b)} \Leftrightarrow (a-b)^2 = 2 \Leftrightarrow a - b = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow a - \dfrac{1}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} & (t/m) \\ a = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} & (Loai) \end{array}\right. \Rightarrow b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	0,25
	Vậy $\dfrac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi $a = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}; b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	0,25
4.a	Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Kéo dài BE, AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại F và M.	

(1,0đ)	a) Chứng minh ΔHAF cân.	
	Vẽ hình đúng đến câu 4.a 	0,25
	Ta có: $\widehat{AHF}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{DAE}$)	0,25
	Lại có $\widehat{ACB}=\widehat{AFB}$ (cùng chắn cung AB)	0,25
	Suy ra $\widehat{AHF}=\widehat{AFB}\Rightarrow \Delta AHF$ cân tại A.	0,25
4.b **(1,0đ)**	b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm H, I, M thẳng hàng và $AH=2OI$.	
	Ta có $BH//CM$ (cùng vuông AC), $HC//BM$ (cùng vuông AB).	0,25
	$\Rightarrow BHCM$ là hình bình hình .	0,25
	Mà I là trung điểm của $BC\Rightarrow I$ cũng là trung điểm của $HM\Rightarrow$ ba điểm H, I, M thẳng hàng.	0,25
	$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\Delta AHM\Rightarrow AH=2OI$	0,25
4.c **(1,0đ)**	c) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.	
	Theo câu 1 ta có $\widehat{AHF}=\widehat{AFB}\Rightarrow\widehat{BHD}=\widehat{ACB}\Rightarrow\Delta DAC\sim\Delta DBH(\text{g.g})$	0,25
	Suy ra $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DB}{DH}\Leftrightarrow DA.DH=DB.DC$	0,25
	Ta có $DB.DC\le\left(\dfrac{BD+CD}{2}\right)^2\Leftrightarrow DB.DC\le\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2$	0,25

	Dấu bằng xảy ra khi $BD = DC$.	
	Vậy để $DH.DA$ lớn nhất thì A là điểm chính giữa cung lớn BC.	0,25
5.a **(0,5đ)**	a) Cho $xy + yz + xz = 0$ và $xyz \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$	
	Vì: $xy + yz + xz = 0;\ xyz \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ Chứng minh được nếu: $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$	0,25
	Áp dụng công thức trên ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ Lại có: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = xyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) = 3$. (Đpcm)	0,25
5.b **(0,5đ)**	b) Cho n là số nguyên dương. Biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ là hai số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.	
	Đặt $2n+1 = x^2 \Rightarrow x$ lẻ $\Rightarrow 2n = (x-1)(x+1) \vdots 4$ vì $x-1;\ x+1$ chẵn $\Rightarrow n$ chẵn Đặt $3n+1 = y^2 \Rightarrow y$ lẻ (do n chẵn) và $3n = (y-1)(y+1) \vdots 8$ vì $y-1;\ y+1$ là hai số chẵn liên tiếp mà $(3;8) = 1 \Rightarrow n \vdots 8$ (1).	0,25
	Ta có một số chính phương chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4. Mặt khác $x^2 + y^2 = 5n + 2 \Rightarrow x^2, y^2$ chia cho 5 dư 1 Nên $n = (3n+1) - (2n+1) = (y^2 - x^2) \vdots 5$ (2). Từ (1), (2) và $(5;8) = 1 \Rightarrow n \vdots 40$. Đpcm.	0,25

(Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

Đề thi chính thức

Đề số 24

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn thi chuyên: TOÁN

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 *(6,0 điểm).*

a) Giải phương trình $2x\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3=3x^2+x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0\\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-3x-4}\end{cases}$.

Câu 2 *(3,0 điểm).*

a) Tìm tất cả các số nguyên dương $x,\ y$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x-y^4=4$.

b) Chứng minh rằng nếu $m,\ n$ là hai số tự nhiên thỏa mãn $2m^2+m=3n^2+n$ thì $2m+2n+1$ là số chính phương.

Câu 3 *(2,0 điểm).* Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$.

Câu 4 *(7,0 điểm).* Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao $AD,\ BE,\ CF$ của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF.

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) (M nằm trên cung nhỏ AB); $O_1,\ O_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM\perp O_1O_2$.

c) Lấy điểm K trên đoạn thẳng HC (K khác H và C), đường thẳng BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I và đường thẳng CI cắt đường thẳng BE tại điểm G. Chứng minh hệ thức $S_{\Delta GFB}=\left(\frac{FK}{FC}+\frac{BF.BE}{CF.CE}\right)S_{\Delta CEF}$. (Trong đó $S_{\Delta GFB}$ là diện tích tam giác GFB, $S_{\Delta CEF}$ là diện tích tam giác CEF).

Câu 5 *(2,0 điểm).* Trong hình chữ nhật có chiều dài bằng $149\,\text{cm}$, chiều rộng bằng $40\,\text{cm}$ cho 2020 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $2\,\text{cm}$.

.... HẾT ....

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

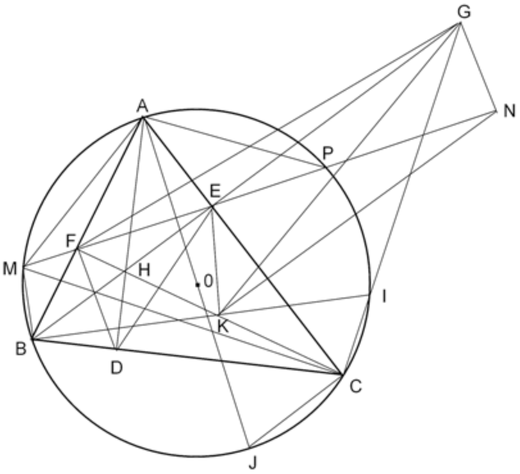
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
NĂM HỌC 2020 - 2021

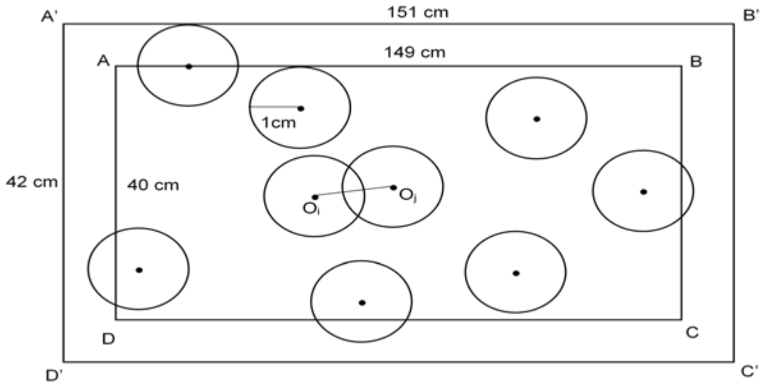
ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu		Nội Dung	Điểm
1		ĐKXĐ: $x \neq 0$	0,25
		Ta có $2x\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3=3x^2+x \Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{3}{x}=3x+1$	0,5
		$\Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]=0$	0,5
		$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-1$ hoặc $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$	0,5
		TH1: $x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ (vô nghiệm)	0,25
		TH2: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$ (tm). Vậy $S=\left\{\frac{1}{2};2\right\}$	0,5
		$\begin{cases} x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0 & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-3x-4} & (2) \end{cases}$, ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 2y-3x-4 \geq 0 \end{cases}$	0,5
		Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left(x^2-y\right)\left(x-y+1\right)=0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=x^2 \end{array}\right.$	0,5
		TH1: $y=x+1$ kết hợp với ĐK $x \geq 0$ ta có $2y-3x-4=-x-2<0$ (loại)	0,5
		TH2: $y=x^2$ thay vào phương trình (2) ta được	0,25

		$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2-3x-4} \Leftrightarrow 2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}=x^2-4x-3$	
		$2\sqrt{\left(x^2-x\right)\left(x+1\right)}=\left(x^2-x\right)-3\left(x+1\right)$	0,25
		Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-x} \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases} \quad \left(a\ge 0, b\ge 1\right)$, ta có $2ab=a^2-3b^2 \Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-3b\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0\ \ (ktm) \\ a-3b=0 \end{array}\right.$	0,25
		Với $a-3b=0$, ta có $\sqrt{x^2-x}=3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-10x-9=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5+\sqrt{34} \Rightarrow y=59+10\sqrt{34} \\ x=5-\sqrt{34}\ \ (ktm) \end{array}\right.$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;\ y\right)=\left(5+\sqrt{34};\ 59+10\sqrt{34}\right)$	0,25
2		$p^x-y^4=4$ (1), ta có (1)$\Leftrightarrow p^x=y^4+4y^2+4-\left(2y\right)^2$ $\Leftrightarrow p^x=\left(y^2-2y+2\right)\left(y^2+2y+2\right)$ (2)	0,25
		Nếu $y=1 \Rightarrow p^x=5 \Rightarrow p=5, x=1$	0,25
		Nếu $y\ge 2$ và $x=1$ thay vào (2) ta có $p=\left(y^2-2y+2\right)\left(y^2+2y+2\right)$ (loại, vì $y^2+2y+2>y^2-2y+2=y\left(y-2\right)+2\ge 2$)	0,25
		Nếu $y\ge 2$ và $x\ge 2$, kết hợp với (2) suy ra $\begin{cases} y^2-2y+2 \vdots p \\ y^2+2y+2 \vdots p \end{cases} \Rightarrow 4y \vdots p$ $\Rightarrow 4 \vdots p$ hoặc $y \vdots p$	0,25
		TH1: $4 \vdots p \Rightarrow p=2$ TH2: $y \vdots p$, kết hợp với $y^2+2y+2 \vdots p$ suy ra $2 \vdots p \Rightarrow p=2$	0,25
		Thay $p=2$ vào (1) ta có $2^x=y^4+4$ (3) Vì $y\ge 2$ nên từ (3) $\Rightarrow 2^x\ge 2^4+4=20 \Rightarrow x>4 \Rightarrow 2^x \vdots 8$ Từ (3) $\Rightarrow y^4$ chẵn $\Rightarrow y^4 \vdots 8 \Rightarrow y^4+4$ chia cho 8 dư 4. Suy ra phương trình (3) vô nghiệm. Vậy $\left(x,y,p\right)=\left(1;1;5\right)$	0,25
		Ta có $2m^2+m=3n^2+n \Leftrightarrow 2\left(m^2-n^2\right)+m-n=n^2$ $\Leftrightarrow \left(m-n\right)\left(2m+2n+1\right)=n^2$ (1)	0,25
		Gọi $d=\left(m-n,2m+2n+1\right) \Rightarrow \begin{cases} m-n \vdots d \\ 2m+2n+1 \vdots d \end{cases}$	0,25
		$\Rightarrow \left(2m+2n+1\right)-2\left(m-n\right)=\left(4n+1\right) \vdots d$ (2)	0,25

		Từ (2) $\Rightarrow n^2 \vdots d^2 \Rightarrow n \vdots d$ (3)	0,25
		Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \left(m-n, 2m+2n+1\right) = 1$ (4)	0,25
		Từ (1) và (4) suy ra $m-n$ và $2m+2n+1$ đều là số chính phương, ta có đpcm.	0,25
3		Theo bất đẳng thức AM-GM ta có $P \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}} = 3\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}\cdot\frac{b+c}{a+bc}\cdot\frac{c+a}{b+ca}}$	0,25
		Mặt khác: Theo bất đẳng thức AM-GM ta có $(c+ab)(a+bc) \le \left[\frac{(c+ab)+(a+bc)}{2}\right]^2 = \frac{(c+a)^2(b+1)^2}{4}$	0,25
		Chứng minh tương tự, ta có $(a+bc)(b+ca) \le \frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$;	0,25
		$(b+ca)(c+ab) \le \frac{(b+c)^2(a+1)^2}{4}$	0,25
		Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên và thu gọn ta được $(c+ab)(a+bc)(b+ca) \le \frac{(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1)}{8}$ $\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)} \ge \frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}$	0,25
		Mà $\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \frac{8}{\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3} = 1$ (Vì $(a+1)(b+1)(c+1) \le \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$)	0,25
		Do đó $P \ge 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$	0,25
		Vậy $P_{min} = 3$ khi $a = b = c = 1$	0,25

4			
		Ta có tứ giác DCAF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDA}=\widehat{FCA}$	0,5
		tứ giác DHEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FCA}=\widehat{EDH}$	0,5
		$\Rightarrow \widehat{FDA}=\widehat{EDH}$	0,5
		$\Rightarrow$ DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$	0,5
		Mà $AD\perp BC$	0,5
		Do đó BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF	0,5
		Gọi P là giao điểm thứ hai của EF với đường tròn (O) và AJ đường kính của đường tròn (O). Ta có $\widehat{AJC}=\widehat{ABD}$ và $90^0=\widehat{CAJ}+\widehat{AJC}=\widehat{BAD}+\widehat{ABD}$ $\Rightarrow \widehat{CAJ}=\widehat{BAD}$	0,5
		Mà $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$ nên $\widehat{CAJ}+\widehat{AEF}=\widehat{BAD}+\widehat{ABC}=90^0\Rightarrow EF\perp AJ$	0,5
		$\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{AP}\Rightarrow \widehat{AMP}=\widehat{MAP}=\widehat{ACM}\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC.	0,5
		Chứng minh tương tự ta có MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF	0,25
		$\Rightarrow MA\perp O_1O_2$	0,25
		Ta có $\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta CEF}}=\frac{BF.BE}{CF.CE}$ và $\frac{S_{\Delta KEF}}{S_{\Delta CEF}}=\frac{FK}{FC}$	0,5
		$\Rightarrow\left(\frac{FK}{FC}+\frac{BF.BE}{CF.CE}\right)S_{\Delta CEF}=\left(\frac{S_{\Delta KEF}}{S_{\Delta CEF}}+\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta CEF}}\right)S_{\Delta CEF}=S_{\Delta KEF}+S_{\Delta BEF}$ (1)	0,25
		Ta có $S_{\Delta GFB}=S_{\Delta GEF}+S_{\Delta BEF}$ (2)	0,25
		Qua K kẻ đường thẳng song song với BE cắt EF tại N, theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có $\frac{EH}{HF}=\frac{KN}{KF}$ (3)	0,25
		Mà $\Delta EHC\sim\Delta FHB\left(g.g\right)$ và $\Delta FBK\sim\Delta ECG\left(g.g\right)$ $\Rightarrow\frac{EH}{FH}=\frac{EC}{FB}=\frac{EG}{FK}$ (4)	0,25

		Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{KN}{KF}=\dfrac{EG}{KF}\Rightarrow KN=EG$ nên tứ giác EGNK là hình bình hành $\Rightarrow$ EF đi qua trung điểm của KG $\Rightarrow S_{\Delta GEF}=S_{\Delta EKF}$ (5) Từ (1); (2) và (5) suy ra đpcm.	0,5
5		Giả sử ABCD là hình chữ nhật có $AB=149cm$, $BC=40cm$; A′B′C′D′ là hình chữ nhật có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật ABCD sao cho $A'B'\parallel AB, B'C'\parallel BC, C'D'\parallel CD, D'A'\parallel DA$ và $A'B'=151cm$, $B'C'=42cm$	0,5
			
		Vẽ 2020 hình tròn bán kính bằng 1cm có tâm là các điểm ban đầu. Gọi C_i là hình tròn của điểm thứ i, $i=\overline{1,2020}$ và S_i là diện tích của nó thì $S_i=\pi cm^2$, với $i=\overline{1,2020}$.	0,5
		Ta có $\sum_{i=1}^{2020} S_i=2020\pi>2020.3,14=6342,8cm^2$	0,25
		Mặt khác: $S_{A'B'C'D'}=6342cm^2$	0,25
		Từ $\sum_{i=1}^{2020} S_i>S_{A'B'C'D'}$ và mọi C_i nằm trọn trong A′B′C′D′ nên tồn tại $1\le i\le 2020, 1\le j\le 2020, i\ne j$ sao cho $C_i\cap C_j\ne\phi$.	0,25
		Gọi O_i, O_j tương ứng là hai tâm của C_i và C_j (khi đó O_i, O_j thuộc vào tập hợp 2020 điểm đã cho). Ta có $O_iO_j<R_i+R_j=2cm$ (trong đó $R_i=R_j=1cm$ là bán kính của C_i và C_j). Suy ra đpcm	0,25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO NGHỆ AN

Đề thi dự bị

Đề số 25

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn thi chuyên: TOÁN

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 *(6,0 điểm).*

a) Giải phương trình $3\left(x^3+\frac{1}{x}\right)=7x^2+4x+7$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-5x-y+6=0 \\ \sqrt{x-\sqrt{y-2}}+2y=2x-5 \end{cases}$.

Câu 2 *(3,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A=n^8-n^4$ chia hết cho 240.

b) Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho a^2+1 và b^2+1 đều là số nguyên tố đồng thời $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=c^2+1$.

Câu 3 *(2,0 điểm).* Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz\ge 1$. Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}}+\frac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}}+\frac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 4 *(7,0 điểm).* Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường kính AI của đường tròn (O) cắt đường thẳng EF tại điểm K và đường thẳng HI cắt đường thẳng BC tại điểm M.

a) Chứng minh $MB=MC$ và tứ giác $DMEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $HK.BC=DI.EF$.

c) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CME tại điểm P (P khác M). Chứng minh $NP\perp AM$.

Câu 5 *(2,0 điểm).* Trong hình chữ nhật có chiều dài bằng 800 cm, chiều rộng bằng 10 cm cho 2020 điểm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 cm nằm trong hình chữ nhật mà không chứa điểm nào trong 2020 điểm đã cho.

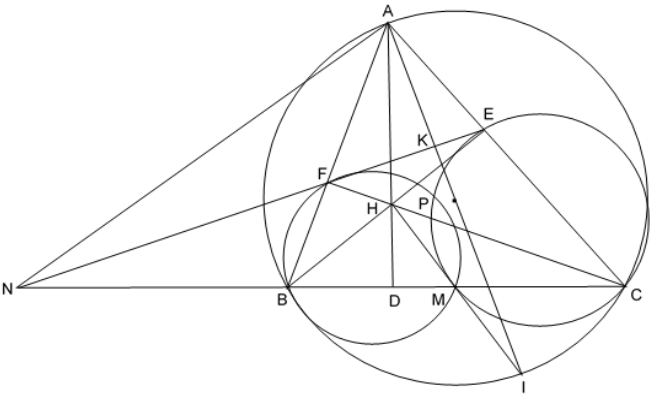
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

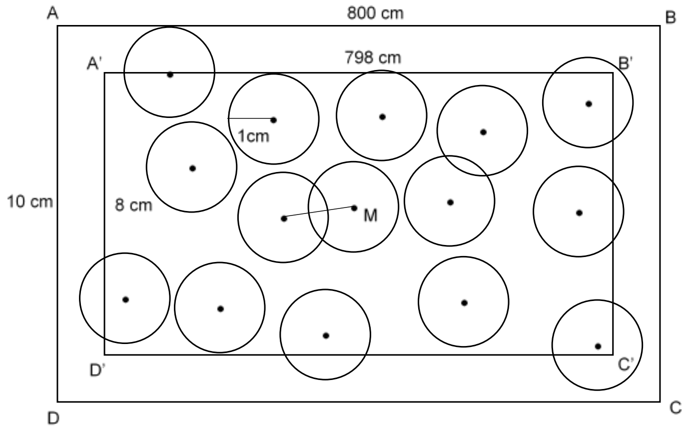
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
NĂM HỌC 2020 - 2021

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI DỰ BỊ

Câu		Nội Dung	Điểm
1	**a)**	ĐKXĐ: $x \ne 0$ Ta có $3\left(x^3+\frac{1}{x}\right)=7x^2+4x+7$ $\Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=7x+4+\frac{7}{x} \Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6=7\left(x+\frac{1}{x}\right)+4$	0,5
		$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right]=0$	0,5
		$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-1$ hoặc $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$	0,5
		TH1: $x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ (vô nghiệm)	0,5
		TH2: $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=3 \end{array}\right.$ (t/M) Vậy $S=\left\{\frac{1}{3};3\right\}$	0,5
	b)	$\begin{cases} x^2-y^2-5x-y+6=0 & (1) \\ \sqrt{x-\sqrt{y}-2}+2y=2x-5 & (2) \end{cases}$ ĐK: $\begin{cases} x-\sqrt{y}-2\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$	0,25
		Ta có: $(1)\Leftrightarrow (x-y-3)(x+y-2)=0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+3 \\ x+y-2=0 \end{array}\right.$	0,25
	3,0	**TH1:** $x=y+3$ thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{y-\sqrt{y}+1}=1 \Leftrightarrow y-\sqrt{y}+1=1$ (Thỏa mãn)	0,5
		$\Leftrightarrow y-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=3 \\ y=1 \Rightarrow x=4 \end{array}\right.$	0,5
		TH2: $x+y-2=0$, từ (2) suy ra $2x-5\ge 0 \Rightarrow x\ge \frac{5}{2}$	0,5
		$\Rightarrow x+y-2>0$ (loại) Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(3;0),(4;1)\}$	0,5

2	**a**	Ta có: $A=n^8-n^4=n^4\left(n^4-1\right)=n^4\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ $=n^4(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$	0,25
	1,5	$=n^4(n-1)(n+1)\left[\left(n^2-4\right)+5\right]$ $=n^4(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n^4(n-1)(n+1)$	0,25
		$\Rightarrow A\,\vdots\,15$ với mọi n (1)	0,25
		Nếu n là số chẵn $n^4\,\vdots\,16\Rightarrow A\,\vdots\,16$	0,25
		Nếu n là số lẻ thì $(n-1)(n+1)\,\vdots\,8$ và $\left(n^2+1\right)\vdots\,2\Rightarrow A\,\vdots\,16$ Từ đó $\Rightarrow A\,\vdots\,16$ với mọi n (2)	0,25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow A\,\vdots\,(16\times15)=240$, vì $(15,16)=1$	0,25
	b	$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=c^2+1\ (1)$ Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b$. Ta có $(1)\Leftrightarrow b^2\left(a^2+1\right)=c^2-a^2=(c-a)(c+a)\ (2)$ $\Rightarrow(c-a)(c+a)\ \vdots\ \left(a^2+1\right)$ và $c>a$	0,25
		$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(c-a)\ \vdots\ \left(a^2+1\right)\Rightarrow c-a\ge a^2+1\Rightarrow c\ge a^2+a+1\\(c+a)\,\vdots\ \left(a^2+1\right)\Rightarrow c+a\ge a^2+1\Rightarrow c\ge a^2-a+1\end{array}\right.$ (do a^2+1 là số nguyên tố).	0,25
		Suy ra $c\ge a^2-a+1$ (3)	0,25
	1,5	Từ (2) và (3) $\Rightarrow b^2\left(a^2+1\right)\ge(a-1)^2\left(a^2+1\right)\Rightarrow b^2\ge(a-1)^2\Rightarrow b\ge a-1$. Kết hợp với $a\ge b$ suy ra $a=b$ hoặc $b=a-1$	0,25
		TH1: $a=b$, thay vào (1) ta có $\left(a^2+1\right)^2=c^2+1\ \Leftrightarrow\left(a^2+1-c\right)\left(a^2+1+c\right)=1$ (vô nghiệm vì $a^2+1+c\ge3$)	0,25
		TH2: $b=a-1\Rightarrow a=b+1\Rightarrow a^2+1=b^2+2b+2>2$. Mà a^2+1 là số nguyên tố $\Rightarrow b^2+2b+2$ là số lẻ $\Rightarrow b^2$ lẻ $\Rightarrow b^2+1$ là số nguyên tố chẵn Suy ra $b^2+1=2\Rightarrow b=1\Rightarrow a=2,c=3$ Vậy $(a,b,c)\in\{(1;2;3),(2;1;3)\}$	0,25
	3	$\dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}}+\dfrac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}}+\dfrac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (1) Đặt $\sqrt{x}=a,\sqrt{y}=b,\sqrt{z}=c$ suy ra a,b,c dương và $abc\ge1$ Ta có $(1)\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+ca}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	0,25
		Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có	0,5

	2,0	$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\right)^2 \ge \frac{(a+b+c)^4}{\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)^2}$	
		Mặt khác: Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)^2 \le 3\left(a^2+bc+b^2+ca+c^2+ab\right)$ $=3\left[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\right] \le 3(a+b+c)^2-9$ (vì $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3$)	0,5
		Do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chứng minh được $\frac{(a+b+c)^4}{3(a+b+c)^2-9} \ge \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2t^2-27t+81 \ge 0$	0,5
		$\Leftrightarrow (2t-9)(t-9) \ge 0$ (luôn đúng). (vì $t=(a+b+c)^2 \ge \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2 \ge 9$) Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$	0,25
4	**a)**		
		Ta có: $\widehat{ACI}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow IC \perp AC$	0,5
		$\Rightarrow IC \parallel BH$	0,5
		Tương tự: $HC \parallel BI$, do đó tứ giác BHCI là hình bình hành nên M là trung điểm BC.	0,5
	3,0	Ta có: $\widehat{BEM}=\widehat{MBE}$ (do tam giác MBE cân tại M), mà $\widehat{DAC}=\widehat{MBE}$ $\Rightarrow \widehat{DAC}=\widehat{BEM}$ (1)	0,5
		Mặt khác: $\widehat{BAD}=\widehat{HEF}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAD}+\widehat{DAC}=\widehat{HEF}+\widehat{BEM} \Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{MEF}$	0,5
		$\Rightarrow \widehat{BDF}=\widehat{MEF}$ (do $\widehat{BAC}=\widehat{BDF}$) nên tứ giác DMEF nội tiếp.	0,5
	b	Vì $\widehat{ABC}=\widehat{AIC}=\widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{BAD}=90^0-\widehat{ABC}=90^0-\widehat{AIC}=\widehat{IAC}$	0,25
		$\Rightarrow 90^0=\widehat{BAD}+\widehat{ABC}=\widehat{IAC}+\widehat{AEF}$ nên tam giác KAE vuông tại K $\Rightarrow OA \perp$ EF	0,5
		Ta có: $AK.AI=AE.AC=AH.AD$ suy ra tứ giác HKID nội tiếp	0,5

	2,0	$\Rightarrow \Delta AKH \sim \Delta ADI \Rightarrow \dfrac{HK}{DI}=\dfrac{AK}{AD}$ (3)	0,25
		Vì $\Delta AKE \sim \Delta ADB \Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AK}{AD} \Rightarrow \dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AK}{AD}$ (4)	0,25
		Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{HK}{DI}=\dfrac{EF}{BC} \Rightarrow HK.BC=DI.EF$	0,25
	c 2,0	Nối AN cắt đường tròn (O) tại điểm Q, ta có: $NQ.NA=NB.NC=NF.NE=ND.NM$ suy ra tứ giác QAEF nội tiếp và tứ giác AQDM nội tiếp	0,5
		$\Rightarrow \widehat{AQM}=\widehat{ADM}=90^0$	0,25
		Mà tứ giác AEHF nội tiếp nên tứ giác QAEH nội tiếp suy ra $\widehat{AQH}=90^0$	0,25
		Vậy ba điểm M, H, Q thẳng hàng suy ra H là trực tâm tam giác ANM $\Rightarrow NH \perp AM$ (5)	0,25
		Gọi $P'=AM \cap \left(BMF\right) \Rightarrow AP'.AM=AF.AB=AE.AC$ nên EP'MC là tứ giác nội tiếp	0,25
		$\Rightarrow P' \in \left(MEC\right) \Rightarrow P' \equiv P \Rightarrow$ ba điểm A, P, M thẳng hàng $\Rightarrow AP.AM=AE.AC=AH.AD$ nên tứ giác HPMD nội tiếp	0,25
		$\Rightarrow \widehat{HPM}=90^0 \Rightarrow HP \perp AM$ (6) Từ (5) và (6) suy ra ba điểm N, H, P thẳng hàng $NP \perp AM$	0,25
5	2,0		
		Giả sử ABCD là hình chữ nhật có $AB=800cm$, $BC=10cm$; A'B'C'D' là hình chữ nhật có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật ABCD sao cho $A'B' \| AB, B'C' \| BC, C'D' \| CD, D'A' \| DA$ và $A'B'=798cm$, $B'C'=8cm$ Vẽ 2020 hình tròn bán kính bằng 1cm có tâm là các điểm ban đầu.	0,5
		Gọi C_i là hình tròn của điểm thứ i, $i=\overline{1,2020}$ và S_i là diện tích của nó thì $S_i=\pi cm^2$, với $i=\overline{1,2020}$. Ta có $\sum\limits_{i=1}^{2020} S_i=2020\pi=2020.3,14=6342,8cm^2$	0,5

		Mặt khác: $S_{A'B'C'D'} = 6384cm^2$ Từ $\sum_{i=1}^{2020} S_i < S_{A'B'C'D'}$ và mọi C_i nằm trọn trong ABCD nên tồn tại một điểm M nằm trong hình chữ nhật A’B’C’D’ và không thuộc các hình tròn C_i đã cho với $1 \le i \le 2020$.	0,5
		Gọi C là hình tròn tâm M bán kính bằng $1cm$, khi đó hình tròn C không chứa điểm nào trong 2020 điểm đã cho. Suy ra đpcm	0,5

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 26

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020-2021
Môn thi : **TOÁN (Toán chuyên)**
Thời gian: **150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)
Khóa thi ngày: 23-25/7/2020

Câu 1. (2,0 *điểm*).

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{2}{1+\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{18}{x-9}$, với $x\geq 0$ *và* $x\neq 9$.

Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn 3^n-8 là lập phương của một số tự nhiên.

Câu 2. (*1,0 điểm*).

Cho parapol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(\text{d}): y=2x+3$. Tìm giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng $(\text{d}'): y=4x+m$ cắt đường thẳng (d) tại điểm có hoành độ dương thuộc (P).

Câu 3. (2,0 *điểm*).

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2=3x+1.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy+x=5\\ x^2y+xy^2+y^2+5x+xy+5y=2.\end{cases}$

Câu 4. (2,0 *điểm*). Cho tam giác ΔABC cân tại $A\left(AB<BC\right)$, M là trung điểm của AC, G là trọng tâm của tam giác ABM.

a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh OG vuông góc với BM.

b) Lấy điểm N trên cạnh BC sao cho $BN=BA$. Vẽ NK vuông góc với AB tại K, BE vuông góc với AC tại E, KF vuông góc với BC tại F. Tính tỉ số $\dfrac{BE}{KF}$.

Câu 5. (2,0 *điểm*). Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB<AC\right)$ có ba đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E cắt AD tại K.

a) Chứng minh $KA=KE$.

b) Vẽ tiếp tuyến AM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM. Chứng minh O, I, M thẳng hàng.

Câu 6. (*1,0 điểm*). Cho ba số thực dương x, y, z thõa mãn $x+y+z=3$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $H=3xy+yz^2+zx^2-x^2y$.

--------------- HẾT ---------------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Giám thị 1 ………………………………………….Giám thị 2 ………………………..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM

HDC CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020-2021

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

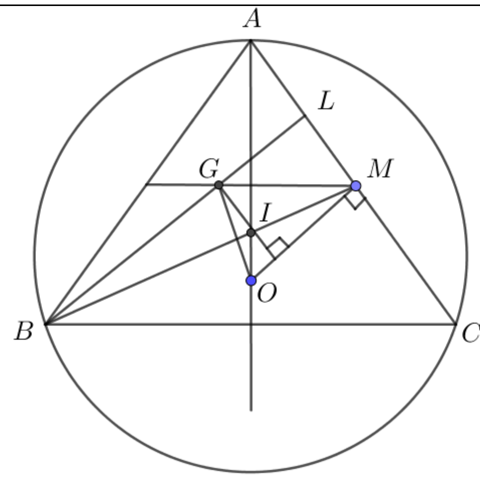
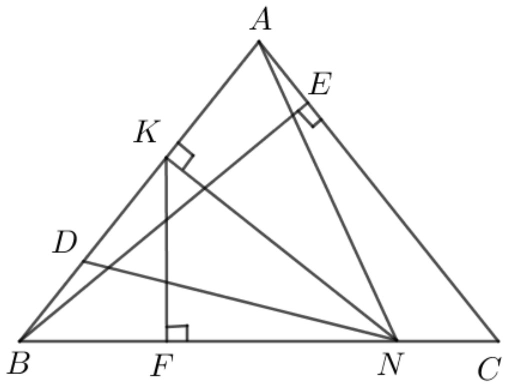
(Bản hướng dẫn này gồm 05 trang)

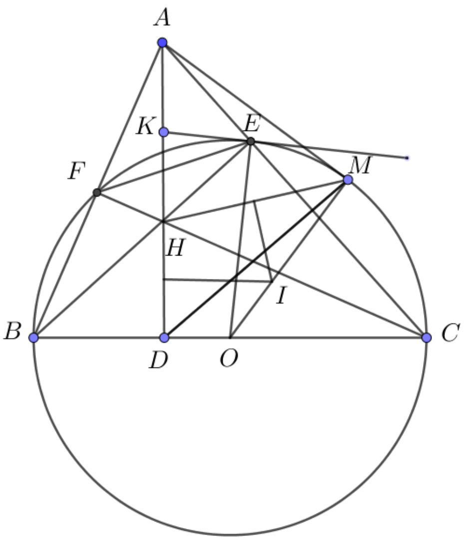
Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 **(2,0)**	**a) Cho biểu thức** $A=\frac{2}{1+\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}+\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{18}{x-9}$**, với** $x\ge 0$ và $x\ne 9$. **Rút gọn biểu thức** A**.**	**1,0**
	$1+\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}=1+\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}=\sqrt{x}+3$	0,25
	$\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	$A=\frac{2}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{18}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-18}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$	0,25
	$=\frac{x+5\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$	0,25

	b) Tìm tất cả các số tự nhiên n thõa mãn 3^n-8 là lập phương của một số tự nhiên.	**1,0**
	Xét $3^n-8=a^3\ \left(a\in\mathbb{N}\right)$ $3^n-8=a^3\Leftrightarrow\left(a+2\right)\left(a^2-2a+4\right)=3^n$ Vì $a+2,\ a^2-2a+4$ là các ước của 3^n nên ta có: $\begin{cases}a+2=3^x & \left(1\right)\\ a^2-2a+4=3^y & (2)\\ x+y=n\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{N})$	0,25
	Từ (1) suy ra $a=3^x-2$ thay vào $\left(2\right)$ ta được: $\left(3^x-2\right)^2-2\left(3^x-2\right)+4=3^y\Leftrightarrow\left[3^x\left(3^x-6\right)+9\right]+3=3^y$ (3) Với $x\geq 2$: Vế trái của (3) chia 9 dư 3.	0,25
	+ $x\geq 2$: từ $\left(1\right)$ $\Rightarrow a\geq 7$. Suy ra $3^y=a\left(a-2\right)+4\geq 39\Rightarrow y>3$ Khi đó, vế phải của (3) chia hết cho 9. Do đó, $x\geq 2$ không thỏa.	0,25
	Với $x=1$: suy ra $a=1,\ y=1$. Khi đó, $n=x+y=2$. Với $x=0$: Không thỏa Vậy $n=2$ là giá trị cần tìm. ***(Học sinh kiểm tra n=2 thỏa : 0,25đ)***	0,25

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 2 **(1,0)**	**Cho parapol** $\left(P\right): y=x^2$ **và đường thẳng** (d)$: y=2x+3$. **Tìm giá trị của tham số** m **biết rằng đường thẳng** (d′)$: y=4x+m$ **cắt đường thẳng** $\left(d\right)$ **tại điểm có hoành độ dương thuộc** $\left(P\right)$.	**1,0**
	+ Tìm được hai giao điểm của $\left(P\right): y=x^2$ *và* $\left(d\right): y=2x+3$ *là* : $A\left(-1;1\right),\ B(3;9)$.	0,25
	+ $\left(d'\right)$ cắt $\left(d\right)$ tại điểm có hoành độ dương thuộc $\left(P\right)$ nên $\left(d'\right)$ đi qua $B\left(3;9\right)$.	0,25
	+ Do đó $9=4.3+m$.	0,25
	Giải $m=-3$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 3 **(2,0)**	*a) Giải phương trình* $\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2=3x+1.$	**1,0**
	$\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2=3x+1\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=4\text{x}-2$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=2\text{x}-1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}\\ 4x^2-3x-1=0\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow x=1$ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=1$. *(Nếu học sinh chỉ ghi được điều kiện $x\le 2$ thì cho 0.25đ)*	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy+x=5\\ x^2y+xy^2+y^2+5x+xy+5y=2.\end{cases}$	**1,0**
	$\begin{cases} x^2+y^2+xy+x=5\\ x^2y+xy^2+y^2+5x+xy+5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x+y)^2-(xy-x)=5\\ (x+y)(xy+y+5)=2\end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow\begin{cases} (x+y)^2-(xy-x)=5\\ (x+y)\left[(x+y)+(xy-x)+5\right]=2\end{cases}(*)$ **Đặt** $a=x+y,\ b=xy-x.$ **Khi đó hệ (*) trở thành** $\begin{cases} a^2-b=5 & (1)\\ a(a+b+5)=2 & (2)\end{cases}$	0,25
	Từ (1) suy ra $b=a^2-5$ thay vào (2) ta được $a^3+a^2-2=0\Leftrightarrow (a-1)\left(a^2+2a+2\right)=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=-4.$	0,25
	$\begin{cases} a=1\\ b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=1\\ xy-x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2\\ y=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2\\ y=3\end{cases}$	0,25

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 4 **(2,0)**	*Cho tam giác* ΔABC *cân tại* $A\left(AB<BC\right)$, M *là trung điểm của* AC, G *là trọng tâm của tam giác* ABM ***a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác*** ABC. ***Chứng minh*** OG ***vuông góc với*** BM. ***b) Lấy điểm*** N ***trên cạnh*** BC ***sao cho*** $BN=BA$. ***Vẽ*** NK ***vuông góc với*** AB ***tại*** K, BE ***vuông góc với*** AC ***tại*** E, KF ***vuông góc với*** BC ***tại*** F. ***Tính tỉ số*** $\frac{BE}{KF}$.	**1,0**
	 **Hình vẽ phục vụ câu a: 0,25** **Hình vẽ phục vụ câu b: 0,25** 	0,25 0,25 0,25 0,25
	a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ***Chứng minh*** OG ***vuông góc với*** BM.	**0,75**
	Gọi I là giao điểm của BM và OA. Suy ra I là trọng tâm của tam giác ABC. Lập tỉ lệ suy ra được $GI\,//\,\text{AC}$.	0,25
	Mà OM vuông góc với AC nên $GI\perp OM$. Lập luận OI vuông góc với GM nên I là trực tâm của tam giác OGM.	0,25
	Suy ra OG vuông góc với MI hay OG vuông góc với BM.	0,25
	b) Lấy điểm N ***trên cạnh*** BC ***sao cho*** $BN=BA$. ***Vẽ*** NK ***vuông góc với*** AB ***tại*** K, BE ***vuông góc với*** AC ***tại*** E, KF ***vuông góc với*** BC ***tại*** F. ***Tính tỉ số*** $\frac{BE}{KF}$.	1,0

	Gọi D là điểm đối xứng của của A qua K. Suy ra tam giác NDA cân tại N. Xét hai tam giác BDN và CNA có: $\widehat{DBN}=\widehat{NCA},\ BN=CA,\ \widehat{BDN}=\widehat{CNA}$ (vì $\widehat{ADN}=\widehat{DAN}=\widehat{ANB}$) Suy ra hai tam giác BDN và CNA bằng nhau.	0,25
	Suy ra $S_{KBN}=S_{AKNC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{2}KF.BN=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\text{BE}.\text{AC}$	0,25
	Mà $BN=AC$ nên $BE=2KF$ hay $\frac{BE}{KF}=2.$	0,25
Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 5 **(2,0)**	**Cho tam giác nhọn ABC $\left(AB<AC\right)$ có ba đường cao AD,BE,CF đồng qui tại H. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E cắt AD tại K.** **a) Chứng minh $KA=KE.$** **b) Vẽ tiếp tuyến AM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM. Chứng minh O,I,M thẳng hàng.**	**2,0**
	 *(Hình vẽ phục vụ câu a: 0,25đ)*	0,25

	a) Chứng minh $KA = KE$.	**0,75**
	Ta có: $\widehat{OEK} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{AEK} + \widehat{OEC} = 90^0$ Tam giác OEC cân tại O nên $\widehat{OEC} = \widehat{OCE}$. Do đó $\widehat{AEK} + \widehat{OCE} = 90^0$	0,25
	Mà $\widehat{KAE} + \widehat{OCE} = 90^0$ *nên* $\widehat{KAE} = \widehat{KEA}$	0,25
	Suy ra tam giác KAE cân tại K .Do đó $KA = KE$ (đpcm).	0,25
	b) Vẽ tiếp tuyến AM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM . Chứng minh O, I, M thẳng hàng.	**1,0**
	Chứng minh được tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM . Suy ra $AM^2 = AE.AC$	0,25
	Chứng minh được tam giác AEH đồng dạng với tam giác ADC. Suy ra $AE.AC = AH.AD$ Suy ra $AM^2 = AH.AD \Leftrightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$.	0,25
	Hai tam giác AHM, AMD có: $\widehat{HAM}$ chung và $\frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$. Suy ra hai tam giác AHM, AMD đồng dạng. Suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{ADM}$	0,25
	Do đó MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM . Suy ra $IM \perp AM$. Mà $OM \perp AM$ nên O, I, M thẳng hàng.	0,25

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 6 **(1,0)**	**Cho ba số thực dương** x, y, z **thõa mãn** $x + y + z = 3$. **Tính giá trị lớn nhất của biểu thức** $H = 3xy + yz^2 + zx^2 - x^2y$.	**1,0**
	$H = 3xy - x^2y + yz^2 + zx^2 = xy(3 - x) + yz^2 + zx^2 = xy(y + z) + yz^2 + zx^2$ $= xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz$ + Không mất tính tổng quát giả sử $0 < x \le y \le z$, khi đó $x(y - z)(y - x) \le 0$.	0,25

	$H = xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz = (x^2y + 2xyz + yz^2) + xy^2 - xyz - x^2y + zx^2$ $= y(x+z)^2 + x\left(y^2 - yz - xy + xz\right) = y(x+z)^2 + x\left[y(y-z) - x(y-z)\right]$ $= y(x+z)^2 + x(y-z)(y-x) \le y(x+z)^2$ (Đẳng thức xảy ra khi $y = z$ hoặc $y = x$)	0,25
	$y(x+z)^2 = \frac{1}{2}.2y.(x+z).(x+z) \le \frac{1}{2}.\left[\frac{2y+(x+z)+(x+z)}{3}\right]^3 = 4$ (Đẳng thức xảy ra khi $2y = x+z$)	0,25
	Suy ra $H \le 4$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của H bằng 4 khi $x = y = z = 1$. *(Phải có cơ sở lập luận phần này mới cho điểm)*	0,25

* **<u>Lưu ý:</u>**

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021
Ngày thi: 18/7/2020
Môn thi: Toán (Hệ chuyên)
Thời gian: 150 phút *(Không kể thời gian phát đề)*

Đề số 27

Bài 1. *(1,5 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$, với $a>0, a\neq 1.$

2. Cho hàm số $y=mx+m-1$, với m là tham số. Chứng minh đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

Bài 2. *(1,5 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2-n-5 là số chính phương.

2. Ta nhận thấy số 2025 thỏa mãn tính chất rất đẹp: $2025=\left(20+25\right)^2$. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ cũng thỏa mãn tính chất trên, nghĩa là $\overline{abcd}=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2$.

Bài 3. *(2,5 điểm)*

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x}{x^2+1}$.

2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=4.$

3. Cho biểu thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, với a, b, c là các số thực. Biết $f(1)=2$, $f(2)=3$. Tính giá trị của $Q=f(5)-6f(3)+2020.$

Bài 4. *(3,5 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC tại D. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC. Tính AB, biết $BC=25\text{ cm}$ và $DK=6\text{ cm}$.

2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng CH và AB, S là giao điểm của hai đường thẳng BH và AC.

a) Chứng minh tứ giác $BCSL$ nội tiếp và BC là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

b) Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng OM cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại $P, Q.$ Gọi N là trung điểm $PQ.$ Chứng minh hai đường thẳng HM và AN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Cho 16 số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2021, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong 16 số trên có ít nhất một số là số nguyên tố.

HẾT

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Có 05 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Ngày thi: 18/7/2020
Môn: Toán (Hệ chuyên)

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. *(1,5 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$, với $a>0, a\neq 1.$

2. Cho hàm số $y=mx+m-1$, với m là tham số. Chứng minh đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi $m.$

Hướng dẫn giải	Điểm
1. Ta có: $A=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$ $=\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)\left[\frac{\left(a-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)-\left(a+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{a-1}\right]$ $=\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{a\sqrt{a}-2a+\sqrt{a}-a\sqrt{a}-2a-\sqrt{a}}{a-1}$ $=\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{-4a}{a-1}=\frac{-4a}{2\sqrt{a}}=-2\sqrt{a}$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
2. Xét điểm $A\left(x_0;y_0\right)$ trên mặt phẳng tọa độ. Khi đó, A là điểm cố định khi và chỉ khi A thuộc đồ thị hàm số $y=mx+m-1,$ với mọi m.	0,25 điểm

$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1,\ \forall m$ $\Leftrightarrow (x_0+1)m - (y_0+1) = 0,\ \forall m$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-1)$	0,25 điểm
Vậy đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-1;-1)$ với mọi m.	0,25 điểm

Bài 2. *(1,5 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số $n^2 - n - 5$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải	**Điểm**
Số $n^2 - n - 5$ chính phương $\Leftrightarrow 4n^2 - 4n - 20 = k^2$, với $k \in \mathbb{N}$. $\Leftrightarrow (2n-1)^2 - k^2 = 21 \Leftrightarrow (2n+k-1)(2n-k-1) = 21$. Vì $(2n+k-1) > (2n-k-1) > 0$ nên có các trường hợp sau	0,25 điểm
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+k-1=21 \\ 2n-k-1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2n+k-1=7 \\ 2n-k-1=3 \end{cases}$.	0,25 điểm
Tìm được $n = 3, n = 6$.	0,25 điểm

2. Ta nhận thấy số 2025 thỏa tính chất rất đẹp: $2025 = (20+25)^2$. Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$ cũng thỏa tính chất trên, nghĩa là $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2$.

Hướng dẫn giải	**Điểm**
Giả sử $\overline{abcd}$ là số thỏa tính chất trên, $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2$. Đặt $x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$, ta có $10 \le x \le 99$, $0 \le y \le 99$. khi đó $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100x + y$ Do đó, ta có $100x + y = (x+y)^2$ suy ra $10 < x + y < 100$ $\Leftrightarrow 99x = (x+y)^2 - (x+y) = (x+y)(x+y-1)$	0,25 điểm
Vì vế phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp có hai chữ số nên $99x$ phải được phân tích ở dạng đó. Ta biết các bội của 11 có hai chữ số gồm $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$	0,25 điểm

bội của 9 có hai chữ số gồm $\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$ Như vậy x chỉ có thể là các số sau {98, 20, 30}. Kiểm tra trực tiếp ta thấy các số 9801, 2025, 3025 thỏa tính chất của đề bài.	0,25 điểm

Bài 3. *(2,5 điểm)*

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x}{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải	Điểm
Ta có biểu thức xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Do đó $P=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow P.x^2-2x+P=0$ (*)	0,25 điểm
(+) Nếu $P=0$ thì $x=0$. (+) Xét $P\neq 0$, ta có pt (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=1-P^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq P\leq 1$.	0,25 điểm
Vậy $\min P=-1$ và $\max P=1$.	0,25 điểm

2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=4$.

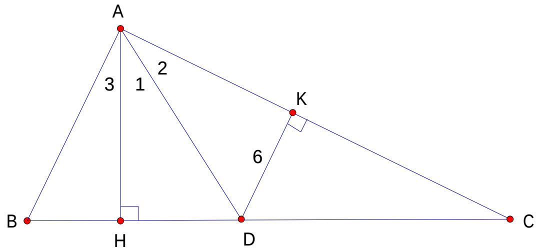
Hướng dẫn giải	Điểm
Điều kiện $x\geq -\frac{1}{3}$ $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=4\Leftrightarrow 3x+1+x+3+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=16$	0,25 điểm
$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)}=6-2x$ $\Rightarrow (3x+1)(x+3)=(6-2x)^2$	0,25 điểm
$\Rightarrow x^2-34x+33=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=33\end{array}\right.$	0,25 điểm
Thử lại, chọn $x=1$.	0,25 điểm

3. Cho biểu thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, với a, b, c là các số thực. Biết $f(1)=2$, $f(2)=3$. Tính giá trị của $Q=f(5)-6f(3)+2020$.

Hướng dẫn giải	**Điểm**
Đặt $P(x) = f(x) - (x+1)$ Do đó $P(1) = 0, P(2) = 0$ hay $x = 1, x = 2$ là hai nghiệm của phương trình $P(x) = 0$. Mà P(x) là đa thức bậc ba nên ta có $P(x) = (x-1)(x-2)(x-m)$. Khi đó $f(5) = P(5) + 6 = 4.3.(5-m) + 6$ $f(3) = P(3) + 4 = 2.1.(3-m) + 4$ Do vậy, $Q = f(5) - 6f(3) + 2020 = 12(5-m) - 12(3-m) - 18 + 2020 = 2026$.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Bài 4. *(3,5 điểm)*

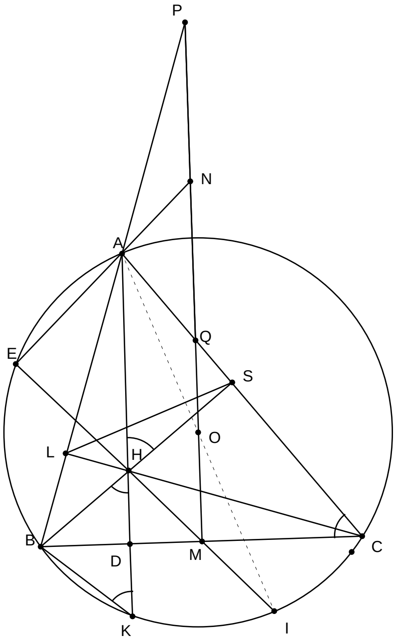
1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Tia phân giác của góc $\widehat{HAC}$ cắt HC tại D. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC. Tính AB, biết $BC = 25cm$ và $DK = 6cm$.

Hướng dẫn giải	**Điểm**
	
1. Ta có $\Delta HAD = \Delta KAD$ (AD cạnh chung; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$) $\Rightarrow HD = KD = 6cm$ Ta lại có $\widehat{A_3} = \widehat{C}$ (cùng phụ $\widehat{B}$); $\widehat{BAD} = \widehat{A_3} + \widehat{A_1}$; $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A_2}$ Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $\widehat{A_3} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADB} \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B $\Rightarrow BA = BD$. Đặt $BA = x \Rightarrow BD = x \Rightarrow BH = x - 6$. ΔABC vuông tại A, có đường cao AH nên $AB^2 = BH.BC$ $\Rightarrow x^2 = (x-6)25$. Giải phương trình, ta được: $x_1 = 15$; $x_2 = 10$ Vậy $AB = 10cm$ hoặc $AB = 15cm$.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Gọi L là giao điểm của CH và AB, S là giao điểm của BH và AC.

a) Chứng minh tứ giác $BCSL$ nội tiếp và BC là đường trung trực của đoạn thẳng HK.

b) Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng OM cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi N là trung điểm đoạn thẳng PQ. Chứng minh hai đường thẳng HM và AN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Hướng dẫn giải	**Điểm**
	Vẽ hình đúng đến câu a) 0,25 điểm
a) Ta có H là trực tâm nên $BH \perp AC$, $CH \perp AB$ suy ra $\widehat{BSC} = \widehat{CLB} = 90^{\circ}$. Suy ra tứ giác BCSL nội tiếp Ta có $\widehat{BKA} = \widehat{BCA}$ (cùng chắn cung AB của (O)). Mặt khác, $\widehat{BCA} = \widehat{AHS}$ (do cùng phụ với góc $\widehat{HAS}$) và $\widehat{AHS} = \widehat{BHK}$. Do đó, $\widehat{BKH} = \widehat{BHK}$ suy ra BKH là tam giác cân tại B. Mà $BD \perp HK$ nên BC là đường trung trực của HK.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

b) Gọi AI là đường kính của (O). Khi đó, $CH \parallel BI$ (do cùng vuông góc với AB), $CI \parallel BH$ (do cùng vuông góc với AC). Suy ra BHCI là hình hình hành. Do đó H, M, I thẳng hàng.	0,25 điểm
Gọi E là giao điểm của HM và AN, ta chứng minh E nằm trên (O). Ta có $\widehat{HCB} = \widehat{LSB}$ (cùng chắn cung BL của đường tròn (BCSL)), $\widehat{LSB} = \widehat{LAH}$ (cùng chắn cung LH của đường tròn (ALHS)), $\widehat{LAH} = \widehat{APQ}$ (do $OM \parallel AH$). Suy ra $\widehat{HCB} = \widehat{APQ}$. Tương tự ta có $\widehat{HBC} = \widehat{SLC} = \widehat{HAS} = \widehat{AQP}$. Từ đó suy ra $\Delta APQ \sim \Delta HCB$.	0,25 điểm
Mà N là trung điểm PQ, M là trung điểm CB nên suy ra $\Delta ANQ \sim \Delta HMB$. Do đó, $\widehat{BHM} = \widehat{NAQ}$, mà $\widehat{BHM} = \widehat{EHS}$ (đối đỉnh).	0,25 điểm
Suy ra $\widehat{EHS} = \widehat{NAQ}$ hay $AEHS$ là tứ giác nội tiếp. Mà $\widehat{ASH} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEH} = 90^\circ$ hay $\widehat{AEI} = 90^0$ do vậy E nằm trên đường tròn (O).	0,25 điểm

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Cho 16 số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2021, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh trong 16 số trên có ít nhất một số là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải	**Điểm**
Giả sử 16 số đã cho gồm $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ và tất cả chúng đều là hợp số. Gọi p_i là ước nguyên tố nhỏ nhất của số a_i (với $i = 1, \ldots, 16$).	0,25 điểm
Vì 16 số đã cho đôi một nguyên tố cùng nhau nên 16 số p_i là phân biệt.	0,25 điểm
Gọi $p_k = \underset{i=1,\ldots,16}{\text{Max}}\{p_i\}$, khi đó $p_k \geq 51$ vì nhỏ hơn 51 chỉ có 15 số nguyên tố $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$. Mà p_k là ước nguyên tố nhỏ nhất của a_k nên $a_k \geq p_k \cdot p_k \geq 51^2 = 2601$, mâu thuẫn với $a_k < 2021$.	0,25 điểm

Vậy trong số các số đã cho phải có ít nhất một số là số nguyên tố.	0,25 điểm

Ghi chú :

+ Mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải, học sinh giải cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa. Tổ chấm thảo luận thống nhất biểu điểm chi tiết cho các tình huống làm bài của học sinh.

+ Điểm từng câu và toàn bài tính đến 0,25 không làm tròn số.

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
VĨNH LONG
ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 28

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: TOÁN *(chuyên)*
Ngày thi: 19/07/2020
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (2.0 điểm)

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\dfrac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}+1\right)$. Tìm điều kiện xác định của A và tính giá trị của A khi $x=\sqrt{3}+2020$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Bài 2. (1.0 điểm) Cho phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức:

a) $x_1{}^3x_2+x_1x_2{}^3$ b) $\dfrac{x_1}{x_1^2+2x_2}+\dfrac{x_2}{x_2^2+2x_1}$.

Bài 3. (1.5 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2$.

Bài 4. (1.5 điểm)

a) Cho $P=2.6^{2n}+6^n-3$. Chứng minh rằng P chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2-4=0$.

Bài 5. (1.0 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên cạnh AB và AC. Biết $BH=4$ (cm), $HC=9$ (cm).

a) Tính độ dài đoạn thẳng DE.

b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E cắt cạnh BC lần lượt tại M và N. Tính diện tích tứ giác $DENM$.

Bài 6. (2.0 điểm) Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp (O), M là điểm thuộc cung nhỏ AC $(M\neq A, M\neq C, MA<MC)$. Vẽ MH vuông góc với BC tại H, MI vuông góc với AC tại I (ba điểm M, I, B không thẳng hàng).

a) Chứng minh $\widehat{IHM}=\widehat{ICM}$.

b) Chứng minh ΔBMA đồng dạng ΔHMI.

c) Gọi E là trung điểm của IH và F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ME vuông góc với EF.

Bài 7. (1.0 điểm) Cho x, y là các số thực dương và $x+y\le 1$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{x^3+y^3}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3$.

... HẾT ...

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... SBD: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN *(chuyên)*

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. (2.0 điểm)

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\dfrac{3}{x^3-\sqrt{27}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{x}+1\right)$. Tìm điều kiện xác định của A và tính giá trị của A khi $x=\sqrt{3}+2020$.

b) Tính giá trị của biểu thức $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Bài		Điểm
1		**2.0**
	a) Điều kiện: $x\ne 0$; $x\ne\sqrt{3}$.	0.25
	$A=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+3}+\dfrac{3}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}\right)\left(\dfrac{x^2+x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}x}\right)$ $=\left(\dfrac{(x-\sqrt{3})\sqrt{3}+3}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}\right)\left(\dfrac{x^2+x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}x}\right)=\dfrac{1}{x-\sqrt{3}}$	0.5
	Thay $x=\sqrt{3}+2020$ vào A ta được $A=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2020-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2020}$.	0.25
	b) $B=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}$	0.5
	$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=1.$	0.5

Bài 2. (1.0 điểm) Cho phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức:

a) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$　　　　b) $\frac{x_1}{x_1^2+2x_2}+\frac{x_2}{x_2^2+2x_1}$.

2		**1.0**
	a) Áp dụng Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=-2 \end{cases}$	0.25
	Ta có $x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)=x_1x_2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]=-2.\left[2^2-2.(-2)\right]=-16$	0.25
	b) Do $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình nên $\begin{cases} x_1^2=2x_1+2 \\ x_2^2=2x_2+2 \end{cases}$	0.25
	$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+2x_2}+\frac{x_2}{x_2^2+2x_1}=\frac{x_1}{2x_1+2+2x_2}+\frac{x_2}{2x_2+2+2x_1}=\frac{x_1+x_2}{2\left(x_1+x_2\right)+2}=\frac{2}{2.2+2}=\frac{1}{3}$.	0.25

Bài 3. (1.5 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+xy+y=11 \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2$.

3		**1.5**
	a) Đặt $S=x+y$, $P=xy$ ta được $\begin{cases} S^2-2P=13 \\ S+P=11 \end{cases}$	0.25
	$\Rightarrow S^2+2S-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-7\Rightarrow P=18 \\ S=5\Rightarrow P=6 \end{array}\right.$	0.25
	Với $S=-7,P=18 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-7 \\ xy=18 \end{cases}$ suy ra x,y là nghiệm của phương trình $X^2+7X+18=0$ (vô nghiệm) Với $S=5,P=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ suy ra x,y là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$ Vậy tập nghiệm $S=\left\{(2;3);(3;2)\right\}$.	0.25
	b) Điều kiện $-2\le x\le 2$ $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}=2-\sqrt{4-x^2}$ $\Rightarrow\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)^2=\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^2 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=4-4\sqrt{4-x^2}+4-x^2$	0.25

	$\Leftrightarrow 6\sqrt{4-x^2}=4-x^2$	
	Đặt $t=\sqrt{4-x^2},(t\ge 0)$ Phương trình trở thành $6t=t^2 \Leftrightarrow t(t-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \quad (n) \\ t=6 \quad (n) \end{array}\right.$ Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$ Với $t=6 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=6 \Leftrightarrow x^2=-32$ (vô nghiệm) Thử lại ta nhận nghiệm $x=2; x=-2$ Vậy tập nghiệm $S=\{-2;2\}$.	0.5

Bài 4. (**1.5 điểm**)

a) Cho $P=2.6^{2n}+6^n-3$. Chứng minh rằng P chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2-4=0$.

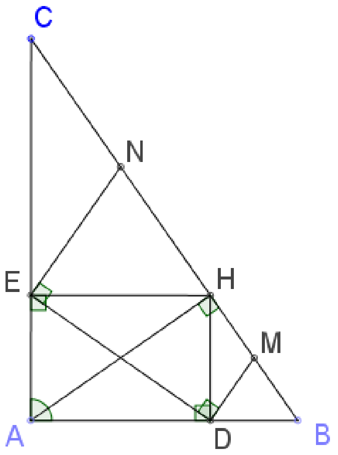
4		**1.5**
	a) Ta có $6^n-1=(6-1)\left(6^{n-1}+6^{n-2}+...+1\right)\,\vdots\,5 \Rightarrow 6^n=5k+1, k\in\mathbb{N}$	0.25
	Khi đó $P=2.6^{2n}+6^n-3=2(5k+1)^2+5k+1-3=50k^2+25k\,\vdots\,25$	0.5
	b) Ta có $4x^2-4xy+4y^2=16 \Leftrightarrow (2x-y)^2+3y^2=16 \Leftrightarrow (2x-y)^2=16-3y^2$ Vì $(2x-y)^2\ge 0$ nên $16-3y^2\ge 0 \Rightarrow y^2\le 5 \Rightarrow y^2\in\{0;1;4\}$	0.5
	Nếu $y^2=0$ thì $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ Nếu $y^2=1$ thì $(2x-y)^2=13$ không là số chính phương nên loại $y^2=1$ Nếu $y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2$ + Khi $y=2$ thì $x=0$ hoặc $x=2$ + Khi $y=-2$ thì $x=0$ hoặc $x=-2$ Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên là $S=\{(-2;0);(2;0);(0;2);(2;2);(0;-2);(-2;-2)\}$	0.25

Bài 5. (**1.0 điểm**) Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên cạnh AB và AC. Biết $BH=4$ (cm), $HC=9$ (cm).

a) Tính độ dài đoạn thẳng DE.

b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E cắt cạnh BC lần lượt tại M và N. Tính diện tích tứ giác $DENM$.

5		**1.0**

		
	a) Ta có $AH^2 = BH.CH = 36 \Rightarrow AH = 6$ (cm). Vì $\widehat{EAD} = \widehat{ADH} = \widehat{HEA} = 90^0$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật. $\Rightarrow DE = AH = 6$ (cm).	0.5
	b) Ta có $\widehat{AHD} = \widehat{EDH} \Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{MHD}$ $\Rightarrow$ tam giác DMH cân tại $M \Rightarrow DM = MH$ (1) $\widehat{MBD} + \widehat{MHD} = 90^0; \widehat{MDB} + \widehat{MDH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$ $\Rightarrow \Delta MDB$ cân tại $M \Rightarrow DM = MB = \dfrac{BH}{2} = 2$ (cm). Chứng minh tương tự ta được $EN = \dfrac{CH}{2} = \dfrac{9}{2}$ (cm). Tứ giác $DENM$ là hình thang vuông tại D và E nên $S_{DENM} = \dfrac{DE(DM+EN)}{2} = = \dfrac{39}{2}$ (cm²).	0.5

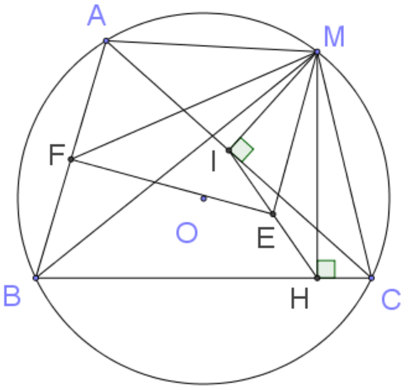
Bài 6. (**2.0 điểm**) Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp (O), M là điểm thuộc cung nhỏ AC $(M \neq A, M \neq C, MA < MC)$. Vẽ MH vuông góc với BC tại H, MI vuông góc với AC tại I (ba điểm M, I, B không thẳng hàng).

a) Chứng minh $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$.

b) Chứng minh ΔBMA đồng dạng ΔHMI.

c) Gọi E là trung điểm của IH và F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ME vuông góc với EF.

6		**2.0**

		
	a) Tứ giác $IHCM$ nội tiếp đường tròn đường kính MC	0.25
	$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{ICM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{IM}$)	0.25
	b) Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{IHM}$ (cùng bằng $\widehat{ICM}$) $\widehat{AMB} = \widehat{IMH}$ (cùng bằng $\widehat{ICH}$)	0.5
	Vậy $\Delta BMA \backsim \Delta HMI$.	0.25
	c) Ta có $\Delta BMA \backsim \Delta HMI \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MIH} \Rightarrow \widehat{FAM} = \widehat{MIE}$ Do $\Delta BMA \backsim \Delta HMI \Rightarrow \frac{AM}{IM} = \frac{AB}{IH} = \frac{2AF}{2IE} = \frac{AF}{IE}$ $\Rightarrow \Delta AMF \backsim \Delta IME \Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{IME}$.	0.25
	Ta có $\widehat{AMF} + \widehat{FMI} = \widehat{IME} + \widehat{FMI} \Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{FME}$ Do $\Delta AMF \backsim \Delta IME \Rightarrow \frac{MA}{MI} = \frac{MF}{ME} \Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta MFE$ $\Rightarrow \widehat{MIA} = \widehat{MEF}$, mà $\widehat{MIA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MEF} = 90^0 \Rightarrow ME \perp EF$.	0.5

Bài 7. (1.0 điểm) Cho x, y là các số thực dương và $x + y \le 1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{x^3 + y^3}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 + y + \frac{1}{y}\right)^3$.

7		**1.0**
	a) Ta có $\frac{x^3 + y^3}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 4\left(x^3 + y^3\right) \ge \left(x+y\right)^3 \Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-y\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng).	0.25
	b) Ta có $P = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 + y + \frac{1}{y}\right)^3 \ge 2.\left(\frac{1 + x + \frac{1}{x} + 1 + y + \frac{1}{y}}{2}\right)^3 \ge 2.\frac{\left(2 + x + y + \frac{4}{x+y}\right)^3}{8}$	0.25

	Đặt $a = x + y$, điều kiện $0 < a \le 1$, ta được $P \ge \frac{1}{4}.\left(2+a+\frac{4}{a}\right)^3 = \frac{1}{4}.\left(2+a+\frac{1}{a}+\frac{3}{a}\right)^3 \ge \frac{1}{4}.\left(4+\frac{3}{a}\right)^3 \ge \frac{1}{4}.\left(4+\frac{3}{1}\right)^3 = \frac{343}{4}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{343}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.	0.5

...HẾT...

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm 01 trang)
Đề số 29

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: TOÁN (Chuyên Tin học)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Họ và tên thí sinh: .... ; Số báo danh: ....

Câu 1 *(2,0 điểm).*

a) Rút gọn biểu thức $A=\left(1-\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(1-\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$, với $x\geq 0, x\neq 1$.

b) Xác định a,b để đường thẳng $(d): y=(a-2)x+b$ $(a\neq 2)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2 *(2,0 điểm).* Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+m^2-4m+1=0$ (1) (m là tham số).

a) Tìm điều kiện của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1\left(3x_2+5x_1\right)+x_2\left(3x_1+5x_2\right)-3}=5$.

Câu 3 *(2,0 điểm).*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-6y^2-xy+2x-y+1=0\\2x^3-7y=9\end{cases}$.

b) Trong đợt dịch **Covid-19**, theo kế hoạch thì hai tổ I và II của công ty may X phải sản xuất 10000 khẩu trang y tế trong thời gian hai ngày để kịp thời cung cấp cho người dân. Do được cải tiến kỹ thuật nên tổ I làm vượt mức 15% và tổ II vượt mức 20% so với kế hoạch ban đầu của mỗi tổ. Vì vậy, sau hai ngày họ đã làm được nhiều hơn 1700 khẩu trang so với kế hoạch. Tính số khẩu trang làm được của mỗi tổ sau khi cải tiến kỹ thuật.

Câu 4 *(3,0 điểm).* Từ điểm A bên ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B,C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm I (I không trùng với B,C). Gọi M,N,P thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ I đến các đường thẳng BC,CA và AB.

a) Chứng minh tứ giác $BMIP$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $IM^2=IN.IP$.

c) Gọi giao điểm của BI và MP là E, giao điểm của CI và MN là F. Chứng minh $IM\perp EF$.

Câu 5 *(1,0 điểm).* Tìm tất cả các số nguyên dương x,y,z là nghiệm của phương trình

$x^3\left(y^3+z^3\right)=2020\left(xyz+2\right)$, biết rằng $x>1$ và $y+z$ chia hết cho 101.

----- **HẾT** -----

Chữ ký của giám thị 1:……………......…....; Chữ ký của giám thị 2:………..…........……………..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 - 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (Chuyên Tin học)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

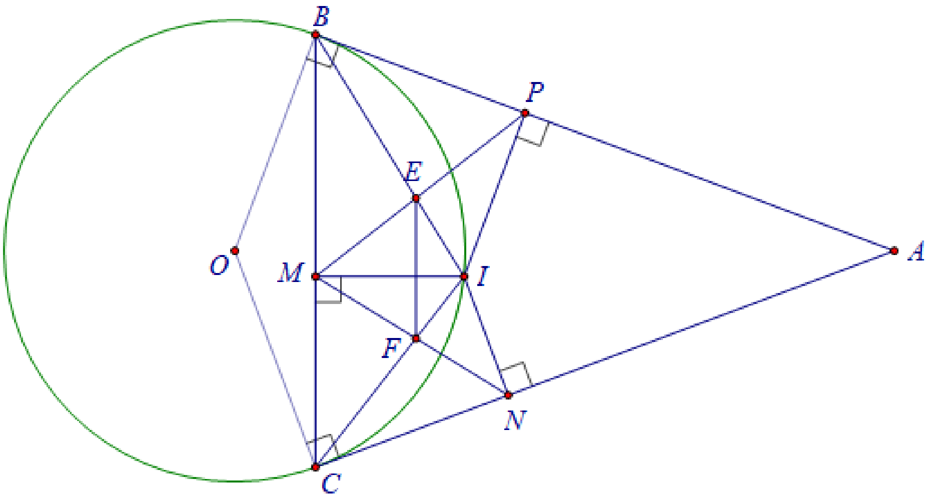
I. Hướng dẫn chung.

- Nếu học sinh giải cách khác hướng dẫn chấm nhưng giải đúng thì vẫn được điểm tối đa.
- Điểm toàn bài của thí sinh không làm tròn.

II. Đáp án – Thang điểm.

Câu	Đáp án	Điểm
1 *(2 điểm)*	**a)** Với $x\ge 0, x\ne 1$, ta có: $A=\left(1-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\right)$	**0,50**
	$=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$	**0,50**
	b) (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{2}$ nên suy ra $b=-\sqrt{2}$. Khi đó $(d): y=(a-2)x-\sqrt{2}$	**0,25**
	(d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$ nên, ta có: $(a-2)\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow a-2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=3$ (tmđk)	**0,25**
	Vậy $a=3$, $b=-\sqrt{2}$	**0,25**
2 *(2 điểm)*	**a)** Để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta'>0$	**0,25**
	$\Delta'=\left(m\right)^2-\left(m^2-4m+1\right)=4m-1$	**0,25**
	$\Delta'>0\Leftrightarrow 4m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$	**0,25**

	Vậy $m > \frac{1}{4}$.	**0,25**
	b) Với điều kiện $m > \frac{1}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$. Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 4m + 1 \end{cases}$.	**0,25**
	$x_1\left(3x_2 + 5x_1\right) + x_2\left(3x_1 + 5x_2\right) - 3 = 5\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 - 3$	**0,25**
	$\Rightarrow x_1\left(3x_2 + 5x_1\right) + x_2\left(3x_1 + 5x_2\right) - 3 = 5\left(2m\right)^2 - 4\left(m^2 - 4m + 1\right) - 3$ $= 16m^2 + 16m - 7$	**0,25**
	$\sqrt{x_1\left(3x_2 + 5x_1\right) + x_2\left(3x_1 + 5x_2\right) - 3} = 5$ $\Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 16m - 7} = 5 \Leftrightarrow 16m^2 + 16m - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. So với điều kiện ta nhận $m = 1$	**0,25**
3 *(2 điểm)*	**a)** $x^2 - 6y^2 - xy + 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(2 - y\right)x - 6y^2 - y + 1 = 0 \quad (I)$ Xem (I) là phương trình bậc hai theo x, ta có $\Delta = \left(2 - y\right)^2 - 4\left(-6y^2 - y + 1\right) = 25y^2$ Vì vậy phương trình (I) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\left(2 - y\right) + \sqrt{25y^2}}{2} \\ x = \dfrac{-\left(2 - y\right) - \sqrt{25y^2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y - 1 \\ x = -2y - 1 \end{array}\right.$.	**0,25**
	Trường hợp 1: $x = 3y - 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được: $2\left(3y - 1\right)^3 - 7y = 9 \Leftrightarrow 2\left(27y^3 - 27y^2 + 9y - 1\right) - 7y - 9 = 0$ $\Leftrightarrow 2.27y^2\left(y - 1\right) + 11\left(y - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(y - 1\right)\left(54y^2 + 11\right) = 0 \Leftrightarrow y = 1$.	**0,25**
	Trường hợp 2: $x = -2y - 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được: $2\left(-2y - 1\right)^3 - 7y = 9 \Leftrightarrow -2\left(8y^3 + 12y^2 + 6y + 1\right) - 7y - 9 = 0$ $\Leftrightarrow 16y^3 + 24y^2 + 19y + 11 = 0 \Leftrightarrow 16y^3 + 16 + 24y^2 - 24 + 19y + 19 = 0$ $\Leftrightarrow 16\left(y + 1\right)\left(y^2 - y + 1\right) + 24\left(y + 1\right)\left(y - 1\right) + 19\left(y + 1\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(y + 1\right)\left(16y^2 - 16y + 16 + 24y - 24 + 19\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(y + 1\right)\left(16y^2 + 8y + 11\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ 16y^2 + 8y + 11 = 0\left(vn\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -1$	**0,25**
	Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(2;1\right),\left(1;-1\right)$	**0,25**

	b) Gọi x, y $(x, y \in N^*)$ lần lượt là số khẩu trang dự định may ban đầu của tổ I và tổ II. Ta có $x + y = 10000$	**0,25**
	Sau khi cải tiến kỹ thuật, ta có $\frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 1700$	**0,25**
	Ta được hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 10000 \\ \frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 1700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6000 \\ y = 4000 \end{cases}$ (tmđk)	**0,25**
	Số sản phẩm làm được khi thay thiết bị mới : +) của tổ I là $\left(1 + \frac{15}{100}\right)6000 = 6900$ (khẩu trang) +) của tổ II là $\left(1 + \frac{20}{100}\right)4000 = 4800$ (khẩu trang)	**0,25**
4 *(3 điểm)*	Vẽ hình đúng đến câu a  	**0,25**
	a) Ta có : $\widehat{BPI} = \widehat{BMI} = 90^o$	**0,50**
	Do đó tứ giác $BMIP$ nội tiếp đường tròn đường kính BI	**0,25**
	b) $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có tứ giác $CMIN$ nội tiếp đường tròn đường kính CI . $\Rightarrow \widehat{MIP} = 180^o - \widehat{MBP} = 180^o - \widehat{MCN} = \widehat{MIN}$	**0,25**
	$\widehat{PBI} = \widehat{PMI}$ (cùng chắn cung IP của đường tròn đường kính BI) $\widehat{MCI} = \widehat{MNI}$ (cùng chắn cung IM của đường tròn đường kính CI) $\widehat{PBI} = \widehat{BCI} = \widehat{MCI}$ (cùng chắn cung IB của đường tròn đường (O)) $\Rightarrow \widehat{PMI} = \widehat{PBI} = \widehat{MCI} = \widehat{MNI}$	**0,25**
	Do đó $\Delta IMP \backsim \Delta INM$ (vì có $\widehat{MIP} = \widehat{MIN}$ và $\widehat{PMI} = \widehat{MNI}$)	**0,25**
	$\Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{IP}{IM} \Rightarrow IM^2 = IN.IP$.	**0,25**
	c) Ta có $\widehat{PMI} = \widehat{MCI}$ (từ trên).	**0,25**

	Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{IBM} = \widehat{IMN}$	
	mà $\widehat{IBM} + \widehat{MCI} + \widehat{BIC} = 180^o$ $\Rightarrow \widehat{PMI} + \widehat{IMN} + \widehat{BIC} = 180^o$ hay $\widehat{EMF} + \widehat{EIF} = 180^o$ $\Rightarrow$ tứ giác $EMFI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{EMI}$ (nội tiếp cùng chắn một cung)	**0,25**
	$\Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{MCI}$ ($= \widehat{EMI}$) mà $\widehat{EFI}$ và $\widehat{MCI}$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow EF\ //\ BC$	**0,25**
	Theo giả thiết $IM \perp BC$ nên suy ra $IM \perp EF$	**0,25**
5 *(1 điểm)*	Vì $2^3.5.101 = x^3\left(y^3+z^3\right) - 2020xyz = x\left(x^2\left(y^3+z^3\right) - 2020yz\right)$ nên x không có ước số nguyên tố nào ngoài các số có thể là $2;5;101$.	**0,25**
	Vì $2020 = 2^2.5.101$ nên ta có các lập luận sau: • Nếu $x \vdots 5$ (hoặc $x \vdots 101$) thì $x^3 \vdots 5^3$ (hoặc $x^3 \vdots 101^3$) nhưng $2020\left(xyz+2\right) \not\vdots 5^3$ (hoặc $2020\left(xyz+2\right) \not\vdots 101^3$). • Nếu $x = 2^2$ thì $x^3 \vdots 2^6$ nhưng $2020\left(xyz+2\right) = 2^3.5.101\left(2yz+1\right) \not\vdots 2^6$ Từ những lập luận trên, ta suy ra $x = 1$ (loại) hoặc $x = 2$.	**0,25**
	Khi $x = 2$ ta được phương trình $y^3 + z^3 = 5.101\left(yz+1\right)$ (*). Đặt $y + z = 101k$, k là số nguyên dương sẽ tìm sau. Từ $y^3 + z^3 = \left(y+z\right)\left[\left(y-z\right)^2 + yz\right]$ ta được $5.101\left(yz+1\right) = 101k\left[\left(y-z\right)^2 + yz\right] \Leftrightarrow k\left(y-z\right)^2 + \left(k-5\right)yz = 5$ (**). Từ trên ta suy ra $\left(k-5\right)yz \le 5$, do đó $k \le 5$. Thật vậy, nếu $k > 5 \Rightarrow 1 \le \left(k-5\right)yz \le 5 \Rightarrow y,z \le 5 \Rightarrow y + z < 101$ (mâu thuẫn).	**0,25**
	Ta xét các trường hợp: $0 < k \le 5$. Từ (*) ta suy ra được $y^3 + z^3 \vdots 5$, ta suy ra $y + z \vdots 5$ Nếu y,z cùng chia hết cho 5 thì $y^3 + z^3 \vdots 5^3$ trong khi đó $5.101\left(yz+1\right) = 5.101.yz + 5.101 \not\vdots 5^3$. Do đó cả hai y,z đều không chia hết cho 5. Ta có $k\left(y-z\right)^2 + \left(k-5\right)yz = 5 \Leftrightarrow -3kyz = -k\left(y+z\right)^2 + 5yz + 5$ Vì $y \not\vdots 5$, $z \not\vdots 5$ nên $k \vdots 5$. Với $k = 5$, thay vào (**) ta được $5\left(y-z\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-z=1 \\ y-z=-1 \end{array}\right.$.	**0,25**

	Ta được các hệ phương trình $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-z=1\\y+z=505\end{cases}\\\begin{cases}y-z=-1\\y+z=505\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=253\\z=252\end{cases}\\\begin{cases}y=252\\z=253\end{cases}\end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $\left(x;y;z\right)$ là: $\left(2;252;253\right),\left(2;253;252\right)$	

-----HẾT-----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)
Đề số 30

Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Họ và tên thí sinh:……………..……………………..……………….; SBD………………

Câu 1: *(2,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức $A=\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}+\frac{a+1+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$, với $a\ge 0, a\ne 1$.

b) Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=(m-1)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $M(2;1)$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-4=0$, (với m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2=3$.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2x^2-8x+62=(x-1)y^2+(x^2-6x+5)y.$$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x+y)(16-x^2y^2-4xy)=2y^5 \end{cases}$.

Câu 4: *(3,0 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$, BC là một dây cung cố định của $(O;R)$ không qua O. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho $AB<AC$ và tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi T là giao điểm của DE với BC.

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $TB^2=TD.TE-TB.BC$.

c) Cho $BC=R\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác ADH theo R.

Câu 5: *(1,0 điểm)* Cho các số dương x, y, z thoả mãn $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge 2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}$.

-------------------HẾT----------------

Chữ ký giám thị 1………………………. Chữ ký giám thị 2…………………..…………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

(Hướng dẫn chấm có 03 trang)

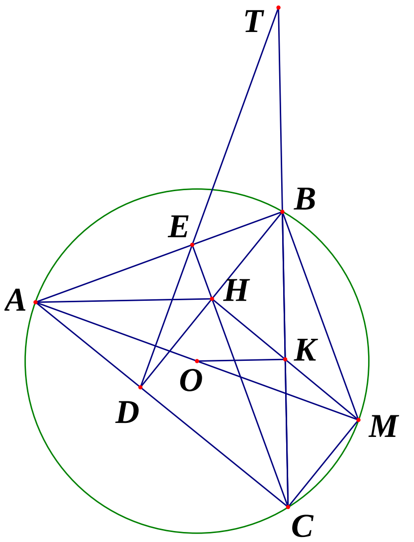
III. Hướng dẫn chung.

- Nếu học sinh giải cách khác hướng dẫn chấm nhưng giải đúng thì vẫn được điểm tối đa.
- Điểm toàn bài của thí sinh không làm tròn.

IV.Đáp án – Thang điểm.

Câu	Đáp án	Điểm
1 *(2 điểm)*	**a)** Ta có $A=\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}+1}$	**0,5**
	$=\sqrt{a}+1+\sqrt{a}+1=2\left(1+\sqrt{a}\right)$.	**0,5**
	b) Hàm số $y=(m-1)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $M(2;1)$ nên $\begin{cases}m-1<0\\1=2(m-1)+m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m^2+2m-3=0\end{cases}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-3$. Vậy giá trị m cần tìm là $m=-3$.	**0,5**
2 *(2 điểm)*	**a)** Ta có $x_1+x_2=2(m-1), x_1x_2=2m-4$	**0,25**
	$x_1^2+x_2^2=3\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3$	**0,25**
	Suy ra $4(m-1)^2-2(2m-4)=3\Leftrightarrow(2m-3)^2+3=3\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.	**0,25**

	Vậy $m=\frac{3}{2}$ thì $x_1^2+x_2^2=3$.	**0,25**
	b) Với x, y nguyên dương, ta có $2x^2-8x+62=(x-1)y^2+\left(x^2-6x+5\right)y$ $\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$	**0,25**
	$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$	**0,25**
	Nhận thấy $(x-1)+(y-2)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại $56=1.7.8=7.1.8.$	**0,25**
	Xét các trường hợp xảy ra, ta được nghiệm nguyên dương của phương trình là $(2;9),(8;3).$	**0,25**
3 *(2 điểm)*	**a)** ĐK: $x>-5$. Đặt $u=\sqrt{2x^2+5x+12}, v=\sqrt{2x^2+3x+2}$ $(u>0, v>0)$. $\Rightarrow u^2-v^2=2x+10=2(x+5)=2(u+v)$	**0,25**
	$\Leftrightarrow (u+v)(u-v-2)=0 \Leftrightarrow u-v-2=0$ (vì $u>0, v>0$).	**0,25**
	Do đó $\sqrt{2x^2+5x+12}=\sqrt{2x^2+3x+2}+2$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ \left(2\sqrt{2x^2+3x+2}\right)^2=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{7} \end{array}\right.$	**0,25**
	Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1, x=\frac{1}{7}$.	**0,25**
	b) Ta có $\begin{cases} x^2+y^2=4 & (1) \\ (x+y)\left(16-x^2y^2-4xy\right)=2y^5 & (2) \end{cases}$ Thay (1) vào (2) ta được: $(x+y)\left[\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)xy\right]=2y^5$	**0,25**
	$\Leftrightarrow x^5+y^5=2y^5 \Leftrightarrow x=y$.	**0,25**
	Thay $x=y$ vào (1) ta được $\begin{cases} x=y \\ 2x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\sqrt{2}$.	**0,25**
	Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.	**0,25**
4 *(3 điểm)*	**a)** Hình vẽ đúng	**0,25**
	Ta có $BD\perp AC \Rightarrow \widehat{BDC}=90^0$	**0,5**

	 $CE \perp AB \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$	
	$\Rightarrow D, E$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn BC (không đổi) dưới một góc 90^0. Suy ra $BCDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.	**0,25**
	b) Vì $BCDE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BCE} = \widehat{BDE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EB)	**0,25**
	Xét tam giác TBD và tam giác TEC có $\widehat{ETB}$ chung, $\widehat{BCE} = \widehat{BDE}$ nên tam giác TBD đồng dạng với tam giác TEC	**0,25**
	$\Rightarrow \frac{TB}{TD} = \frac{TE}{TC} \Leftrightarrow TB.TC = TD.TE.$	**0,25**
	Mà $TC = TB + BC$ nên $TB.(TB + BC) = TD.TE \Leftrightarrow TB^2 = TD.TE - TB.BC.$	**0,25**
	c) Kẻ đường kính AM của (O) và gọi K là trung điểm của BC. Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ MC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH//MC; \begin{cases} CH \perp AB \\ MB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH//MB.$ Suy ra tứ giác $BHCM$ là hình bình hành nên K là trung điểm của HM.	**0,25**
	Tam giác AHM có OK là đường trung bình nên $AH = 2OK$ (1) mà $BC = R\sqrt{3} \Rightarrow BK = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \frac{R}{2}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $AH = R$ (không đổi). Tam giác AHD vuông tại D nên $AD^2 + DH^2 = AH^2 = R^2$	**0,25**
	Áp dụng BĐT, $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2), \forall x, y$; Đẳng thức xảy ra khi $x = y$. $\Rightarrow (AD+DH)^2 \le 2(AD^2+DH^2) = 2R^2$ $\Rightarrow AD + DH \le R\sqrt{2}$	**0,25**
	Chu vi của tam giác AHD là $AH + AD + HD \le R + R\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})R$. Vậy chu vi của tam giác AHD lớn nhất bằng $(1+\sqrt{2})R$ khi $HD = AD$.	**0,25**
5 *(1 điểm)*	Với hai số dương x, y ta có $2(x-y)^2 \ge 0$, đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Ta có $2(y-x)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 6x^2 \ge y^2 + 4xy + 4x^2 \Leftrightarrow 3(y^2 + 2x^2) \ge (y+2x)^2$	**0,25**

	và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$.	
	Do đó $\sqrt{y^2+2x^2}\ge\frac{y+2x}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}\ge\frac{y+2x}{\sqrt{3}xy}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$ (1) Tương tự $\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$ (2), $\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{x}\right)$ (3) Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được $\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$	**0,25**
	Với $x,y,z>0$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y};\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{y+z};\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\ge\frac{4}{z+x}$ Nên $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\ge4.2020$ hay $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge4040$	**0,25**
	Suy ra $P\ge4040\sqrt{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$. Vậy GTNN của P cần tìm là $4040\sqrt{3}$, khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$.	**0,25**

------HẾT------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 31

SBD:…………..

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP
NĂM HỌC 2020 - 2021
Khóa ngày 16/7/2020
Môn: TOÁN (CHUNG)
Thời gian làm bài: 120 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Đề có 01 trang gồm 5 câu

MÃ ĐỀ 001

Câu 1 (*2,0 điểm*). Cho biểu thức: $P=\dfrac{2x}{x-9}+\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$ (với $x\geq 0, x\neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 2 (*1,5 điểm*). Cho hàm số: $y=(m-3)x+2n-5$ (1) có đồ thị là đường thẳng d (*với* m, n *là tham số*).

a) Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm m, n để đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;4)$.

Câu 3 (*2,0 điểm*). Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ (2) (*với* m *là tham số*).

a) Giải phương trình (2) với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>5$.

Câu 4 (*1,0 điểm*). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y\leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{3}{xy}\cdot$

Câu 5 (*3,5 điểm*). Cho tam giác ABC vuông ở A $(AB>AC)$ có đường cao AH $(H\in BC)$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn (O_1) đường kính BH cắt AB tại I (I khác B) và nửa đường tròn (O_2) đường kính HC cắt AC tại K (K khác C). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $BIKC$ là tứ giác nội tiếp.

c) IK là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2).

……………………..HẾT……………………..

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP
NĂM HỌC 2020 -2021
Khóa ngày 16/7/2020
Môn: TOÁN (CHUNG)

(Hướng dẫn chấm gồm có 04 trang)

MÃ ĐỀ: 001; 003

* *Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết rõ ràng.*

* *Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước sau có liên quan.*

* *Điểm thành phần của mỗi câu được phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

* *Đối với Câu 5, học sinh vẽ hình để làm được câu a thì cho 0,5 điểm, học sinh không vẽ hình thì cho điểm 0. Trường hợp học sinh có vẽ hình, nếu vẽ sai ở ý nào thì điểm 0 ở ý đó.*

* *Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm từng câu.*

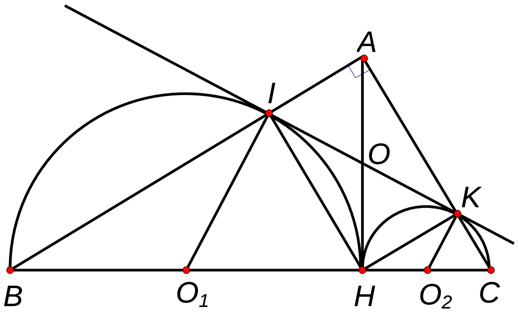
* *Học sinh giải nhầm mã đề câu nào thì không chấm điểm câu đó.*

* *Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
1	**Cho biểu thức:** $P=\frac{2x}{x-9}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}$ **(với** $x\geq 0, x\neq 9$**).** **a) Rút gọn biểu thức *P*.** **b) Tìm các giá trị của *x* để** $P=-\frac{1}{2}$**.**	**2,0 điểm**
a	Ta có: $P=\frac{2x}{x-9}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}$ $=\frac{2x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{3\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{3\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$=\dfrac{2x+3\sqrt{x}+9+3\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$	0,25
	$=\dfrac{2x+6\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$	0,25
	$=\dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$	0,25
b	Với $x\geq 0, x\neq 9$ thì: $P=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}=-\dfrac{1}{2}$.	0,25
	$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}=-\sqrt{x}+3$.	0,25
	$\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{25}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy $x=\dfrac{9}{25}$ thì $P=-\dfrac{1}{2}$	0,25
2	**Cho hàm số:** $y=(m-3)x+2n-5\ (1)$ **có đồ thị là đường thẳng** d **(*với* m, n *là tham số*).** **a) Tìm** m **để hàm số (1) đồng biến trên** $\mathbb{R}$**.** **b) Tìm** m, n **để đường thẳng** d **đi qua hai điểm** $A(1;2)$ **và** $B(-2;4)$	**1,5 điểm**
a	Để hàm số (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m-3>0\Leftrightarrow m>3$	0,5
b	Vì $A(1;2)$ thuộc d nên $2=m-3+2n-5\Leftrightarrow m+2n=10\quad(*)$	0,25
	Vì $B(-2;4)$ thuộc d nên $4=(m-3).(-2)+2n-5$ $\Leftrightarrow -2m+2n=3\quad(**)$	0,25
	Từ (*) và (**) ta có $\begin{cases} m+2n=10 \\ -2m+2n=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=\dfrac{7}{3} \\ n=\dfrac{23}{6} \end{cases}$	0,5
3	**Cho phương trình:** $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ **(2) (*với* m *là tham số*).** **a) Giải phương trình (2) với** $m=1$. **b) Tìm các giá trị của** m **để phương trình (2) có hai nghiệm** $x_1,\ x_2$ **thỏa mãn:**	**2,0 điểm**

Câu	Nội dung	Điểm
	$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>5$.	
a	Với $m=1$ ta có phương trình $x^2-4x-2=0\;(3)$	0,25
	Vì $\Delta'=6>0$ nên phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt	0,25
	$x_1=2+\sqrt{6};\ x_2=2-\sqrt{6}$	0,25
b	Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow 2m+4\geq 0 \Leftrightarrow m\geq -2\cdot$	0,25
	Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=m^2-3 \end{cases}$	0,25
	Khi đó: $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>5 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2-5>0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(2m+2\right)^2-4\left(m^2-3\right)-5>0$ $\Leftrightarrow 8m+11>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{11}{8}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy với $m>-\dfrac{11}{8}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>5$	0,25
4	**Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{3}{xy}\cdot$**	**1,0 điểm**
	Với a,b là các số thực dương ta chứng minh được: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}\quad(1)$ Thật vậy: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{ab}\geq\dfrac{4}{a+b}$ $\Leftrightarrow (a+b)^2\geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$ luôn đúng Dấu bằng xảy ra khi $a=b$	0,25
	Ta có: $xy\leq\dfrac{(x+y)^2}{4}\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{2xy}\geq 2\quad(2)$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y$. $Q=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{3}{xy}=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{5}{2xy}$	0,25
	Áp dụng (1) và (2) vào Q ta được: $Q\geq\dfrac{4}{(x+y)^2}+2.5\geq 4+10=14$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\x^2+y^2=2xy\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}.\\x+y=1\end{cases}$ Vậy GTNN của Q là 14 khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.	0,25
5	**Cho tam giác ABC vuông ở $A\left(AB>AC\right)$ có đường cao $AH\left(H\in BC\right)$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn $\left(O_1\right)$ đường kính BH cắt AB tại I (I khác B) và nửa đường tròn $\left(O_2\right)$ đường kính HC cắt AC tại K (K khác C) . Chứng minh rằng:** **a) Tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật.** **b) Tứ giác $BIKC$ là tứ giác nội tiếp.** **c) IK là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$.**	**3,5 điểm**
	Hình vẽ 	0,5
a	Ta có: $\widehat{BIH}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\left(O_1\right)$) $\Rightarrow \widehat{AIH}=90^0$ (vì hai góc kề bù) (1)	0,25
	Tương tự $\widehat{HKC}=90^0\Rightarrow\widehat{HKA}=90^0$ (2)	0,25
	Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{IAK}=90^0$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật	0,25
	Vì tứ giác $AKHI$ là hình chữ nhật nên nội tiếp được trong một đường tròn $\Rightarrow\widehat{IHA}=\widehat{IKA}$ (góc nội tiếp chắn cung IA) (4)	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
b	Theo giả thiết $AH \perp BC$ nên AH là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O_1\right)$ $\Rightarrow \widehat{IBH} = \widehat{IHA}$ (cùng chắn cung IH của đường tròn $\left(O_1\right)$) (5)	0,25
	Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{IBH} = \widehat{IKA}$ (6)	0,25
	Ta cũng có $\widehat{IKA} + \widehat{IKC} = 180^0$ (hai góc kề bù) (7)	
	Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{IBH} + \widehat{IKC} = 180^0$ $\Rightarrow BIKC$ là tứ giác nội tiếp	0,25
c	Gọi O là giao điểm của IK và AH Tứ giác $AIHK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \Delta OIH$ là tam giác cân tại O $\Rightarrow \widehat{OIH} = \widehat{OHI}$	0,25
	Tam giác O_1IH cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1IH} = \widehat{O_1HI}$ Mà $\widehat{OHI} + \widehat{O_1HI} = 90^0$ suy ra $\widehat{O_1IH} + \widehat{OIH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{O_1IK} = 90^0$ Do đó IK là tiếp tuyến của nửa đường tròn $\left(O_1\right)$	0,25
	Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{O_2KI} = 90^0$ nên IK là tiếp tuyến của nửa đường tròn $\left(O_2\right)$	0,25
	Vậy IK là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$	0,25

……………………………………………………..

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 32

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP
NĂM HỌC 2020 – 2021
Khóa ngày 16/7/2020
Môn: TOÁN (CHUYÊN)

SBD:…………..

Thời gian làm bài: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Đề có 01 trang gồm 5 câu

Câu 1 *(2,0 điểm).* Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}-2}\right):\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}-2}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh $P\le\frac{1}{7}$.

Câu 2 *(2,0 điểm).*

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

b) Cho phương trình: $x^2-(m-1)x-m^2+m-2=0\ \left(1\right)$ *(với m là tham số).*

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\left(1\right)$, tìm m để $Q=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3 *(1,0 điểm).* Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left(a-1\right)^3+\left(b-1\right)^3+\left(c-1\right)^3$.

Câu 4 *(1,5 điểm).* Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $M=n.4^n+3^n$ chia hết cho 7.

Câu 5 *(3,5 điểm).* Cho tam giác đều ABC cố định nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại E (E không trùng với hai điểm A và B). Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại M và N. Gọi F là giao điểm của MC và BN. Chứng minh rằng:

a) ΔCAN đồng dạng với ΔBMA, ΔMBC đồng dạng với ΔBCN.

b) Bốn điểm B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.

……………………….Hết……………………

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP
NĂM HỌC 2020 - 2021
Khóa ngày 16/7/2020
Môn: TOÁN (CHUYÊN)

(Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

Yêu cầu chung

** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết rõ ràng.*

** Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước sau có liên quan.*

** Điểm thành phần của mỗi câu được phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

** Đối với Câu 5, học sinh không vẽ hình thì cho điểm 0. Trường hợp học sinh có vẽ hình, nếu vẽ sai ở ý nào thì điểm 0 ở ý đó.*

** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm từng câu.*

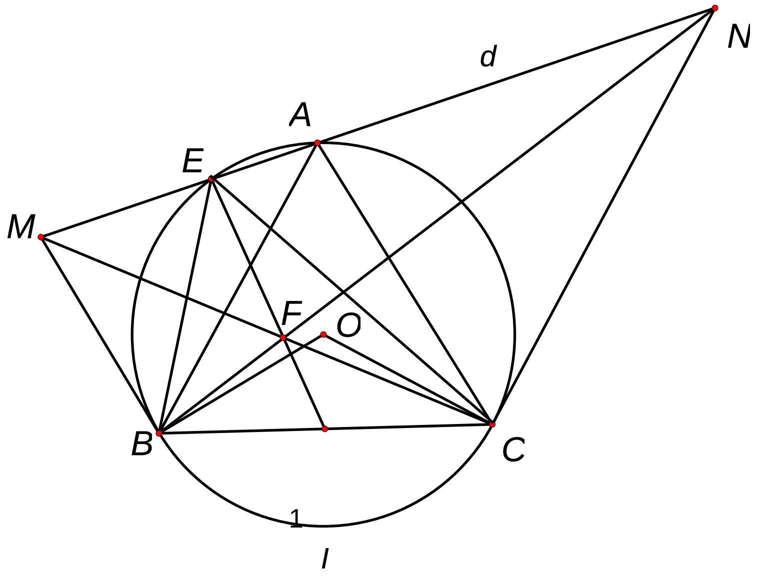
** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
1	**Cho biểu thức:** $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{x-\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}-2}\right):\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\right)$. **a) Rút gọn biểu thức** P. **b) Chứng minh** $P\le\dfrac{1}{7}$.	**2,0**
a	ĐKXĐ : $x\ge 0,\ x\ne 4$.	0,25
	$P=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\dfrac{x-\sqrt{x}+2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$	0,25
	$=\dfrac{x-4-x+\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\dfrac{x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$= \dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{x+\sqrt{x}+2}$	
	$= \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}$.	0,25
b	Với $x \ge 0,\ x \ne 4 \quad \left(*\right)$ Ta có $P \le \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2} \le \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow \dfrac{1}{7}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2} \ge 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \dfrac{x+\sqrt{x}+2-7\sqrt{x}+7}{7\left(x+\sqrt{x}+2\right)} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-6\sqrt{x}+9}{x+\sqrt{x}+2} \ge 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}{x+\sqrt{x}+2} \ge 0$ Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện $\left(*\right)$ Dấu bằng xảy ra khi $x = 9$.	0,25
	Vậy $P \le \dfrac{1}{7}$ với mọi $x \ge 0,\ x \ne 4 \quad \left(*\right)$	0,25
2	**a) Giải phương trình sau:** $\sqrt{x^2+12}+5 = 3x+\sqrt{x^2+5}$ **b) Cho phương trình** $x^2-(m-1)x-m^2+m-2=0 \ \left(1\right)$ ***(với m là tham số)*****. Gọi** $x_1,\ x_2$ **là hai nghiệm của phương trình** $\left(1\right)$**, tìm *m* để** $Q = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3$ **đạt giá trị lớn nhất.**	**2,0**
a	Ta có: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$	0,25
	$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3\left(x-2\right)+\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0 \end{array}\right.$	
	Từ phương trình đã cho ta có: $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5>0 \Rightarrow x>\dfrac{5}{3}$ Dễ dàng chứng minh được : $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0, \forall x>\dfrac{5}{3}$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.	0,25
b	Xét $ac=-m^2+m-2=-(m^2-m+2)=-\left[(m-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{7}{4}\right]<0, \forall m$ $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Rightarrow Q$ xác định và $Q<0 \ \forall m$	0,25
	Ta có: $\lvert Q\rvert=\left\lvert\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3\right\rvert=\left\lvert\dfrac{x_1}{x_2}\right\rvert^3+\left\lvert\dfrac{x_2}{x_1}\right\rvert^3$ (Do $\dfrac{x_1}{x_2},\dfrac{x_2}{x_1}$ cùng dấu) Suy ra $\lvert Q\rvert\geq 2$ (theo Cô si) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} Q\geq 2 \\ Q\leq -2 \end{array}\right. \Rightarrow Q\leq -2$ (do $Q<0$)	0,25
	$Q=-2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3=-2 \Leftrightarrow \left(x_1^3+x_2^3\right)^2=0$ $\Leftrightarrow x_1+x_2=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$	0,25
	Vậy $m=1$ thì $Q=\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.	0,25
3	**Cho** a,b,c **là các số thực không âm thỏa mãn** $a+b+c=3$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của** $T=(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3$.	**1,0**
	Ta có : $(a-1)^3=a^3-3a^2+3a-1=a\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a-1\geq\dfrac{3}{4}a-1$ (1) (do $a\geq 0$)	0,25
	Tương tự: $(b-1)^3\geq\dfrac{3}{4}b-1$ (2); $(c-1)^3\geq\dfrac{3}{4}c-1$ (3)	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $T \ge \frac{3}{4}\left(a+b+c\right)-3=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi $a=0,\ b=c=\frac{3}{2}$ hoặc $b=0,\ a=c=\frac{3}{2}$ hoặc $c=0,\ a=b=\frac{3}{2}$.	0,25
	Vậy GTNN của T bằng $-\frac{3}{4}$ khi $a=0,\ b=c=\frac{3}{2}$ hoặc $b=0,\ a=c=\frac{3}{2}$ hoặc $c=0,\ a=b=\frac{3}{2}$.	0,25
4	**Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $M=n.4^n+3^n$ chia hết cho 7.**	**1,5**
	Với $n=2k\ \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $M=2k.4^{2k}+3^{2k}=(2k+1).4^{2k}-(16^k-9^k)$	0,25
	Vì $(16^k-9^k)\vdots 7$ và 4^{2k} không chia hết cho 7 nên $M\vdots 7\Leftrightarrow 2k+1\vdots 7\Rightarrow 2k=7t-1\Rightarrow n=7t-1\ \left(t\in\mathbb{N}^*\right)$	0,25
	Vì n chẵn nên t lẻ $\Rightarrow t=2m+1\Rightarrow n=14m+6\ \left(m\in\mathbb{N}\right)$ Thử lại, ta thấy $n=14m+6\ \left(m\in\mathbb{N}\right)$ thỏa mãn bài toán.	0,25
	Với $n=2k+1\ \left(k\in\mathbb{N}\right)$ thì $M=(2k+1).4^{2k+1}+3^{2k+1}=2k.4^{2k+1}+(4^{2k+1}+3^{2k+1})$	0,25
	Vì $(4^{2k+1}+3^{2k+1})\vdots 7$ và 4^{2k+1} không chia hết cho 7 nên $M\vdots 7\Leftrightarrow 2k\vdots 7\Rightarrow k=7m\Rightarrow n=14m+1\ \left(m\in\mathbb{N}\right)$ Thử lại, ta thấy $n=14m+1\ \left(m\in\mathbb{N}\right)$ thỏa mãn bài toán.	0,25
	Vậy $n=14m+6$ hoặc $n=14m+1\ \left(m\in\mathbb{N}\right)$ thì M chia hết cho 7.	0,25
5	**Cho tam giác đều ABC cố định nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại E (E không trùng với hai điểm A và B). Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại M và N. Gọi F là giao điểm của MC và BN.**	**3,5**

Câu	Nội dung	Điểm
	Chứng minh rằng: **a)** ΔCAN **đồng dạng với** ΔBMA**,** ΔMBC **đồng dạng với** ΔBCN **.** **b) Bốn điểm** B**,** M**,** E**,** F **cùng nằm trên một đường tròn.** **c) Đường thẳng** EF **luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng** d **thay đổi.**	
	Hình vẽ:  	
a	Ta có $BM \perp OB$(vì BM là tiếp tuyến của $\left(O\right)$) và $AC \perp OB$ (do OBlà đường cao của tam giác ABC) $\Rightarrow AC\,//\,BM$ $\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{CAN}$ (hai góc đồng vị)	0,25
	Chứng minh tương tự ta cũng có: $AB // CN \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CNA}$ (hai góc đồng vị)	0,25
	Suy ra $\Delta CAN \backsim \Delta BMA$ (g.g).	0,25
	Suy ra: $\dfrac{MB}{AC} = \dfrac{AB}{NC} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN}$	0,25
	Mặt khác $\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120^0 \left(= \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset\frown{BAC} \right)$	0,25
	Suy ra $\Delta MBC \backsim \Delta BCN$ (c.g.c).	0,25
b	Ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BCM} + \widehat{NBC} = \widehat{BCM} + \widehat{CMB} = 180^0 - \widehat{MBC} = 60^0$.	0,25
	Mặt khác $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60^0$ (do t/c góc ngoài của tứ giác nội tiếp).	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Suy ra $\widehat{BFM}=\widehat{BEM}=60^0$.	0,25
	Vì hai đỉnh kề E và F cùng nhìn cạnh BM dưới một góc bằng 60^0 nên bốn điểm B,M,E,F cùng nằm trên một đường tròn.	0,25
c	Gọi I là giao điểm EF với BC. Ta có $\widehat{IBF}=\widehat{BMF}$ ($\Delta MBC\backsim\Delta BCN$) $\widehat{BMF}=\widehat{BEF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$ của đường tròn $\left(BMEF\right)$) Suy ra $\widehat{BEF}=\widehat{IBF}$ hay $\widehat{BEI}=\widehat{IBF}$.	0,25
	Xét ΔEBI và ΔBFI có $\widehat{BEI}=\widehat{IBF}$ (chứng minh trên) và $\widehat{I_1}$ chung Suy ra $\Delta EBI\backsim\Delta BFI\left(g.g\right)\Rightarrow\dfrac{IE}{IB}=\dfrac{IB}{IF}\Rightarrow IB^2=IE.IF\ \left(1\right)$	0,25
	Chứng minh tương tự ta có $\Delta CFI\backsim\Delta ECI\left(g.g\right)\Rightarrow IC^2=IE.IF\ \left(2\right)$	0,25
	Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $IB^2=IC^2\Rightarrow IB=IC\Rightarrow I$ là trung điểm của BC Mà BC cố định nên I cố định. Vậy EF luôn đi qua điểm cố định là I.	0,25

……………………………………………

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN TỈNH KIÊN GIANG

Đề số 33

NĂM HỌC 2020 – 2021

THỜI GIAN: 150 phút

Bài 1. **(2 điểm)** Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}(x\geq 0,x\neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Hãy so sánh giá trị biểu thức A với $\frac{5}{2}$.

Bài 2. **(1 điểm)** Tìm tất cả các cặp số thực $\left(m;n\right)$ sao cho phương trình $x^2+mx+n=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)=-2$, ***đồng thời*** phương trình $2x^2+nx+m=0$ có hai nghiệm x_3,x_4 thỏa mãn $\left(2-x_1\right)\left(2-x_2\right)=\frac{3}{2}$.

Bài 3. **(1 điểm).** Giải phương trình

$$x^2+2\sqrt{x-1}-2x\sqrt{2-x}+1=0$$

Bài 4. **(1 điểm)** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(a;b\right)$ sao cho ab là ước của a^2+b.

Bài 5. **(1,5 điểm)** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, có $\widehat{ABC}=120^0$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên các cạnh AB,AD, tương ứng lấy các điểm E,F không trùng với các đỉnh của hình thoi đã cho, sao cho $\widehat{EOF}=60^0$. Hãy tính tích $BE.DF$ theo a.

Bài 6. **(2,5 điểm)** Cho tam giác ABC $\left(AB\leq AC\right)$. Lấy điểm P nằm trong tam giác sao cho $AP<AB$. Đường tròn tâm A, bán kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm phân biệt M,N (M khác phía với C đối với đường thẳng AB). Đường thẳng MN cắt các cạnh AB,AC lần lượt tại K,L.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL.

Bài 7. **(1 điểm)** Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}+\frac{c^2+1}{b^2c^2}\geq a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. **(2 điểm)** Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}(x\geq 0,x\neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Hãy so sánh giá trị biểu thức A với $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Đây là bài rút gọn rất cơ bản, cũng là bài dễ nhất trong đề. Dạng toán rút gọn này, học sinh đã được luyện tập nhiều.

a) $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$

Ta có $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=x+\sqrt{x}-2$

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x-4+x-1+3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2x+3\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$$

b) $A-\frac{5}{2}=\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}-\frac{5}{2}=\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\le 0$

Vậy $A\le\frac{5}{2}$

Ta có thể dùng phép đổi biến $\sqrt{x}=a$, để biểu thức rút gọn nhìn gọn gàng hơn.

Đặt $\sqrt{x}=a,a\ge 0,a\ne 1$

$$A=\frac{a-2}{a+1}+\frac{a+1}{a+2}+\frac{3a}{a^2+a-2}$$

Bài 2. **(1 điểm)** Tìm tất cả các cặp số thực $\left(m;n\right)$ sao cho phương trình $x^2+mx+n=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)=-2$, ***đồng thời*** phương trình $2x^2+nx+m=0$ có hai nghiệm x_3,x_4 thỏa mãn $\left(2-x_1\right)\left(2-x_2\right)=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trước hết, tôi trình bày cách giải quen thuộc, mà đa phần học sinh sẽ nghĩ tới.

Hai phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta_1=m^2-4n\ge 0\\ \Delta_2=n^2-8m\ge 0\end{cases}$ (*)

Theo Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=n\\ x_3+x_4=\frac{-n}{2}\\ x_3.x_4=\frac{m}{2}\end{cases}$

Vậy $\begin{cases}(1-x_1)(1-x_2)=-2\\(2-x_1)(2-x_2)=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-(x_1+x_2)+x_1x_2=-2\\4-2(x_1+x_2)+x_1x_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}1+m+n=-2\\4+n+\dfrac{m}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+n=-3\\m+2n=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=-2\end{cases}$. (thỏa điều kiện (*))

Vậy $(m;n)=(-1;-2)$.

Mặc dù, đây là bài toán quen thuộc nhưng được phát biểu ở dạng không quen thuộc. Ý hay của bài toán là biểu thức $(1-x_1)(1-x_2)=-2$ và $(2-x_1)(2-x_2)=\frac{3}{2}$, tác giả lựa chọn có chủ đích rõ ràng để ứng dụng sự phân tích nhân tử của đa thức khi xác định nghiệm của nó. Mặc dù là biểu thức đơn giản, nhưng lại là một kĩ năng rất quan trọng trong đa thức.

Cách 2.

$x^2+mx+n=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 nên $f(x)=x^2+mx+n=(x-x_1)(x-x_2)$

Suy ra $(1-x_1)(1-x_2)=f(1)=1+m+n$

$2x^2+nx+m=0$ có hai nghiệm x_3,x_4 nên $g(x)=2x^2+nx+m=2(x-x_3)(x-x_4)$

Suy ra $2(2-x_1)(2-x_2)=g(1)=8+2m+n$

Dựa trên ý tưởng này, có thể làm khó hơn rất nhiều bài toán, khi cho đa thức bậc lớn hơn một chút, khi đó việc sử dụng định lý Viet để tính toán sẽ gặp rất nhiều khó khăn. Ví dụ như bài thi HSGQG của Bulgari năm 2019 dưới đây

"Gọi $f(x)=x^2+bx+1$, với b là số thực. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $f(f(x)+x)<0$"

Câu 3. Giải phương trình $x^2+2\sqrt{x-1}-2x\sqrt{2-x}+1=0$

Lời giải

Công việc đầu tiên của giải phương trình thường là ta dự đoán nghiệm. Với khoảng điều kiện bé như bài này, học sinh có thể xác định bằng cách thử và thấy ngay nghiệm $x=1$.

Quan sát, khi $x=1$ thì $x=\sqrt{2-x}$ và $x^2;2x\sqrt{2-x}$ là hai cụm của hằng đẳng thức đáng nhớ. Do đó, ta có thể thử gom thành hằng đẳng thức, và có lời giải như sau

Điều kiện $2\ge x\ge 1$

$x^2+2\sqrt{x-1}-2x\sqrt{2-x}+1=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x\sqrt{2-x}+2-x\right)+\left(x-1+2\sqrt{x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-1+2\sqrt{x-1}\right)=0$

Do $x \ge 1$, nên $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2\sqrt{x-1} \ge 0 \\ \left(x-\sqrt{x-1}\right)^2 \ge 0 \end{cases}$.

Suy ra, phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2\sqrt{x-1}=0 \\ \left(x-\sqrt{x-1}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

Một trong những phương pháp hay sử dụng là phương pháp lượng liên lợp. Bài toán này, sau khi thử được nghiệm $x=1$, ta có thể tách như sau

Cách 2:

$$x^2+2\sqrt{x-1}-2x\sqrt{2-x}+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)-2x\left(\sqrt{2-x}-1\right)+2\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+2x\frac{x-1}{\sqrt{2-x}+1}+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left[\sqrt{\left(x-1\right)^3}+\frac{2x\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}+1}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \text{ (vì } x\ge 1 \text{ nên } \sqrt{\left(x-1\right)^3}+\frac{2x\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}+1}+1>0\text{)}$$

$\Leftrightarrow x=1$.

Bài 4. **(1 điểm)** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho ab là ước của a^2+b.

Lời giải

$ab \mid a^2+b$ (1)

Vì $ab \mid a^2+b$ và $a \mid a^2$, suy ra $a \mid b$.

Suy ra $b=ka \quad (k\in\mathbb{N})$

Từ (1) suy ra, $ka^2 \mid a^2+ak$, suy ra $ka \mid a+k$

Suy ra, $\begin{cases} a \mid k \\ k \mid a \end{cases}$, suy ra $a=k$.

Suy ra, $k^2 \mid 2k$ hay $k \mid 2$.

Vậy $\begin{cases} k=a=1 \\ b=ka=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k=a=2 \\ b=ka=4 \end{cases}$

Thử lại, ta thấy cả hai cặp số đều thỏa mãn.

Trong bài toán này, học sinh rất hay quên thử lại. Học sinh nào biết thử lại, là có tư duy logic rất tốt.

Bài 7. **(1 điểm)** Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}+\frac{c^2+1}{b^2c^2}\ge a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)$$

Lời giải

Suy nghĩ cách tự nhiên, ta tách như sau

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}+\frac{c^2+1}{b^2c^2}\ge a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2c^2}\ge ab+bc+ca+a+b+c \qquad (*)$$

Do $abc=1$ nên $\begin{cases}\frac{1}{c}=ab;\frac{1}{a}=bc;\frac{1}{ac}=b\\ \frac{1}{ca}=b;\frac{1}{ab}=c;\frac{1}{bc}=a\end{cases}$

$(*)$ trở thành, $\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)$ $(**)$

Tới đây, ta có thể nghĩ đến việc so sánh tương ứng từng cụm.

Nếu nhìn tương ứng $\begin{cases}a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a+b+c\\ a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\end{cases}$**, ta có thể xuất phát từ BĐT rất quen thuộc sau**

Áp dụng BĐT quen thuộc $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xy$ với mọi x,y,z ta được

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\left(ab\right)\left(bc\right)+\left(ac\right)\left(bc\right)+\left(ab\right)\left(bc\right)=abc\left(a+b+c\right)=a+b+c$

Từ đây ta có (**) đúng. (đpcm)

Cách 2:

Nếu nhìn tương ứng $\begin{cases}a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab+bc+ca\\ a^2+b^2+c^2\ge a+b+c\end{cases}$**, ta có thể xuất phát từ BĐT**

“ $x^2+y^2+z^2\ge x+y+z$ (*) với các số thực x,y,z thỏa $xyz=1$ ”

Thật vậy,

$$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2+\left(x^2+y^2+z^2-3\right)\ge 0$$

Theo BĐT Côsi, ta có $x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3$, suy ra $x^2+y^2+z^2-3\ge 0$

Vậy ta đã chứng minh (*)

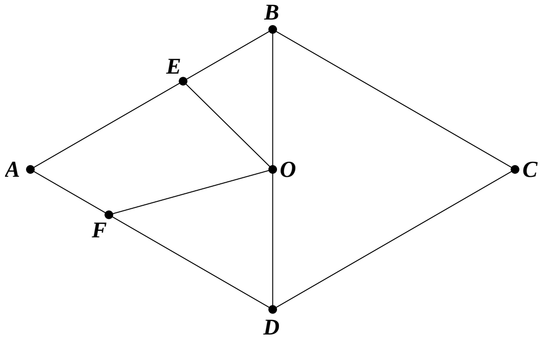
Áp dụng BĐT này ta với chú ý $\left(ab\right)\left(bc\right)\left(ca\right)=a^2b^2c^2=1$, được ngay

$$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(ab+bc+ca\right)+\left(a+b+c\right)$$

Bài 5. **(1,5 điểm)** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, có $\widehat{ABC}=120^0$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên các cạnh AB, AD, tương ứng lấy các điểm E, F không trùng với các đỉnh của hình thoi đã cho, sao cho $\widehat{EOF}=60^0$. Hãy tính tích $BE.DF$ theo a.

Lời giải

Mặc dù đây là bài toán được đánh giá là dễ, nhưng lại được phát biểu ở dạng hình mà học sinh của tỉnh rất ít làm.



Do tam giác ABC cân và $\widehat{ABD}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=60^0$ nên tam giác ABD là tam giác đều.

Suy ra $BD=AB=a; \widehat{ABO}=\widehat{ADO}=60^0$

Ta có, $\widehat{EOB}=180^0-\widehat{EOF}-\widehat{FOD}=180^0-60^0-\widehat{FOD}=180^0-\widehat{FDO}-\widehat{FOD}=\widehat{OFD}$

Suy ra tam giác EBO và OFD đồng dạng do ta có $\begin{cases}\widehat{EBO}=60^0=\widehat{FDO}\\ \widehat{EOB}=\widehat{OFD}\end{cases}$

Suy ra $\frac{EB}{OD}=\frac{OB}{FD}$

Hay $EB.FD=OB.OD=\frac{BD^2}{4}=\frac{a^2}{4}$.

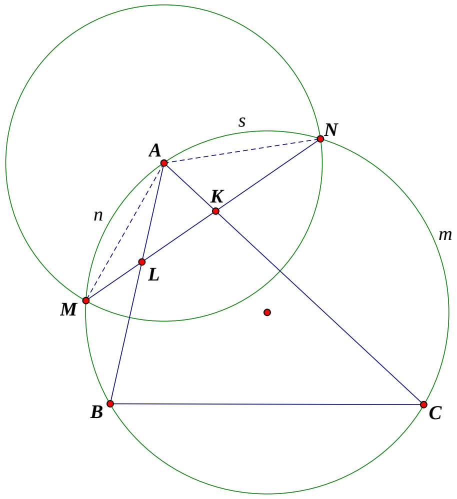
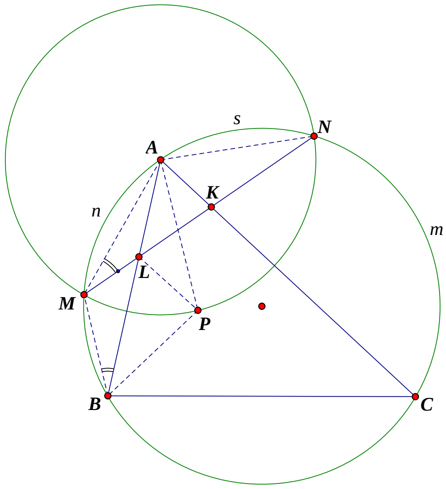
Bài 6. **(2,5 điểm)** Cho tam giác ABC $\left(AB\leq AC\right)$. Lấy điểm P nằm trong tam giác sao cho $AP<AB$. Đường tròn tâm A, bán kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm phân biệt M, N (M khác phía với C đối với đường thẳng AB). Đường thẳng MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại K, L.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL.

Lời giải

Bài toán hoàn toàn có thể phát triển thành các bài toán khó hơn rất nhiều. Nhưng với mức độ học lực của tỉnh nhà, thì dừng ở mức độ này là rất hợp lý. Bài này kiểm tra đầy đủ các kĩ năng cần kiểm tra đối với học sinh.

a) Do $AM = AN = AP$ nên $sd\overset{\frown}{AnM} = sd\overset{\frown}{AsN}$ $\widehat{NKC} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AnM} + sd\overset{\frown}{NmC}\right) = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AsN} + sd\overset{\frown}{NmC}\right)$ $= \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AmC} = \widehat{ABC}$ Vậy $\widehat{LBC} = \widehat{NKC}$ nên tứ giác $BLKC$ nội tiếp.	
b) $sd\overset{\frown}{AnM} = sd\overset{\frown}{AsN}$ suy ra $\widehat{MBA} = \widehat{AMN}$. Ta có $\widehat{MAB} = \widehat{MAL}$; $\widehat{MBA} = \widehat{AML}$ Suy ra, hai tam giác AML và ABM đồng dạng. Suy ra, $\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AM}$ Mà $AM = AP$, suy ra $\frac{AP}{AB} = \frac{AL}{AP}$. Mặt khác ta có, $\widehat{LAP} = \widehat{BAP}$ nên tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL.	

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LONG AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Đề số 34

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2020-2021
Môn thi: **TOÁN (CHUYÊN)**
Ngày thi: **17/7/2020**
Thời gian làm bài: **150 phút (*không kể thời gian phát đề*)**

Câu 1 (*2,0 điểm*) Cho biểu thức $P=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để P là số nguyên.

Câu 2 (*1,5 điểm*) Cho hàm số: $y=-\frac{3}{4}x+3$ có đồ thị (d).

a) Vẽ đồ thị (d).

b) Gọi A là giao điểm của (d) với trục tung Oy; B là giao điểm của (d) với trục hoành Ox. Tính chu vi tam giác OAB và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d).

Câu 3 (*1,0 điểm*) Cho phương trình: $m\left(m^2x-m-2\right)=8x+4$ với m là tham số, $m\ne 2$.

Tìm tất cả giá trị của m để phương trình trên có nghiệm nhỏ hơn -2.

Câu 4 (*2,5 điểm*) Cho đường tròn (O) có AB là đường kính. Vẽ đường kính CD không trùng với AB. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F.

Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AF.

a) Chứng minh: $ACBD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh: QO song song BF và ΔBQC là tam giác cân.

c) Chứng minh: $EB.EC+FB.FD\ge 2CD^2$.

Câu 5 (*1,0 điểm*) Cho đa giác đều 24 cạnh $A_1A_2....A_{23}A_{24}$. Có tất cả bao nhiêu tam giác vuông nhưng không phải là tam giác vuông cân được tạo thành từ các đỉnh của đa giác trên?

Câu 6 (*1,0 điểm*) Cho các số thực a, b, c sao cho: $a\ge 0;\ b\ge\frac{3}{2};\ c\ge 5$ và $a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{9}\le 12$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\sqrt{2ab-3a}+\sqrt{ca+8c}+2\sqrt{c-5}$.

Câu 7 (*1,0 điểm*) Cho ΔABC nhọn có $AB<AC$. Gọi O,H,G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, trọng tâm của tam giác trên. Gọi E là điểm tùy ý sao cho luôn tạo thành ΔEHG và ΔEOG.

Chứng minh: Tỉ số diện tích ΔEHG và diện tích ΔEOG không phụ thuộc vào vị trí điểm E.

HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………….Số báo danh:…………….Chữ ký…… ……

Chữ ký CBCT 1:……………………… ...Chữ ký CBCT 2:…………………………...

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LONG AN
ĐỀ CHÍNH THỨC

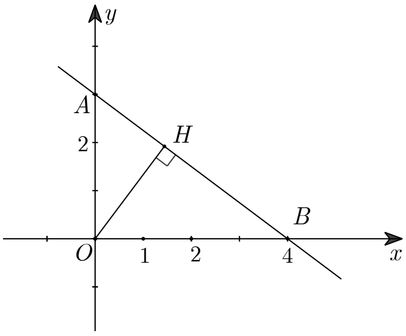
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2020-2021
Môn thi: **TOÁN (CHUYÊN)**
Ngày thi: **17/7/2020**
Thời gian làm bài: **150 phút (*không kể thời gian phát đề*)**

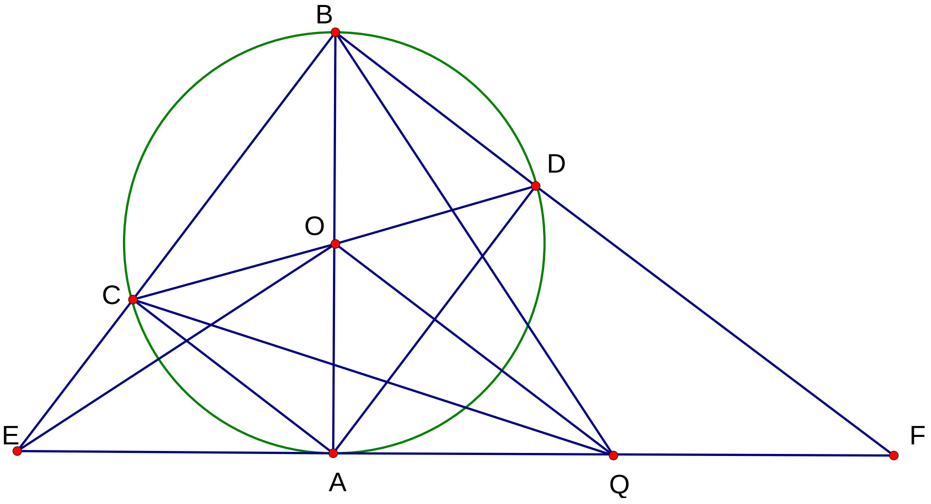
HƯỚNG DẪN CHẤM THI ĐỀ CHÍNH THỨC

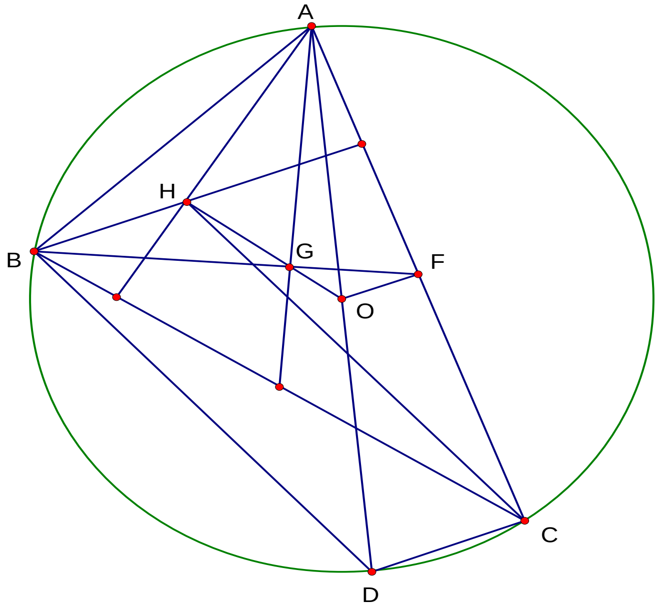
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Ghi chú: *Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.*

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1a ***(1,0 điểm)***	$P=\frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	*0,25*
	$P=\frac{x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-3x-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	*0,25*
	$P=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	*0,25*
	$P=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$	*0,25*
Câu 1b ***(1,0 điểm)***	Ta có $P>0, P\in\mathbb{N}$ và $\left(\sqrt{x}-\frac{P}{2}\right)^2=\frac{P^2+4P-32}{4}$. Suy ra $\left(\sqrt{x}-\frac{P}{2}\right)^2=\frac{(P-4)(P+8)}{4}$	*0,25*
	Suy ra $P\geq 4, P\in\mathbb{N}$ và $\left\|\sqrt{x}-\frac{P}{2}\right\|=\frac{\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}$.	*0,25*
	$8\geq P\geq 4, P\in\mathbb{N}$	*0,25*

	$x=\left(\frac{P-\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}\right)^2;x=\left(\frac{P+\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}\right)^2$	
	$P>8,P\in\mathbb{N}$ $x=\left(\frac{P+\sqrt{(P-4)(P+8)}}{2}\right)^2$	0,25
Câu 2a **(0,5 điểm)**	Tìm đúng tọa độ hai điểm thuộc (d)	0,25
	Vẽ đúng đồ thị (d) 	0,25
Câu 2b **(1,0 điểm)**	Tọa độ các giao điểm: $A(0;3)$; $B(4;0)$; $OA=3,OB=4$	0,25
	$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$	0,25
	Chu vi tam giác OAB : $OA+OB+AB=3+4+5=12$	0,25
	Vẽ OH vuông góc với AB tại H . Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH , ta có: $OH=\frac{OA.OB}{AB}=\frac{12}{5}$	0,25
Câu 3 **(1,0 điểm)**	$m(m^2x-m-2)=8x+4\Leftrightarrow(m^3-8)x=m^2+2m+4\Leftrightarrow(m-2)x=1$ (vì $m^2+2m+4=(m+1)^2+3>0$)	0,25
	Phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{m-2}$	0,25
	$x=\frac{1}{m-2}<-2\Leftrightarrow\frac{2m-3}{m-2}<0$	0,25
	Kết luận $\frac{3}{2}<m<2$	0,25

Câu 4a **(0,75 *điểm*)**		
	Vì AB là đường kính nên $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=90^0$	*0,25*
	Vì CD là đường kính nên $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=90^0$	*0,25*
	Suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật	*0,25*
Câu 4b **(1,0 *điểm*)**	Vì O là trung điểm AB , Q là trung điểm AF nên QO là đường trung bình tam giác ΔABF	*0,25*
	Suy ra: QO song song BF	*0,25*
	Vì QO song song $BF;BC\perp BF$ nên $QO\perp BC$ Vì $QO\perp BC$ nên QO đi qua trung điểm BC (tính chất đường kính và dây cung)	*0,25*
	ΔBQC có QO vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân	*0,25*
Câu 4c **(0,75 *điểm*)**	Tam giác BEA vuông tại A và có đường cao AC nên $EA^2=EB.EC$ Tam giác BFA vuông tại A và có đường cao AD nên $FA^2=FB.FD$ Suy ra $EB.EC+FB.FD=EA^2+FA^2$	*0,25*
	$EA^2+FA^2\geq 2EA.FA;\ EA.FA=AB^2=CD^2$	*0,25*
	Kết luận $EB.EC+FB.FD\geq 2CD^2$.	*0,25*
Câu 5	Đa giác đều $A_1A_2....A_{23}A_{24}$ sẽ nội tiếp đường tròn tâm O và $A_1A_{13},A_2A_{14},....,A_{12}A_{24}$ là 12 đường kính của đường tròn trên.	*0,25*

(1,0 điểm)	Từ đường kính A_1A_{13} ta có 22 tam giác vuông: $A_1A_{13}A_2, A_1A_{13}A_3, ..., A_1A_{13}A_{12}, A_1A_{13}A_{14}, ..., A_1A_{13}A_{24}$	*0,25*
	Trong 22 tam giác vuông trên thì có 2 tam giác cân là $A_1A_{13}A_7, A_1A_{13}A_{19}$	*0,25*
	Tương tự cho các đường kính khác, tổng cộng ta có 240 tam giác thỏa đề bài.	*0,25*
Câu 6 **(1,0 điểm)**	$\sqrt{2ab-3a}=\sqrt{a(2b-3)}\le\frac{a+2b-3}{2}$; $\sqrt{c(a+8)}\le\frac{c+a+8}{2}$ $2\sqrt{c-5}=\sqrt{4(c-5)}\le\frac{4+c-5}{2}$	*0,25*
	Suy ra: $M\le a+b+c+2$	*0,25*
	Ta có: $a\le\frac{a^2+1}{2}$; $b\le\frac{b^2+4}{4}$; $c\le\frac{c^2+81}{18}$ Suy ra: $a+b+c\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{18}+6\le 12$ Suy ra : $M\le 14$	*0,25*
	Giá trị lớn nhất của M là 14 (Khi $a=1, b=2, c=9$)	*0,25*
Câu 7 **(1,0 điểm)**		

	Vẽ đường kính AD . Ta có BH song song DC vì cùng vuông góc AC ; CH song song BD vì cùng vuông góc AB . Suy ra: $BHCD$ là hình bình hành	0,25
	Gọi F là trung điểm AC Vì OF là đường trung bình của tam giác ADC và $BHCD$ là hình bình hành nên OF song song BH ; $OF = \frac{BH}{2}$	0,25
	Vì $\frac{BG}{FG} = \frac{BH}{FO} = 2; \widehat{HBG} = \widehat{OFG}$ nên tam giác BHG đồng dạng tam giác FOG . Suy ra : $\frac{GH}{GO} = 2; \widehat{HGB} = \widehat{OGF}$	0,25
	Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng (vì $\widehat{HGB} + \widehat{OGB} = 180^0$) và $GH = 2GO$ Suy ra $\frac{S_{\Delta EHG}}{S_{\Delta EOG}} = 2$	0,25

-------HẾT-------

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG THÁP

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)
Đề số 35

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
MÔN: TOÁN (chuyên)
Ngày thi: 24/07/2020
*Thời gian làm bài: **150** phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A=\left(\frac{3\sqrt{x}}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{1}{x+\sqrt{x}}$.

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

2. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa $2A-x=3$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^4-2x^2-3=0$.

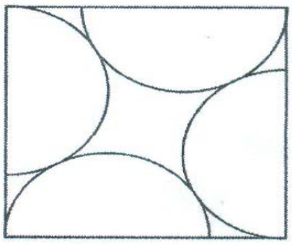
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x+1}=2y+\sqrt{2y}-1 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $(P): y=ax^2$ $(a\neq 0)$. Tìm giá trị của a biết rằng (P) đi qua điểm $M(-2;12)$.

2. Tính số đo góc tạo bởi đường thẳng $d: y=x+8$ với trục hoành Ox.

Câu 4. (1,0 điểm) Bốn nửa hình tròn có bán kính bằng 2cm tiếp xúc ngoài với nhau, được đặt trong một hình vuông như hình vẽ. Tính diện tích hình vuông.



Câu 5. (2,0 điểm) Cho BC là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ $(BC\neq 2R)$. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tâm O luôn nằm trong ΔABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ΔABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh ΔAEF đồng dạng với ΔABC.

2. Gọi A', A_1 lần lượt là trung điểm của BC, EF. Chứng minh rằng $AH=2OA'$ và $R.AA_1=AA'.OA'$.

3. Chứng minh $R.(EF+FD+DE)=2S_{\Delta ABC}$, từ đó suy ra vị trí của điểm A để tổng $EF+FD+DE$ đạt giá trị lớn nhất.

----------HẾT----------

Họ và tên thí sinh:...................................Số báo danh:........................

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG THÁP

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021
MÔN: TOÁN (chuyên)
Ngày thi: 24/07/2020

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Đề thi gồm có 04 trang)

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (2,0 điểm)

NỘI DUNG	Điểm
Cho biểu thức $A=\left(\frac{3\sqrt{x}}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{1}{x+\sqrt{x}}$. 1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.	**1.0**
Điều kiện: $0<x\neq 1$	*0,25*
$A=\left[\frac{3\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]\left(x+\sqrt{x}\right)$	*0,25*
$=\frac{\left(3\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)$	*0,25*
$=\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}.\sqrt{x}=2\sqrt{x}$	*0,25*
2. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa $2A-x=3$.	**1.0**
$2A-x=3\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-x=3$	*0,25*
$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(1-\sqrt{x}\right)=0$	*0,25*
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=1\ (l)\end{array}\right.$	*0,25*
Vậy $x=9$ là giá trị cần tìm.	*0,25*

Câu 2. (2,0 điểm)

NỘI DUNG	Điểm

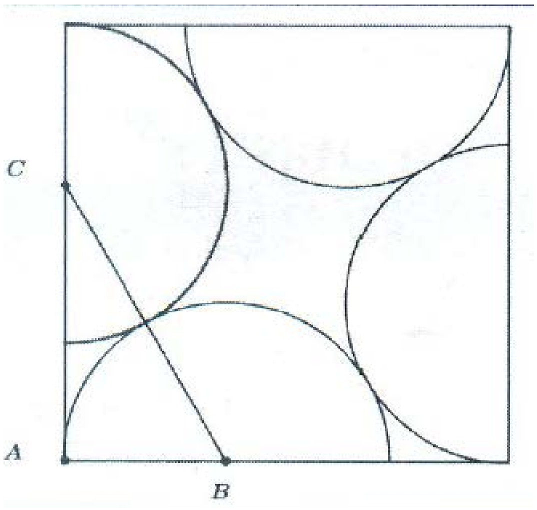
1. Giải phương trình $x^4-2x^2-3=0$ (1).	**1.0**
Đặt $t=x^2$, điều kiện $t\ge 0$	*0,25*
(1) trở thành $t^2-2t-3=0$	*0,25*
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3 \\ x=-1\ (l) \end{array}\right.$	*0,25*
Với $t=3\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$	*0,25*
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x+1}=2y+\sqrt{2y}-1 & (1) \\ x^2+y^2=34 & (2) \end{cases}$.	**1.0**
Điều kiện: $x\ge -1;\ y\ge 0$. $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-\sqrt{2y}=2y-x-1$ $\Leftrightarrow x+1-2y=(2y-x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2y}\right)$	*0,25*
$\Leftrightarrow(x-2y+1)\left(1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2y}\right)=0\Leftrightarrow x=2y-1$	*0,25*
Thay vào (2) ta được $(2y-1)^2+y^2=34\Leftrightarrow 5y^2-4y-33=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\dfrac{-11}{5} \end{array}\right.$	*0,25*
So với điều kiện ta được $y=3$, suy ra $x=5$. Hệ có nghiệm $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$.	*0,25*

Câu 3. (2,0 điểm)

NỘI DUNG	Điểm
1. Giải phương trình $(P): y=ax^2\ (a\ne 0)$. Tìm giá trị của a biết rằng (P) đi qua điểm $M(-2;12)$.	**1.0**
(P) đi qua điểm $M(-2;12)\Rightarrow 12=a(-2)^2$	*0,5*
$\Rightarrow a=3$	*0,5*
2. Tính số đo góc tạo bởi đường thẳng $d: y=x+8$ với trục hoành Ox.	**1.0**
Đường thẳng $d: y=x+8$ cắt Ox tại $A(-8;0)$.	*0,25*
Đường thẳng $d: y=x+8$ cắt Oy tại $B(0;8)$.	*0,25*
Góc tạo bởi đường thẳng d và Ox là góc $\widehat{OAB}$	*0,25*

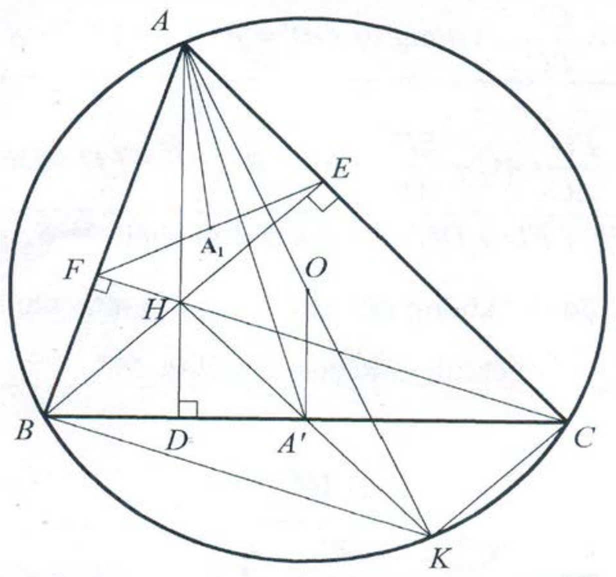
Ta có $\tan\widehat{OAB}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{\left\|8\right\|}{\left\|-8\right\|}=1$	
Góc tạo bởi đường thẳng $d:y=x+8$ với trục Ox bằng $45°$.	*0,25*

Câu 4. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	**Điểm**
Bốn nửa hình tròn có bán kính bằng 2cm tiếp xúc ngoài với nhau, được đặt trong một hình vuông như hình vẽ. Tính diện tích hình vuông.	**1.0**
	
Đặt $AC-2=x,\ x>0$.	*0,25*
Áp dụng Pitago trong ΔABC: $BC^2=AB^2+AC^2\Leftrightarrow 4^2=2^2+\left(2+x\right)^2\Leftrightarrow x^2+4x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2+2\sqrt{3}\\x=-2-2\sqrt{3}\ \left(l\right)\end{array}\right.$	*0,25*
Cạnh hình vuông là $4-2+2\sqrt{3}=2+2\sqrt{3}\ \left(cm\right)$.	*0,25*
Diệnt tích hình vuông là $S=\left(2+2\sqrt{3}\right)=16+8\sqrt{3}\ \left(cm^2\right)$	*0,25*

Câu 5. (2,0 điểm)

NỘI DUNG	**Điểm**
Cho BC là một dây cung của đường tròn $\left(O;R\right)$ $\left(BC\neq 2R\right)$. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tâm O luôn nằm trong ΔABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ΔABC đồng quy tại H.	

	
1. Chứng minh ΔAEF đồng dạng với ΔABC .	**1.0**
Tứ giác $AEHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{AHE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)	*0,25*
Lại có $\widehat{AHE}=\widehat{BHD}$ (đối đỉnh)	*0,25*
$\widehat{BHD}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ $\widehat{HBD}$) $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ACB}$	*0,25*
Suy ra ΔAEF đồng dạng với ΔABC (g – g).	*0,25*
2. Gọi A', A_1 lần lượt là trung điểm của BC , EF . Chứng minh rằng $AH=2OA'$ và $R.AA_1=AA'.OA'$.	**1.0**
Ta có $KB//CH$; $KC//BH$ suy ra $BHCK$ là hình bình hành. Do đó A' là trung điểm của KH . Nên OA' là đường trung bình của ΔAHK .	*0,25*
Suy ra $OH=2.OA'$	*0,25*
Gọi R, R' lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC , ΔAEF ; AA' là trung tuyến ΔABC ; AA_1 là trung tuyến ΔAEF ; Do ΔAEF đồng dạng với ΔABC $\Rightarrow \frac{R}{R'}=\frac{AA'}{AA_1}\Rightarrow R.AA_1=AA'.R'=AA'.\frac{AH}{2}=AA'.\frac{2A'O}{2}$	*0,25*
Vậy $R.AA_1=AA'.A'O$. (1)	*0,25*
3. Chứng minh $R.\left(EF+FD+DE\right)=2S_{\Delta ABC}$, từ đó suy ra vị trí của điểm A để tổng $EF+FD+DE$ đạt giá trị lớn nhất.	**1.0**
Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AC, AB . Ta có $OB'\perp AC$; $OC'\perp AB$. Suy ra OA' , OB' , OC' lần lượt là đường cao của các ΔOBC , ΔOCA , ΔOAB .	*0,25*

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}+S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left(OA'.BC+OB'.AC+OC'.AB\right)$ $\Leftrightarrow 2S_{\Delta ABC}=\left(OA'.BC+OB'.AC+OC'.AB\right)$ (2)	
Theo (1) suy ra $OA'=R.\frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỷ số giữa hai tam giác đồng dạng ΔABC và ΔAEF nên $\frac{AA_1}{AA'}=\frac{EF}{BC}$. Tương tự $OB'=R.\frac{FD}{AC}$; $OC'=R.\frac{ED}{AB}$	0,25
Thay vào (2) ta được $2S_{\Delta ABC}=R\left(\frac{EF}{BC}.BC+\frac{FD}{AC}.AC+\frac{ED}{AB}.AB\right)=R\left(EF+FD+DE\right)$	0,25
Do R không đổi nên $\left(EF+FD+DE\right)$ đạt giá trị lớn nhất khi $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất. Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AD.BC$ do BC không đổi nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.	0,25

---- Hết----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

Đề chính thức

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020-2021
Môn thi chuyên: TOÁN (Chuyên Tin)
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: 150 phút

Đề số 36

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1. Thu gọn biểu thức: $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

2. Cho phương trình: $2019x^2-\left(m-2020\right)x-2021=0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1+x_2=\sqrt{x_1^2+2020}-\sqrt{x_2^2+2020}$.

Bài 2. *(2,5 điểm)*

1. Giải phương trình: $5\sqrt{1+x^3}=2\left(x^2+2\right)$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y+xy^2-y^3=0 \\ xy+3y-\sqrt{x+3}-2=0 \end{cases}$.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2020^{2020}+1\right)\vdots\left(n^3+2018n\right)$.

Bài 4. *(3,0 điểm)*

1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường chéo BD. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AD và N là trung điểm của đoạn HK. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BD chứa điểm A dựng tam giác đều BED. Chứng minh 3 điểm M, N, E thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC nhọn $\left(AB<AC\right)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại D khác A. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM đường thẳng AC tại điểm F khác A.

a) Chứng minh $BM.BC=BF.BD$.

b) Chứng minh $EF\perp AC$.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x+yz}{y+z}+\frac{y+zx}{z+x}+\frac{z+xy}{x+y}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2.0 *điểm*)

1. Thu gọn biểu thức: $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

2. Cho phương trình: $2019x^2-\left(m-2020\right)x-2021=0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1+x_2=\sqrt{x_1^2+2020}-\sqrt{x_2^2+2020}$.

1. Ta có $2\sqrt{2}A=\left(8+2\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}$

$$=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=\left(5-3\right)^2=4.$$

2. Vì $a.c=2019.\left(-2021\right)<0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m

.

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Viet: $\begin{cases}x_1+x_2=m-2020\\ x_1.x_2=-\dfrac{2021}{2019}\end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow x_1+x_2=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{\sqrt{x_1^2+2020}+\sqrt{x_2^2+2020}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\ 1=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+2020}+\sqrt{x_2^2+2020}}\end{array}\right.$.

Suy ra $x_1+x_2=0\Rightarrow m-2020=0\Leftrightarrow m=2020$; hoặc $1=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+2020}+\sqrt{x_2^2+2020}}$ $\quad(*)$

- Với $x_1<0<x_2\Rightarrow x_1-x_2<0\xrightarrow{\quad}\text{VP}_{(*)}<0<1$ nên $(*)$ không xảy ra$\Rightarrow$không có giá trị m.
- Với $x_2<0<x_1$, suy ra $x_1-x_2>0$, khi đó $(*)\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2=\left(\sqrt{x_1^2+2020}+\sqrt{x_2^2+2020}\right)^2$

$$\Leftrightarrow -x_1x_2=2020+\sqrt{\left(x_1^2+2020\right)\left(x_2^2+2020\right)}\quad(1)$$

Ta có $\text{VT}_{(1)}=-x_1x_2=\dfrac{2021}{2019}<2020<\text{VP}_{(1)}\Rightarrow$ không có x_1, x_2 thỏa $(1)\Rightarrow$ không có giá trị m.

Vậy $m=2020$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 2. (2.5 điểm)

1. Giải phương trình: $5\sqrt{1+x^3}=2\left(x^2+2\right)$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-x^2y+xy^2-y^3=0 & (1) \\ xy+3y-\sqrt{x+3}-2=0 & (2) \end{cases}$.

1. Điều kiện: $x\ge -1$. Đặt $u=\sqrt{x+1}\ge 0$ và $v=\sqrt{x^2-x+1}>0$, suy ra $u^2+v^2=x^2+2$.

Ta được: $2\left(u^2+v^2\right)=5uv\Leftrightarrow \begin{cases} u=2v \\ v=2u \end{cases}$.

- Với $u=2v\Rightarrow \sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ vô nghiệm (do $\Delta=-23<0$).

- Với $v=2u\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-5x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (thỏa).

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{37}}{2};\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\right\}$.

***Cách khác:** (Hỗ trợ của máy tính cầm tay)*

Điều kiện: $x\ge -1$. Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$5\sqrt{1+x^3}=2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow 4x^4-25x^3+16x^2-9=0\Leftrightarrow \left(4x^2-5x+3\right)\left(x^2-5x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-5x+3=0 \\ x^2-5x-3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}.$$

2. Điều kiện $x\ge -3$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^2(x-y)+y^2(x-y)=0\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+y^2=0 \end{array}\right.$.

- Với $x=y$, thay vào (2) ta được: $x^2+3x-\sqrt{x+3}-2=0\Leftrightarrow x^2+3x-4+2-\sqrt{x+3}=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4)+\frac{1-x}{2+\sqrt{x+3}}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x+4-\dfrac{1}{2+\sqrt{x+3}}=0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Ta có $(3)\Leftrightarrow x+3+\dfrac{1+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}=0$, nhận thấy VT >0, với mọi $x\ge -3$, nên PT vô nghiệm.

Do đó trong trường hợp này hệ phương trình có nghiệm là $x=y=1$.

- Với $x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$, thay vào (2) ta được: $-\sqrt{3}-2=0$ (vô lý).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=(1;1)$.

Bài 3. (1.5 điểm)

Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2020^{2020}+1\right)\vdots\left(n^3+2018n\right)$.

Ta có: $n^3+2018n=n\left(n^2+2018\right)=n\left(n^2-1\right)+2019n=n(n-1)(n+1)+2019$

- Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3, $2019n$ chia hết cho 3.

Suy ra $n^3+2018n\vdots 3$. $\qquad(1)$

- Ta có 2020 chia 3 dư 1 suy ra 2020^{2020} chia 3 dư 1 suy ra $2020^{2020}+1$ chia 3 dư 2.

Do đó $2020^{2020}+1\not\vdots\, 3$. $\qquad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(2020^{2020}+1\right)\not\vdots\left(n^3+2018n\right)$, với mọi giá trị nguyên của n.

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $\left(2020^{2020}+1\right)\vdots\left(n^3+2018n\right)$.

Bài 4. (3.0 điểm)

1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường chéo BD. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AD và N là trung điểm của đoạn HK. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BD chứa điểm A dựng tam giác đều BED. Chứng minh 3 điểm M, N, E thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D khác A. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua tâm O. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM đường thẳng AC tại điểm F khác A.

a) Chứng minh $BM.BC=BF.BD$.

b) Chứng minh $EF\perp AC$.

1. Gọi F là giao điểm MH và EB; G là giao điểm của ED và MK.

- Nhận thấy BA, DA lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{EBD}$ và $\widehat{EDB}$, mà tam giác BDE là tam giác đều nên $BA\perp ED$ và $DA\perp BE$.

Do đó $MF \,//\, EG$ (cùng vuông với AB) và $MG \,//\, EF$ (cùng vuông với AD), suy ra tứ giác $EFMG$ là hình bình hành.

- Gọi I là trung điểm của ME, suy ra I cũng là trung điểm của FG.

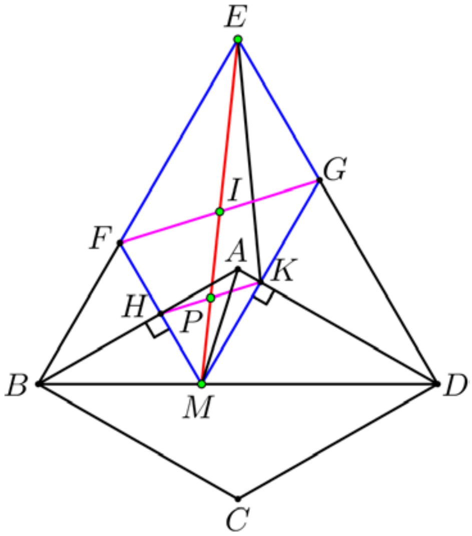
- Gọi P là giao điểm của HK và MI.

Vì $HK \,//\, FG$, theo định lí Talét suy ra:

$$\frac{HP}{IF}=\frac{MP}{MI}=\frac{PK}{IG}.$$

Lại có $IG = IF \longrightarrow HP = PK$ hay P là trung điểm của HK. Do đó $P \equiv N$.

Do đó M, N, I thẳng hàng, mà M, I, E thẳng hàng nên M, N, E thẳng hàng.



2. a) Vì tứ giác $ABMF$ nội tiếp, suy ra: $\widehat{MBF}=\widehat{MAF}$ và $\widehat{BFM}=\widehat{BAM}$. (1)

Vì ngũ giác $ABDCE$ nội tiếp, suy ra: $\widehat{DBC}=\widehat{DAC}=\widehat{DEC}$ và $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BFM}=\widehat{BCD}$; $\widehat{MBF}=\widehat{DBC}$
, suy ra $\Delta MBF \sim \Delta DBC$ (góc – góc), do đó

$$\frac{BM}{BD}=\frac{BF}{BC}\longrightarrow BM.BC = BF.BD \text{ (đpcm).}$$

b) • Vì $\widehat{BAD}=\widehat{CAD} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD} \Rightarrow BD = CD$.

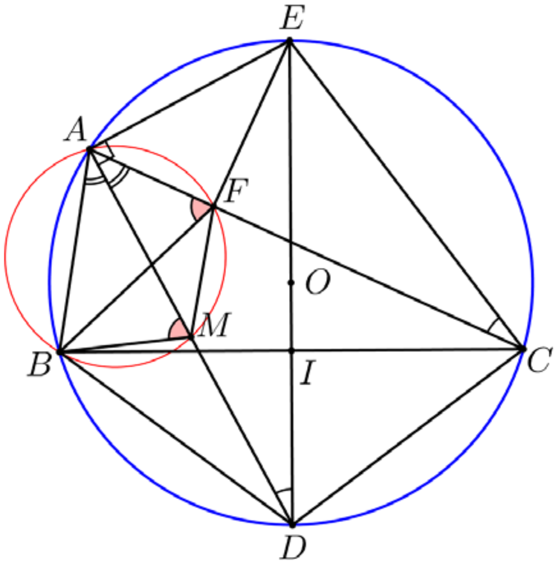
Ta có DE là đường kính của (O) nên $\widehat{DAE}=90°$

- Gọi I là trung điểm của BC, mà D là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên $DE \perp BC$.

Khi đó $\Delta DIC \sim \Delta DCE \Rightarrow \dfrac{CD}{CI}=\dfrac{ED}{EC}$.

- Vì $\widehat{BDM}=\widehat{BCF}$ (cùng chắn cung AB).
  (3)

Ta có $\widehat{BMA}=\widehat{BFA}\longrightarrow \widehat{BFC}=\widehat{BMD}$.
(4)



Từ (3) và (4), suy ra $\Delta BMD \sim \Delta BFC$, do đó:

$$\frac{MD}{CF}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{DA}{2CF}=\frac{CD}{2CI}\xrightarrow{\frac{CD}{CI}=\frac{ED}{EC}}\frac{DA}{CF}=\frac{DE}{CE}.$$

● Xét ΔDAE và ΔCFE, ta có: $\dfrac{DA}{CF}=\dfrac{DE}{CE}$ và $\widehat{ADE}=\widehat{FCE}$ nên $\Delta DAE\sim\Delta CFE$.

Suy ra $\widehat{CFE}=\widehat{DAE}=90^\circ$ hay $EF\perp AC$.

Bài 5. (*1.0 điểm*)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x+yz}{y+z}+\frac{y+zx}{z+x}+\frac{z+xy}{x+y}.$$

Ta có $P=\dfrac{(1-y)(1-z)}{y+z}+\dfrac{(1-z)(1-x)}{z+x}+\dfrac{(1-x)(1-y)}{x+y}$

$$=\frac{(x+z)(x+y)}{y+z}+\frac{(x+y)(y+z)}{z+x}+\frac{(y+z)(x+z)}{x+y}.$$

Đặt $a=x+y>0;\ b=y+z>0;\ c=z+x>0$.

Khi đó ta được: $a+b+c=2$ và $P=\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}$.

Ta có $2P=\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}+\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\overset{\text{CÔSI}}{\geq}2c+2a+2b=4\longrightarrow P\geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{bc}{a}=\dfrac{ca}{b}=\dfrac{ab}{c}$ và $a+b+c=2\longrightarrow a=b=c=\dfrac{2}{3}$.

Với $a=b=c=\dfrac{2}{3}$ suy ra $x+y=y+z=z+x=\dfrac{2}{3}\longrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

Đề chính thức
Đề số 37

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020-2021
Môn thi chuyên: TOÁN (Chuyên Toán)
Ngày thi: 18/7/2020
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1 (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho phương trình: $2x^2-3x+2m=0$. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 0 thỏa $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=1$

Bài 2 (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{x^4-x^2+1}{x^2+3x^2-x}=\frac{1}{2}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases}$

Bài 3 (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2+3pq+q^2$ là một số chính phương.

Bài 4 (3,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC cân tại A (với $\widehat{BAC}<60^\circ$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh rằng $MA>MB+MC$.

2. Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm cạnh BC và E, F tương ứmg là hình chiếu vuông góc của D lên AC và AB. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AO và BC theo thứ tựu tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác AMDN nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của AB và ED, L là giao điểm của AC và FD, H là trung điểm của KL và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh $HI\perp EF$.

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho x,y là 2 số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho phương trình: $2x^2-3x+2m=0$. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 0 thỏa $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=1$

Lời giải

1. Điều kiện: $x\ge 0,x\ne 1$

Ta có $P=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{3x+4\sqrt{x}-7-\left(x-1\right)-\left(x-9\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{x}-1}=\frac{x+4\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1\in U\left(2\right)=\left\{-2;-1;1;2\right\}$. Suy ra $x\in\left\{0;4;9\right\}$

2. Ta có $\Delta=\left(-3\right)^2-4.2.2m=9-16m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác không thì $\begin{cases}\Delta>0\\2m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{9}{16}\\m\ne 0\end{cases}$ (*)

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{3}{2}\\x_1.x_2=m\end{cases}$

Ta có $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|^2=1\Leftrightarrow\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}{\left(x_1x_2\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{9}{4}-4m}{m^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4}-4m=m^2 \Leftrightarrow 4m^2+16m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy $m=\dfrac{1}{2}; m=-\dfrac{9}{2}$

Bài 2 (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^3+3x^2-x}=\dfrac{1}{2}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 \\ \sqrt{x+y}=y-x \end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện $x^3+3x^2-x\neq 0$

Ta có $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^3+3x^2-x}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(x^4-x^2+1\right)=x^3+3x^2-x$

$\Leftrightarrow 2x^4-x^3-5x^2+x+2=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-x\right)-5=0$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}-x \Rightarrow t^2=\dfrac{1}{x^2}+x^2-2 \Leftrightarrow t^2+2=\dfrac{1}{x^2}+x^2$

Ta được phương trình $2\left(t^2+2\right)+t-5=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=-1$ thì $\dfrac{1}{x}-x=-1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2x^2=x \Leftrightarrow 2x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{14}}{4}$

2. Ta có $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+y}+1=\sqrt{3x+2y}\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\sqrt{x+y}+1+x+y=3x+2y\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}2\sqrt{x+y}=2x+y-1\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\left(y-x\right)=2x+y-1\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=4x-1\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=4x-1\\ \sqrt{5x-1}=3x-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y=4x-1\\ 5x-1=9x^2-6x+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=4x-1\\ 9x^2-11x+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=4x-1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{2}{9}\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=3\\ x=\dfrac{2}{9}, y=-\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $(1;3)$ là nghiệm, $\left(\dfrac{2}{9};-\dfrac{1}{9}\right)$ không phải là nghiệm.

Vậy hẹ phương trình có nghiệm $(1;3)$

Bài 3 (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2+3pq+q^2$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $p^2+3pq+q^2=a^2$. Suy ra $(p+q)^2+pq=a^2$

Do đó: $pq=(a-p-q)(a+p+q)$ và $a+p+q>a-p-q$.

Nhận thấy vì p,q là số nguyên tố nên ta chỉ xét 2 trường hợp sau:

TH1: $a-p-q=1$ và $a+p+q=pq$

Suy ra $a=1+p+q$ và $a=pq-p-q$

Kết hợp suy ra $1+p+q=pq-p-q$ suy ra $pq-2p-2q-1=0$ suy ra $(p-2)(q-2)=5$ suy ra $(p,q)=(3,7),(7,3)$

TH2: Nếu $a+p+q=q(1)$ (trường hợp bằng p tương tự) . Khi đó $a-p-q=p(2)$

Kết hợp (1) và (2) ta có $q+3p=0$ (vô lý)

Vậy chỉ có $(p,q)=(3,7),(7,3)$

Bài 4 (3,0 điểm)

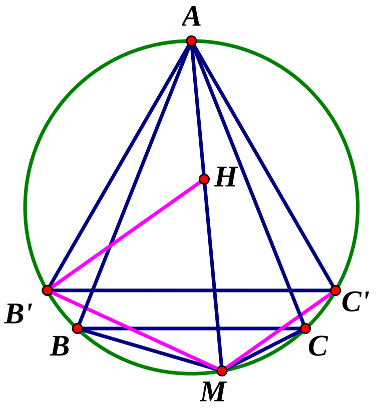
1. Cho tam giác ABC cân tại A (với $\widehat{BAC}<60^\circ$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh rằng $MA>MB+MC$.

2. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm cạnh BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D lên AC và AB. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AO và BC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác AMDN nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của AB và ED, L là giao điểm của AC và FD, H là trung điểm của KL và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh $HI \perp EF$.

Lời giải

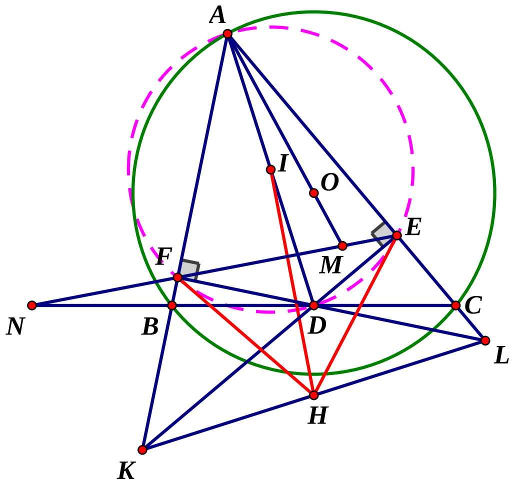


1. Dựng tam giác đều $AB'C'$. Trên MA lấy H sao cho $MH = MB'$. Tam giác $MB'H$ đều, suy ra $\widehat{HB'M} = 60°$, do đó $\widehat{AB'H} = \widehat{C'B'M}$ suy ra $\Delta AB'H = \Delta C'B'M$ (c.g.c) nên $AH = MC'$.

Do đó $MA = MB' + MC'$. Ta có $\widehat{B'AM} > \widehat{BAM} \Rightarrow B'M > BM$, $\widehat{C'AM} > \widehat{CAM} \Rightarrow C'M > CM$

Suy ra $MA > MB + MC$

2.



a) Dễ thấy DFAE nội tiếp

$\widehat{MAD} = \widehat{DAE} - \widehat{OAE} = \widehat{DAE} - \left(90^0 - \widehat{ABC}\right) = \widehat{ABC} + \widehat{DAE} - 90^0$

$\widehat{MND} = \widehat{FNB} = \widehat{ABC} - \widehat{NFB} = \widehat{ABC} - \widehat{AFE} = \widehat{ABC} - \widehat{ADE} = \widehat{ABC} - \left(90^\circ - \widehat{DAE}\right)$

$= \widehat{ABC} + \widehat{DAE} - 90^\circ = \widehat{MAD} \Rightarrow AMDN$ nội tiếp

b) Dễ thấy D là trục tâm tam giác AKL Tam giác KEL vuông tại E, H là trung điểm cạnh huyền KL nên $\widehat{HEK} = \widehat{HKE}$. Mà $\widehat{HKE} = \widehat{DAE}$ (cùng phụ $\widehat{ALK}$)

Suy ra $\widehat{HEK} = \widehat{DAE}$. Do đó HE là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Chứng minh tương tự HF cũng là tiếp tuyến của (I) Suy ra $HI \perp EF$

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho x, y là 2 số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \dfrac{(x+y)^2}{xy}$

Lời giải

Ta có $A = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \dfrac{(x+y)^2}{xy} = \dfrac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2+y^2+2xy}{xy} = 1 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2} + 2 + \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$= 1 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2} + 2 + \dfrac{x^2+y^2}{2xy} + \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

Ta có $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2+y^2}{2xy} \geq 2\sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2} . \dfrac{x^2+y^2}{2xy}} = 2$ (dấu bằng xảy ra khi $x = y$)

Ta có $\dfrac{x^2+y^2}{2xy} \geq \dfrac{2xy}{2xy} = 1$ (dấu bằng xảy ra khi $x = y$)

Do đó $A \geq 1 + 2 + 2 + 1 = 6$ (dấu bằng xảy ra khi $x = y$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 6 khi $x = y$.

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN LẠNG SƠN 2020 – 2021

THẦY NGUYỄN TIẾN TUẤN – THPT CHUYÊN CHU VĂN AN

Đề số 39

Câu 2: (2 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+4}=3$**.**

Giải

ĐK: $x\ge 3$.

Cách 1: Đặt $u=\sqrt{x-3};v=\sqrt[3]{x+4}\Rightarrow u\ge 0$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u+v=3\\ v^3-u^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3-v\\ v^3-(3-v)^2=7\end{cases}$.

Ta có: $v\le 3$ và $v^3-v^2+6v-16=0\Leftrightarrow(v-2)\left(v^2+v+8\right)=0\Leftrightarrow v=2$ vì $v^2+v+8=0$ vô nghiệm.

Với $v=2\Rightarrow\sqrt[3]{x+4}=2\Leftrightarrow x=4$.

Cách 2: Ta có $\left(\sqrt{x-3}-1\right)+\left(\sqrt[3]{x+4}-2\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}+\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4}=0$

$$\Leftrightarrow(x-4)\left[\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4}\right]=0\Leftrightarrow x=4.$$

b) Cho các số thực x,y,z **thỏa mãn** $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^3+\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^3=0$**. Tính tổng**

$$S=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{2021}+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^{2021}+\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^{2021}.$$

Giải

Đặt $a=\sqrt{x}-\sqrt{y};b=\sqrt{y}-\sqrt{z};c=\sqrt{z}-\sqrt{x}$ khi đó ta có $a+b+c=0$.

Mặt khác, ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc\Rightarrow 3abc=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\\ c=0\end{array}\right..$$

Do vai trò của a,b,c như nhau nên ta chỉ cần xét một trường hợp $a=0\Rightarrow c=-b$.

Khi đó $S=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=b^{2021}-b^{2021}=0$.

Câu 3:

a) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{36x}+\frac{1}{9y}+\frac{1}{z}.$$

Giải

Ta có $P=(x+y+z)\left(\frac{1}{36x}+\frac{1}{9y}+\frac{1}{z}\right)\geq\left(\sqrt{x}.\frac{1}{6\sqrt{x}}+\sqrt{y}.\frac{1}{3\sqrt{y}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2=\frac{9}{4}$.

Vậy $\min P=\frac{9}{4}$ khi $6x=3y=z$ mà $x+y+z=1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{9}\\y=\frac{2}{9}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}.$$

Giải

Ta có $\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{b+1}{8}\geq\frac{3}{4}a$.

Tương tự: $\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{b+1}{8}+\frac{c+1}{8}\geq\frac{3}{4}b$; $\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{a+1}{8}\geq\frac{3}{4}c$.

Cộng vế với vế của 3 BĐT trên ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{a+b+c+3}{4}\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}.$$

Câu 4:

a) Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $a-1$ và $b+2021$ đều chia hết cho 6.

Chứng minh 4^a+a+b chia hết cho 6.

Giải

Ta có: $4^a+a+b=4^a-4-2016+(a-1)+(b+2021)$.

Ta chỉ cần chứng minh 4^a-4 chia hết cho 6 với mọi a nguyên dương.

Ta có $4^a-4=4\left(4^{a-1}-1\right)=4.(4-1).\left(4^{a-2}+4^{a-3}+...+1\right)=12.\left(4^{a-2}+4^{a-3}+...+1\right)\vdots 6$ $\Rightarrow$đpcm.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p là ước của 5^p-2^p.

Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $\dfrac{\left(5^p-2^p\right)\left(5^q-2^q\right)}{pq}$ là một số nguyên.

Giải

Ta có: Nếu $p|5^p-2^p$, theo Fermat ta có $5^p-2^p\equiv 5-2\equiv 3(\text{mod } p)$, suy ra $p=3$.

Lúc này $3q|\left(5^3-2^3\right)\left(5^q-2^q\right)$ hay $q|39\left(5^q-2^q\right)$, tương tự như trên suy ra $q=3$ hoặc $q=13$.

* Nếu $q|5^q-2^q$, ta cũng được $p=3$ hoặc $q=13$.

* Xét $\begin{cases} q|5^p-2^p \\ p|5^q-2^p \end{cases}$, $p,q\neq 3$.

Do $(2,q)=1$ nên tồn tại *m, n* sao cho $2m+nq=1$ hay $2m\equiv 1(\text{mod } q)$

Suy ra $(5.m)^p\equiv (2m)^p\equiv 1(\text{mod } q)$, do đó $ord_q(5m)\in\{1,p\}$ và $ord_q(5m)\Big|p-1$

Nếu $ord_q(5m)=1$, hay $5m\equiv 1(\text{mod } q)$

Suy ra $2\equiv 2(5m)\equiv 5.2m\equiv 5(\text{mod } q)$, do đó $q=3$ (mâu thuẫn)

Vậy $ord_q(5m)=p$, suy ra $p|q-1$ (*)

Tương tự cũng từ $5^q\equiv 2^q(\text{mod } p)$, ta có $q\Big|p-1$ điều này mâu thuẫn với (*)

Vậy (*p, q*) = (3; 3), (3; 13) hoặc (13; 3).

Câu 5: Cho tam giác ABC không có góc tù, $AB<AC$, nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Trong đó B,C cố định trên đường tròn (O), A di động trên cung lớn BC. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F, cắt AC tại I.

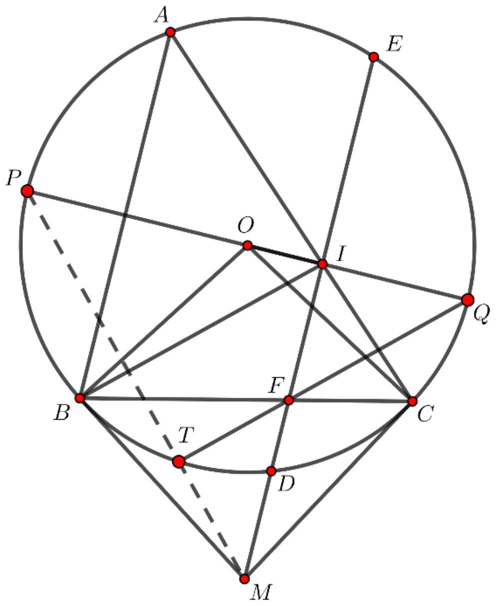
a) Chứng minh $MBIC$ là tứ giác nội tiếp trong một đường tròn và $FI.FM=FD.FE$

.

b) Chứng minh $\widehat{MIO} = 90^\circ$. Tìm vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

c) Đường thẳng OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q). Chứng minh ba điểm P, T, M thẳng hàng.

Giải



a) Ta có $\widehat{MIC} = \widehat{BAC} = \widehat{MBC}$ nên tứ giác $MBIC$ nội tiếp đường tròn (K).

Cách 1: Ta có: $\Delta FEC \sim \Delta FBD$ (g.g) nên

$$\frac{FE}{FB} = \frac{FC}{FD} \Rightarrow FE.FD = FB.FC.$$

Tương tự: $\Delta FIC \sim \Delta FBM$ (g.g) nên

$$\frac{FI}{FB} = \frac{FC}{FM} \Rightarrow FI.FM = FB.FC.$$

Từ đó, ta có: $FI.FM = FD.FE$.

Cách 2: Dùng phương tích, bản chất chính từ cách 1 ra để được tính chất của phương tích:

Ta có: $FI.FM = FB.FC$ (phương tích đối với (K)).

Xét đường tròn (O) thì $FB.FC = FD.FE$ nên $FI.FM = FD.FE$.

b) Vì $MBIC$ nội tiếp và $MBOC$ nội tiếp đường tròn đường kính MO nên 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc đường tròn đường kính OM nên $\widehat{MIO} = 90^\circ$.

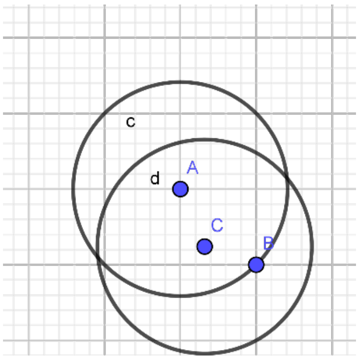
Ta có: $S_{IBC} = \frac{1}{2} BC.d(I; BC)$; S_{IBC} lớn nhất khi $d(I; BC)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(A; BC)$ lớn nhất. Khi đó A nằm chính giữa cung lớn BC.

c) Do $FB.FC = FT.FQ \Rightarrow FT.FQ = FI.FM \Rightarrow \frac{FT}{FI} = \frac{FM}{FQ} \Rightarrow \Delta FTM \sim \Delta FIQ$ mà

$\widehat{FIQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FTM} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{FTP} = \widehat{QTP} = 90^\circ$ nên $\widehat{PTM} = 180^\circ$. Vậy P, T, M thẳng hàng.

Câu 6. Bên trong hình chữ nhật có chiều dài 101cm và chiều rộng 20cm cho 10101 điểm. Vẽ 10101 hình tròn có tâm lần lượt là 10101 điểm đã cho và bán kính đều bằng $\sqrt{2}$ cm. Hỏi có hay không 6 điểm thuộc vào phần chung của 6 hình tròn nhận chính 6 điểm ấy làm tâm? Tại sao?



Chia hình chữ nhật thành các hình vuông đơn vị cạnh 1cm thì có tất cả $101\times 20=2020$ hình vuông đơn vị. Khi đó, tồn tại ít nhất một hình vuông đơn vị có ít nhất $\left[\frac{10101}{2020}\right]+1=6$ điểm trong 10101 điểm đã cho. Xét hình tròn có tâm là 1 trong 6 điểm đó, bán kính $\sqrt{2}$ cm thì sẽ chứa hoàn toàn hình vuông đơn vị trên (vì đường chéo của hình vuông đơn vị này có bán kính là $\sqrt{2}$ cm) nên phần chung của 6 hình tròn có tâm là 6 điểm trong hình vuông đó sẽ chứa toàn bộ hình vuông đơn vị trên. Do đó có đpcm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 40

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2020
Môn thi: Toán (chuyên)
(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT Chuyên Hạ Long)
Thời gian làm bài: ***150 phút****, không kể thời gian giao đề*
(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right).\left(3\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x\ge 0,\ x\ne 1,\ x\ne 4,\ x\ne 9$.

a. Rút gọn *A*.

b. Tìm *x* để $A<2$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Cho phương trình $x^4-2mx^2+m^2-2m+2=0$ (*m* là tham số). Tìm *m* để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=24$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x+y}=y^2+y-x\\ \sqrt{y-1}=\sqrt{x+3y+1}-4\end{cases}$.

Câu 3. *(1,0 điểm)* Cho *x*, *y* là hai số thực thỏa mãn $x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $M=x+2y$.

Câu 4. *(3,5 điểm)* Từ một điểm *A* ở bên ngoài đường tròn (*O*) kẻ các tiếp tuyến *AB*, *AC* và cát tuyến *ADE* với đường tròn (*B*, *C* là các tiếp điểm, $AD<AE$, $\overset{\frown}{DB}<\overset{\frown}{DC}$). Qua điểm *O* kẻ đường thẳng vuông góc với *DE* tại *H*, đường thẳng này cắt đường thẳng *BC* tại *K*. Chứng minh:

a. Tứ giác *BCOH* nội tiếp;

b. *KD* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*);

c. $\widehat{DBC}=\widehat{HBE}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (*a*; *b*) sao cho $\dfrac{ab(a+b)}{ab+2}$ là số nguyên.

……………………. *Hết* …………………….

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:..Số báo danh:..............................

Chữ kí của cán bộ coi thi 1:.............................. *Chữ kí của cán bộ coi thi 2:*........................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

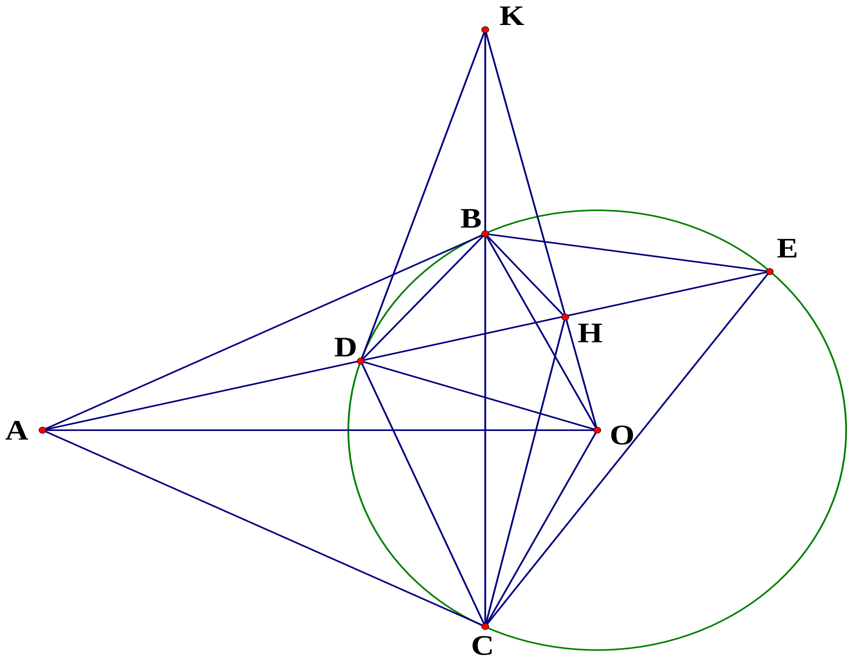
HƯỚNG DẪN CHẤM THI TUYỂN SINH
LỚP 10 THPT NĂM 2020
Môn thi: Toán (chuyên)
(Hướng dẫn này có 03 trang)

Câu	**Sơ lược lời giải**	**Điểm**
1 (2,0 đ)	a. $A=\dfrac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}.\dfrac{3x-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	$=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}.\dfrac{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	b. $A<2\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-2<0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}<0$	0,5
	Vì $\sqrt{x}+4>0$ với mọi x nên $\sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<1\Leftrightarrow 0\le x<1$ KL: $0\le x<1$.	0,5
2 (2,5 đ)	1. Đặt $x^2=t$. Phương trình trở thành $t^2-2mt+m^2-2m+2=0$ (*) Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1;t_2$ dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=2m-2>0\\ t_1+t_2=2m>0\\ t_1t_2=m^2-2m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$	0,5
	$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=24\Leftrightarrow 2\left(t_1^2+t_2^2\right)=24$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1t_2=12\Leftrightarrow m^2+2m-8=0$	0,25
	Giải phương trình được $m_1=-4$ (loại), $m_2=2$ (t/m đk). KL.	0,25
	2. ĐK: $y\ge 1; x+y\ge 0; x+3y\ge -1$	0,25
	$2\sqrt{x+y}=y^2+y-x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+y}+1\right)^2=\left(y+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=y\\ \sqrt{x+y}=-y-2\end{array}\right.$	0,5
	$\sqrt{x+y}=-y-2$ (loại do $y\ge 1$) $\sqrt{x+y}=y\Leftrightarrow x=y^2-y$ (t/m đk) thay vào phương trình $\sqrt{y-1}=\sqrt{x+3y+1}-4$ được $\sqrt{y-1}=y-3$ (đk: $y\ge 3$)	0,25
	Biến đổi phương trình thành $y^2-7y+10=0$. Giải phương trình đươc $y_1=2$ (loại do đk $y\ge 3$), $y_2=5$ (t/m đk)	0,25

	Với $y=5\Rightarrow x=20$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=20\\y=5\end{cases}$	
3 (1,0 đ)	$x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27\Leftrightarrow(x+2y)^2+3(x+2y)+(y-1)^2=28$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(x+2y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{121}{4}-(y-1)^2$	0,25
	Vậy $\left(x+2y+\dfrac{3}{2}\right)^2\le\dfrac{121}{4}\Leftrightarrow\left\lvert x+2y+\dfrac{3}{2}\right\rvert\le\dfrac{11}{2}\Leftrightarrow-7\le x+2y\le4$	0,25
	Vậy M lớn nhất là 4 khi $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$, M nhỏ nhất là -7 khi $\begin{cases}x=-9\\y=1\end{cases}$	0,25
4 (3,5 đ)	a. Chỉ ra $\widehat{ABO}=\widehat{AHO}=\widehat{ACO}=90^0\Rightarrow$ 5 điểm *A, B, O, C* cùng thuộc đường tròn đường kính *AO* $\Rightarrow$ tứ giác *BCOH* nội tiếp	1,0
	b.Tứ giác *BCOH* nội tiếp $\Rightarrow\widehat{CHO}=\widehat{CBO}$. $\Delta\,OBC$ cân $\Rightarrow\widehat{CBO}=\widehat{BCO}$ $\Rightarrow\widehat{OHC}=\widehat{OCK}$.	0,25
	$\Delta\,OHC$ và $\Delta\,OCK$ có $\widehat{OHC}=\widehat{OCK}$, $\widehat{O}$ chung $\Rightarrow\Delta\,OHC\backsim\Delta\,OCK$ $\Rightarrow\dfrac{OH}{OC}=\dfrac{OC}{OK}\Rightarrow OH.OK=OC^2$	0,25
	mà $OC=OD\Rightarrow OH.OK=OD^2\Rightarrow\dfrac{OH}{OD}=\dfrac{OD}{OK}$	0,25
	$\Delta\,OHD$ và $\Delta\,ODK$ có $\dfrac{OH}{OD}=\dfrac{OD}{OK}$, $\widehat{O}$ chung $\Rightarrow\Delta\,OHD\backsim\Delta\,ODK$	0,25
	$\Rightarrow\widehat{ODK}=\widehat{OHD}=90^0\Rightarrow$ *KD* là tiếp tuyến của (*O*)	0,25
	c. Tứ giác *BCOH* nội tiếp $\Rightarrow\widehat{HBK}=\widehat{HOC}$, $\widehat{BHK}=\widehat{BCO}$, theo ý b có $\widehat{BCO}=\widehat{OHC}\Rightarrow\widehat{BHK}=\widehat{OHC}$.	0,25
	$\Delta\,OHC$ và $\Delta\,BHK$ có $\widehat{HBK}=\widehat{HOC};\widehat{BHK}=\widehat{OHC}\Rightarrow\Delta\,BHK\backsim\Delta\,OHC\Rightarrow$ $\dfrac{HO}{HB}=\dfrac{HC}{HK}\Rightarrow HB.HC=HO.HK$	0,25
	$\Delta\,ODK$ vuông tại *D*, đường cao $DH\Rightarrow HO.HK=HD^2$, lại có $OH\perp DE\Rightarrow HD=HE\Rightarrow HB.HC=HE^2\Rightarrow\dfrac{HE}{HC}=\dfrac{HB}{HE}$	0,25
	$\widehat{BHK}=\widehat{OHC}$, $\widehat{KHE}=\widehat{OHE}=90^0\Rightarrow\widehat{BHE}=\widehat{CHE}$ $\Delta\,BHE$ và $\Delta\,EHC$ có $\dfrac{HE}{HC}=\dfrac{HB}{HE}$ và $\widehat{BHE}=\widehat{CHE}\Rightarrow\Delta\,BHE\backsim\Delta\,EHC\Rightarrow$ $\widehat{HBE}=\widehat{HEC}$	0,25

	Lại có $\widehat{DEC}=\widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$) $\Rightarrow\ \widehat{DBC}=\widehat{HBE}$.	0,25
5 (1,0 đ)	$\dfrac{ab(a+b)}{ab+2}=(a+b)-\dfrac{2(a+b)}{ab+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{2(a+b)}{ab+2}\in\mathbb{Z}$	0,25
	$a\geq 1,\ b\geq 1\Rightarrow(a-1)(b-1)\geq 0\Leftrightarrow a+b\leq ab+1<ab+2\ \Rightarrow\dfrac{2(a+b)}{ab+2}<2$. $\dfrac{2(a+b)}{ab+2}>0$, kết hợp với $\dfrac{2(a+b)}{ab+2}\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\dfrac{2(a+b)}{ab+2}=1$	0,25
	$\Leftrightarrow 2\text{a}+2b=ab+2\Leftrightarrow(a-2)(b-2)=2$.	0,25
	Kết hợp đk a,b nguyên $\Rightarrow\begin{cases}a-2=1\\b-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a-2=2\\a-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$. KL: Các cặp số cần tìm là $(3;4)$ và $(4;3)$.	0,25

Hình vẽ cho câu 4



<u>Những chú ý khi chấm thi:</u>

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
2. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
3. Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm toàn bài đã chấm, **không làm tròn**.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020-2021.
Môn thi: Toán (chung) – Đề 1
Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên tự nhiên
Thời gian làm bài: 120 phút.
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1.(2,0 điểm)

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt.

3) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, biết độ dài cạnh của tam giác là $\sqrt{3}$ cm.

4) Cho hình nón có thể tích $V=4\pi$ cm^3, biết bán kính đáy $R=2$ cm. Tính chiều caocủahình nón đó.

Câu 2.(1,5 điểm) Cho biểu thức $P=\dfrac{x}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}$ (với $x\ge 0; x\ne 1$).

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Chứng minh $P>\dfrac{2}{3}$ với mọi $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

Câu 3.(2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2-(m+1)x+2m-2=0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1$.

2) Giải phương trình $x^3-3x^2-3x+2\sqrt{(x+1)^3}=0$.

Câu 4.(3,0 điểm)Từđiểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB,AC đến đường tròn (B,C là cáctiếp điểm). Đoạn thẳng AO cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại M và I.Gọi D là điểm thuộc cung lớn BC của đường tròn (O) (với $DB<DC$).

1) Chứng minh rằng $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2) Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng DB,DC. Chứng minh DM vuông góc với EF.

3) Gọi K là giao điểm thứ hai của tia DM với đường tròn (O). Chứng minh KI là tia phân giác của $\widehat{AKM}$.

Câu 5.(1,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+1)+3x+1=x^2\sqrt{1-y} \\ x^2+9=6x\sqrt{1-y}-\sqrt{x-1}. \end{cases}$

2) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ac+a^2}$.

--------HẾT---------

Họ và tên thí sinh:...Họ tên, chữ ký GT 1:..

Số báo danh:...Họ tên, chữ ký GT 2:...

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Năm học: 2020 - 2021

Môn thi: Toán chung – Đề 1

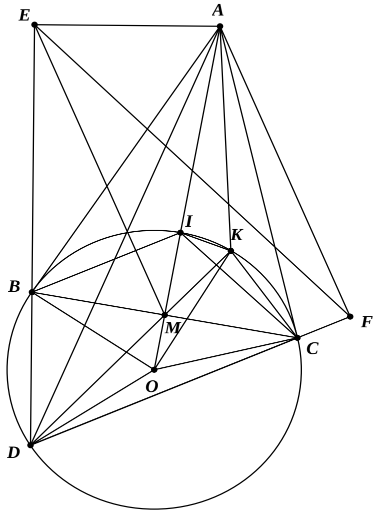
Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên tự nhiên

(Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 1	1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$. 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt. 3) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, biết độ dài cạnh của tam giác là $\sqrt{3}$ cm. 4) Cho hình nón có thể tích $V=4\pi$ cm^3, biết bán kính đáy $R=2$ cm. Tính chiều cao củahình nón đó.	**(2,0đ)**
1)	Điều kiện xác định $x^2-6x+9>0 \Leftrightarrow (x-3)^2>0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow x\neq 3$. KL: Vậy ĐK xác định của biểu thức là: $x\neq 3$.	**0,25**
2)	Đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2=x+3-m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-x-3+m=0$ có hai nghiệm phân biệt	**0,25**
	$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 13-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{13}{4}$.	**0,25**
3)	Gọi M, G lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $AM=AB.\sin 60^o=\dfrac{3}{2}$ cm.	**0,25**
	Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $R=GA=\dfrac{2}{3}AM \Rightarrow R=1$cm.	**0,25**
4)	Gọi h là chiều cao của hình nón ta có thể tích $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h$	**0,25**
	$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\pi R^2h=4\pi \Rightarrow h=3$ cm.	**0,25**
Câu 2	Cho biểu thức $P=\dfrac{x}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}$ (với $x\geq 0; x\neq 1$). 1) Rút gọn biểu thức P. 2) Chứng minh $P>\dfrac{2}{3}$ với mọi $x\geq 0$ và $x\neq 1$.	**1,5**

1)	Với điều kiện $x \ge 0; x \ne 1$ ta có: $P = \frac{x}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$	**0,25**
	$= \frac{x}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ $= \frac{x\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(x+\sqrt{x}+1\right)-x-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ $= \frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$	**0,25**
	$= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$	**0,25**
	$= \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}.$	**0,25**
2)	Xét hiệu $P-\frac{2}{3} = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P-\frac{2}{3} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$	**0,25**
	$\Leftrightarrow P-\frac{2}{3} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$ Với điều kiện $x \ge 0; x \ne 1$ ta có $\begin{cases} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 > 0 \\ 3\left(x+\sqrt{x}+1\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow P-\frac{2}{3} > 0 \Leftrightarrow P > \frac{2}{3}.$	**0,25**
Câu 3	1) Cho phương trình $x^2-\left(m+1\right)x+2m-2=0$ (với m là tham số). a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì phương trình luôn có nghiệm. b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1.$ 2) Giải phương trình $x^3-3x^2-3x+2\sqrt{\left(x+1\right)^3}=0.$	**2,5**
1.a)	Ta có $\Delta = m^2-6m+9$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \Delta = \left(m-3\right)^2 \Rightarrow \Delta \ge 0$ với mọi m. Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.	**0,25**

1.b)	Ta có $x^2-(m+1)x+2m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=m-1. \end{array}\right.$	**0,25**
	Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} m-1>0 \\ m-1\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\neq 3 \end{cases}$ (1)	**0.25**
	TH1: $\left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=m-1 \end{array}\right.$ khi đó $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1 \Leftrightarrow 2-\sqrt{m+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{m+1}=1 \Leftrightarrow m=0$ không thỏa mãn (1).	**0,25**
	TH2: $\left[\begin{array}{l} x_1=m-1 \\ x_2=2 \end{array}\right.$ khi đó $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{m+1}-2=1 \Leftrightarrow \sqrt{m+1}=3 \Leftrightarrow m=8$ thỏa mãn (1). Vậy $m=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	**0,25**
2)	Điều kiện $(x-1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.	**0,25**
	PT $\Leftrightarrow x^3-3x(x+1)+2\sqrt{(x+1)^3}=0$. Đặt $y=\sqrt{x+1}$ (điều kiện $y\geq 0$) ta được phương trình $x^3-3xy^2+2y^3=0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2(x+2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-2y. \end{array}\right.$	**0,25**
	Với $x=y$ ta được $x=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãnđiều kiện).	**0,25**
	Với $x=-2y$ ta được $x=-2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2}$ (thỏa mãnĐK). Vậy phương trìnhđã cho có hai nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x=2-2\sqrt{2}$.	**0,25**
Câu 4	Từđiểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là cáctiếp điểm). Đoạn thẳng AO cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại M, I. Gọi D là điểm thuộc cung lớn BC của đường tròn (O) (với $DB<DC$). 1) Chứng minh rằng $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. 2) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng DB, DC. Chứng minh DM vuông góc với EF. 3) Gọi K là giao điểm thứ hai của tia DM với đường tròn (O).Chứng minh rằng KI là tia phân giác của $\widehat{AKM}$.	**3,0 đ**

		
1)	Ta có *AB* và *AC* là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ nên $\widehat{ABO}=90^{\text{o}}$ và $\widehat{ACO}=90^{\text{o}}$.	**0,25**
	Suy ra $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^{\text{o}}$, suy ra tứ giác *ABOC* nội tiếp.	**0,25**
	Ta có $\widehat{ACI}=\widehat{CBI}$ (Mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có *AO* là trung trực của *BC*, suy ra tam giác *IBC* cân tại *I*, suy ra $\widehat{ICB}=\widehat{IBC}$. Suy ra $\widehat{ACI}=\widehat{BCI}$, suy ra *CI* là phân giác của góc *ACB*.	**0,25**
	Chứng minh tương tự ta có *BI* là phân giác của góc *ABC*, suy ra *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.	**0,25**
2)	Ta có $\widehat{AEB}+\widehat{AMB}=180^{\text{o}}$, suy ra tứ giác *AEBM*nội tiếp, suy ra $\widehat{BEM}=\widehat{BAM}$.	**0,25**
	Trong đường tròn $\left(O\right)$ ta có $\widehat{BDC}=\widehat{ABC}$ (mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).	**0,25**
	Tam giác *AMB* vuông tại *M* nên $\widehat{ABM}+\widehat{BAM}=90^{\text{o}}$, suy ra $\widehat{DEM}+\widehat{EDC}=90^{\text{o}}$. Suy ra *EM* vuông góc với *DC*.	**0,25**
	Chứng minh tương tự ta có *FM* vuông góc với *DB*. Suy ra *M* là trực tâm của tam giác *DEF*, suy ra *DM* vuông góc với *EF*.	**0,25**
3)	Xét tam giác *MKC* và *MBD* có $\widehat{MKC}=\widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn 1cung) và $\widehat{KMC}=\widehat{BMD}$, suy ra hai tam giác *MKC* và *MBD* đồng dạng. Suy ra $\dfrac{MK}{MB}=\dfrac{MC}{MD}$ hay $MK.MD=MB.MC$.	**0,25**
	Chứng minh tương tự ta có $MB.MC=MA.MO$. Suy ra $MK.MD=MA.MO$ hay $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MK}{MO}$.	**0,25**

	Xét hai tam giác AMK và DMO có $\widehat{AMK}=\widehat{DMO}$ và $\frac{MA}{MD}=\frac{MK}{MO}$ Suy ra hai tam giác AMK và DMO đồng dạng, suy ra $\widehat{AKM}=\widehat{DOM}$ hay $\widehat{AKM}=\widehat{DOI}$.	
	Ta có $\widehat{DCI}=\frac{1}{2}\widehat{DOI}$ (mối liên hệ giữa góc có đỉnh ở tâm và góc nội tiếp). Suy ra $\widehat{DCI}=\frac{1}{2}\widehat{AKM}$.	**0,25**
	Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{DCI}=\widehat{IKD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) Suy ra $\widehat{IKM}=\frac{1}{2}\widehat{AKM}$, hay KI là phân giác của góc AKM.	**0,25**
Câu 5	1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2\left(y+1\right)+3x+1=x^2\sqrt{1-y}\ \ (1) \\ x^2+9=6x\sqrt{1-y}-\sqrt{x-1}.\quad (2) \end{cases}$ 2) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ac+a^2}$.	**1,0**
1	ĐK: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\le 1 \end{cases}$. Đặt $t=x\sqrt{1-y}$ ĐK: $t\ge 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2+xt-2x^2-3x-1=0\Leftrightarrow\left(t-x-1\right)\left(t+2x+1\right)=0$ $\Leftrightarrow t=x+1$ (vì $t+2x+1>0\,\forall t\ge 0;x\ge 1$) $\Rightarrow x\sqrt{1-y}=x+1$.	**0,25**
	Thay vào phương trình (2) ta được: $x^2+9=6\left(x+1\right)-\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x^2-6x+3+\sqrt{x-1}=0$ $\Leftrightarrow x^2-6x+5+\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-5\right)+\frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}=0$ $\Leftrightarrow\left(x-5\right)\left(x-1+\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn) (vì $x-1+\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}>0\ \forall x\ge 1$) $\Rightarrow y=-\frac{11}{25}$ (thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(5;-\frac{11}{25}\right)$.	**0,25**
2	Ta có $a^2+b^2\ge 2ab$ $\Rightarrow 4a^2+4ab+4b^2=\left(a^2+b^2\right)+3a^2+4ab+3b^2\ge 3a^2+6ab+3b^2$ $\Rightarrow 4\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 3\left(a+b\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{a^2+ab+b^2}\ge\sqrt{3}\left(a+b\right)$. Tương tự: $2\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge\sqrt{3}\left(b+c\right)$; $2\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge\sqrt{3}\left(c+a\right)\Rightarrow P\ge\sqrt{3}\left(a+b+c\right)$.	**0,25**

	Chứng minh: $(x+y+z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ \forall x;y;z$ $\Leftrightarrow 2xy+2xz+2yz \le 2x^2+2y^2+2z^2$ $\Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ (luôn đúng). Áp dụng ta có: $\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\right)^2 \le 3(a+b+c+3) \Rightarrow a+b+c \ge 9 \Rightarrow P \ge 9\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=3$. Vậy GTNN của biểu thức là $P=9\sqrt{3}$.	**0,25**

Lưu ý:

\+ Các cách giải khác đáp án nếu đúng, phù hợp với chương trình THCS, ban giám khảo thống nhất cho điểm thành phần tương ứng.

\+ Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu không làm tròn.

__________HẾT__________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC2020-2021.
Môn thi: Toán (chung) – Đề 2
Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên xã hội

Thời gian làm bài: 120 phút.
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1.(2,0 điểm)

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt.

3) Cho tam giác ABC đều, cạnh $AB=\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

4) Cho hìnhnón có thể tích $V=4\pi$ cm^3, biết bán kính đáy $R=2$ cm. Tính chiều cao của hình nón đó.

Câu 2.(1,5 điểm) Cho biểu thức $P=\left(\sqrt{x}-\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-4}{1-x}\right)$ (với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$).

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm x để $P=2$.

Câu 3.(2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2-2m-3=0$ (với m là tham số).

a) Tìm giá trị của tham số m biết $x=2$ là một nghiệm của phương trình.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1-x_2=8$.

2) Giải hệphương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{y-2}=4\\[2mm] \dfrac{3x}{\sqrt{x+1}+1}-2\sqrt{y-2}=-3.\end{cases}$

Câu 4.(3,0 điểm)Từđiểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B,C là cáctiếp điểm). Đoạn thẳng AO cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại M và I.

1) Chứng minh rằng $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2) Gọi D làđiểm thuộc cung lớn BC của đường tròn (O) (với $DB<DC$) và K là giao điểm thứ hai củatia DM với đường tròn (O). Chứng minh rằng $MD.MK=MA.MO$.

3) Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng DB, DC. Chứng minh AF song song với ME.

Câu 5.(1,0 điểm)

1) Giảiphương trình $(x^2+x)\sqrt{2x+3}=x^3+3x^2+x-2$.

2) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $2a+2b+2c+ab+bc+ca=24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

---------HẾT---------

Họ và tên thí sinh:..Họ tên, chữ ký GT 1:...

Số báo danh:..Họ tên, chữ ký GT 2:...

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

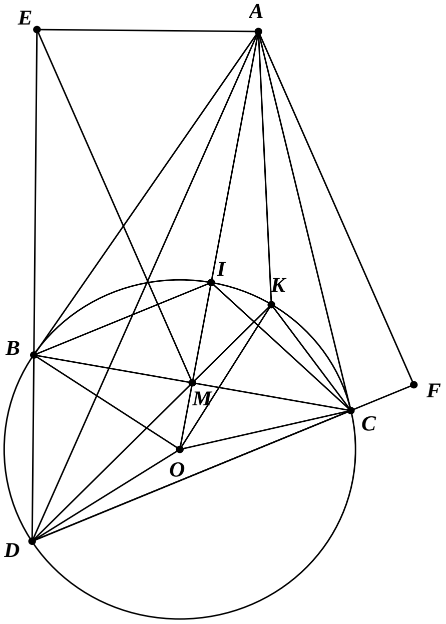
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Năm học: 2020 - 2021.
Môn thi: Toán (chung) – Đề 2
Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên xã hội
(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$. 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt. 3) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, biết độ dài cạnh của tam giác là $\sqrt{3}$ cm. 4) Cho hình nón có thể tích $V=4\pi$ cm^3, biết bán kính đáy $R=2$ cm. Tính chiều cao củahình nón đó.	**(2,0đ)**
1)	Điều kiện xác định $x-4>0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow x>4$ Vậy ĐK xác định của biểu thức là $x>4$.	**0,25**
2)	Đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2=x+3-m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-x-3+m=0$ có hai nghiệm phân biệt	**0,25**
	$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 13-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{4}$. Vậy với $m<\frac{13}{4}$ thì đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt.	**0,25**
3)	Gọi *M, G* lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $AM=AB.\sin 60^o=\frac{3}{2}$ cm.	**0,25**
	Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $R=AG=\frac{2}{3}AM \Rightarrow R=1$ cm.	**0,25**
4)	Gọi h là chiều cao của hình nón ta cóthể tích $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$	**0,25**
	$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2h=4\pi \Rightarrow h=3$ cm.	**0,25**
Câu 2	Cho biểu thức $P=\left(\sqrt{x}-\frac{x-2}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-4}{1-x}\right)$ (với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$). 1) Rút gọn biểu thức P. 2) Tìm x để $P=2$.	**1,5**
1)	Với điều kiện $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$ ta có: $P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-x+2}{\sqrt{x}+1}:\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}+\frac{\sqrt{x}-4}{x-1}\right)$	**0,25**

	$= \dfrac{x+\sqrt{x}-x+2}{\sqrt{x}+1} : \dfrac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x}-4}{x-1}$ $= \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}.\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-4}$	**0,25**
	$=\left(\sqrt{x}+2\right).\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$	**0,25**
	$=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}.$	**0,25**
2)	Ta có $P=2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=2\left(\sqrt{x}-2\right)$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (tm). Vậy $P=2$ khi $x=9$.	**0,25**
Câu 3	1) Cho phương trình $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-2m-3=0$ (với m là tham số). a) Tìm giá trị của tham số m biết $x=2$ là một nghiệm của phương trình. b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1-x_2=8$. 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{y-2}=4\\ \dfrac{3x}{\sqrt{x+1}+1}-2\sqrt{y-2}=-3.\end{cases}$	**2,5**
1.a)	Ta có $x=2$ là một nghiệm của phương trình khi và chỉ khi $4-4\left(m+1\right)+m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow m^2-6m-3=0.$	**0,25**
	Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}m=3+2\sqrt{3}\\ m=3-2\sqrt{3}\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l}m=3+2\sqrt{3}\\ m=3-2\sqrt{3}\end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	**0,25**
1.b)	Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m+4>0 \Leftrightarrow m>-1.$ (1)	**0,25**
	Áp dụng định lý Vi ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\left(m+1\right)\\ x_1x_2=m^2-2m-3.\end{cases}$	**0,25**
	Ta có $x_1^2+x_2^2-x_1-x_2=8 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)=8$ $\Rightarrow 4\left(m+1\right)^2-2\left(m^2-2m-3\right)-2\left(m+1\right)=8 \Leftrightarrow m^2+5m=0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-5.\end{array}\right.$ Kết hợp với điều kiện (1) ta được $m=0$.Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	**0,25**
2)	Điều kiện $\begin{cases}x+1\ge 0\\ y-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ y\ge 2\end{cases}$.HPT $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}+1}+2\sqrt{y-2}=8\\ \dfrac{3x}{\sqrt{x+1}+1}-2\sqrt{y-2}=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}=1\ (1)\\ \sqrt{y-2}=3.\quad (2)\end{cases}$	**0,5**

	Giải phương trình $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x=0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3(tm).$	**0,25**
	Giải phương trình (2): $\sqrt{y-2}=3\Leftrightarrow y-2=9\Leftrightarrow y=11$ (thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(3;11)$**.**	**0,25**
Câu 4	Từđiểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B,C là cáctiếp điểm). Đoạn thẳng AO cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại M và I. 1) Chứng minh rằng $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. 2) Gọi D làđiểm thuộc cung lớn BC của đường tròn (O) (với $DB < DC$) và K là giao điểm thứ hai của tia DM với đường tròn (O). Chứng minh rằng $MD.MK = MA.MO.$ 3) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng DB, DC. Chứng minh AF song song với ME.	**3,0**
		
1)	Ta có AB và AC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABO}=90^\circ$ và $\widehat{ACO}=90^\circ$.	**0,25**
	Suy ra $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^\circ$, suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp.	**0,25**
	Ta có $\widehat{ACI}=\widehat{CBI}$ (Mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có *AO* là trung trực của *BC*, suy ra tam giác *IBC* cân tại *I*, suy ra $\widehat{ICB}=\widehat{IBC}$. Suy ra $\widehat{ACI}=\widehat{BCI}$, suy ra *CI* là phân giác của góc *ACB*.	**0,25**
	Chứng minh tương tự ta có *BI* là phân giác của góc *ABC*, suy ra *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.	**0,25**
2)	Xét tam giác *MKC* và *MBD* có $\widehat{MKC}=\widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn 1cung) Và $\widehat{KMC}=\widehat{BMD}$, suy ra hai tam giác *MKC* và *MBD* đồng dạng	**0,25**
	Suy ra $\dfrac{MK}{MB}=\dfrac{MC}{MD}$ hay $MK.MD = MB.MC.$	**0,25**

	Chứng minh tương tự ta có $MB.MC = MA.MO.$	**0,25**
	Suy ra $MK.MD = MA.MO$, ta có điều phải chứng minh.	**0,25**
3)	Ta có $\widehat{AEB} + \widehat{AMB} = 180^o$, suy ra tứ giác $AEBM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BEM} = \widehat{BAM}$.	**0,25**
	Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{BDC} = \widehat{EBC}$ (mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).	**0,25**
	Tam giác AMB vuông tại M nên $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 90^o$, suy ra $\widehat{DEM} + \widehat{EDC} = 90^o$. Suy ra EM vuông góc với DC.	**0,25**
	Mà AF vuông góc với DC nên $EM // AF$. Ta có điều phải chứng minh.	**0,25**
Câu 5	1) Giải phương trình $\left(x^2+x\right)\sqrt{2x+3} = x^3+3x^2+x-2$. 2) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $2a+2b+2c+ab+bc+ca=24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.	**1,0**
1	ĐK: $2x+3\ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{-3}{2}$. PT $\Leftrightarrow x^3+3x^2+x-2-\left(x^2+x\right)\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)(x+1)-\left(x^2+x\right)\sqrt{2x+3}+x^2-2=0$ $\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)+(x+1)^2-(2x+3)=0$ $\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)\left(x^2+2x+1+\sqrt{2x+3}\right)=0 \Leftrightarrow x+1-\sqrt{2x+3}=0$ (Vì $x^2+2x+1+\sqrt{2x+3}=(x+1)^2+\sqrt{2x+3}>0\ \ \forall x\ge\frac{-3}{2}$)	**0,25**
	$\Leftrightarrow x+1=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2+2x+1=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ (t/m)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\sqrt{2}$.	**0,25**
2	Ta có các bất đẳng thức $a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge 2bc, c^2+a^2\ge 2ca$ $a^2+4\ge 4a, b^2+4\ge 2b, c^2+4\ge 4c.$	**0,25**
	Cộng từng vế ta được $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+12\ge 2\left(2a+2b+2c+ab+bc+ca\right)=48$ Suy ra $P\ge 12$. Với $a=b=c=2$ thì $P=12$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 12.	**0,25**

Lưu ý:

+ Các cách giải khác đáp án nếu đúng, phù hợp với chương trình THCS, ban giám khảo thống nhất cho điểm thành phần tương ứng.

+ Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu không làm tròn.

__________HẾT__________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020-2021.
Môn thi: TOÁN **(chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút.
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho các số thực x, y, z khác 0. Đặt $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ và $c = xy + \frac{1}{xy}$.

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$.

b) Cho các số thực a, b khác -2 thỏa mãn $(2a+1)(2b+1) = 9$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b}\cdot$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại M, N và có tâm I thuộc cạnh BC. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh các điểm A, M, H, I, N cùng thuộc một đường tròn và HA là tia phân giác của góc MHN.

b) Đường thẳng đi qua I và vuông góc với BC cắt MN tại K. Chứng minh AK đi qua trung điểm D của BC.

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh $\widehat{BAS} = \widehat{CAD}$.

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^2 = xy^2 + 1$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a}\cdot$ Chứng minh ab là lập phương của một số nguyên dương.

Câu 5 (1,5 điểm).

a) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 \le \frac{1}{8} + a^4 + b^4 + c^4$.

b) Ban đầu có 2020 viên sỏi để trong 1 chiếc túi. Có thể thực hiện công việc như sau:

Bước 1: Bỏ đi 1 viên sỏi và chia túi này thành 2 túi mới.

Bước 2: Chọn 1 trong 2 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 3 túi.

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 4 túi.

Tiếp tục quá trình trên. Hỏi sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi hay không?

--------- HẾT ---------

Họ và tên thí sinh:…………………………….. Họ tên, chữ ký GT 1:……………………………….

Số báo danh:…………………………………….. Họ tên, chữ ký GT 2:……………………...……..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
ĐỀTHI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
Nămhọc 2020– 2021.
Mônthi: **TOÁN (chuyên)**

(Hướngdẫnchấmgồm: 05trang)

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho cácsốthực x, y, z khác 0. Đặt $a = x + \frac{1}{x},\ b = y + \frac{1}{y}$ và $c = xy + \frac{1}{xy}\cdot$

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$

b) Cho cácsốthực a, b khác -2 thỏamãn $(2a+1)(2b+1) = 9.$

Tínhgiátrịcủabiểuthức $A = \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b}\cdot$

Ý	Nội dung	Điểm
a (1,0 điểm)	Ta có $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,\ b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$ và $c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2.$	0,25
	Ta có $ab = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$	0,25
	Suy ra $abc = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$	0,25
	Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$	0,25
b (1,0 điểm)	Từ điều kiện bài toán rút được $a = \frac{9}{2(2b+1)} - \frac{1}{2}$ (do $2b+1 \neq 0$).	0,25
	Suy ra $\frac{1}{2+a} = \frac{2b+1}{3(b+2)}.$	0,25
	Suyra $A = \frac{2b+1}{3(b+2)} + \frac{1}{b+2} = \frac{2b+1+3}{3(b+2)} = \frac{2}{3}.$	0,5

Câu 2*(2,0 điểm)*

a) Giảiphươngtrình $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}.$

b) Giảihệ phươngtrình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Ý	Nội dung	Điểm
a (1,0 điểm)	Điềukiện $x \geq -3.$ Đặt $\sqrt{x+3} = t, (t \geq 0)$, phươngtrìnhtrởthành $2x^2 + t^2 - 3xt = 0$.	0,25
	Phươngtrìnhtươngđương $(x-t)(2x-t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ 2x = t \end{array}\right.$	0,25
	Với $x = t$ ta được $x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25

	Với $2x=t$ ta được $2x=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{3}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1,\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.	0,25
b (1,0 điểm)	$\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x-y)^2}{2} & (1)\\(x+y)(x+2y)+3x+2y=4 & (2)\end{cases}$ Điều kiện xác định $x,y\ge-\frac{1}{2}$. Phương trình (2) tương đương $(x+y-1)(x+2y+4)=0$ Với điều kiện xác định ta có $x+2y+4\ge-\frac{1}{2}-1+4>0$ nên dẫn đến $x+y=1$.	0,25
	Đặt $a=\sqrt{2x+1}\ge 0$ và $b=\sqrt{2y+1}\ge 0$, kếthợp (1) và $x+y=1$ ta cóhệphươngtrình $\begin{cases}a+b=\frac{1}{8}\left(a^2-b^2\right)^2\\a^2+b^2=4\end{cases}$ Trườnghợp 1: $\begin{cases}a+b=0\\a^2+b^2=4\end{cases}$, hệvônghiệm.	0,25
	Trườnghợp 2: $\begin{cases}(a-b)^2(a+b)=8\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(4-2ab)=8\\(a+b)^2-2ab=4\end{cases}$ Đặt $\begin{cases}S=a+b\\P=ab\end{cases}$, hệtrởthành $\begin{cases}S(4-P)=8\\S^2-2P=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\frac{S^2-4}{2}\\S\left(4-\frac{S^2-4}{2}\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\frac{S^2-4}{2}\\S\in\left\{2,-1\pm\sqrt{5}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=0\\S=2\end{cases}$	0,25
	Suy ra $\begin{cases}a+b=2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}\end{array}\right.$, từđósuyratậpnghiệm$(x,y)$củahệlà $\left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$.	0,25

Câu 3 ***(3,0 điểm)***

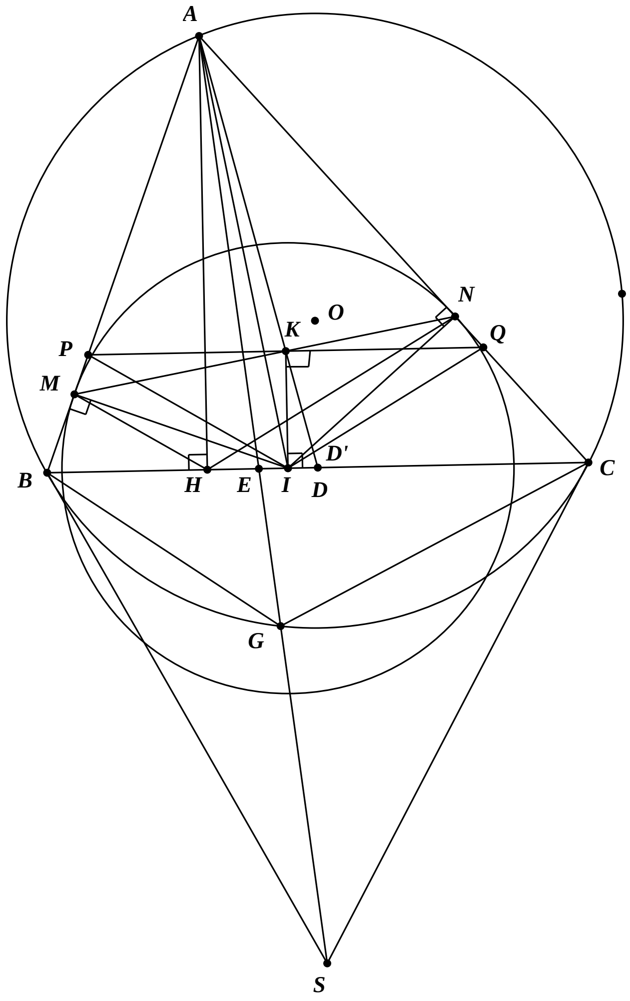
Cho tam giácnhọn ABC có $AB < AC$ nộitiếpđườngtròn $\left(O\right)$. Mộtđườngtròntiếpxúcvớicáccạnh AB, AC tại M, N vàcótâm I thuộccạnh BC. Kẻđườngcao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh cácđiểm A, M, H, I, N cùngthuộcmộtđườngtrònvà HA làtiaphângiáccủagóc MHN.

b) Đườngthẳngđi qua I vàvuônggócvới BC cắt MN tại K. Chứng minh AK đi qua trungđiểm D của BC.

c) Tiếptuyếncủađườngtròn $\left(O\right)$ tại B và C cắtnhautại S. Chứng minh $\widehat{BAS} = \widehat{CAD}$.

Hình vẽ:



Ý	Nội dung	Điểm
a (1,0 điểm)	Do AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn $\left(I\right)$ nên $\widehat{AMI} = \widehat{ANI} = 90^{\text{o}}$, suy ra các điểm M, N thuộc đường tròn đường kính AI.	0,25
	Ta có AH là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{AHI} = 90^{\text{o}}$, suy ra điểm H thuộc đường tròn đường kính AI. Suy ra cácđiểm A, M, H, I, N cùngthuộcđườngtrònđườngkínhAI.	0,25
	Do tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên $\widehat{AHM} = \widehat{ANM}$ và $\widehat{AHN} = \widehat{AMN}$.	0,25
	Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau, suy ra $\triangle AMN$ cân tại A, suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$, suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{AHN}$, hay HA làtiaphângiáccủagóc MHN.	0,25
b (1,0	Kẻ đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt AB và AC tại P và Q. Ta có $\widehat{IKP} + \widehat{IMP} = 180^{\text{o}}$, suy ra tứ giác $IKPM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KIP} = \widehat{KMP}$.	0,25

điểm)	Chứng minh tươngtự ta có $\widehat{KIQ}=\widehat{KNA}$. Suyra $\widehat{KIP}=\widehat{KIQ}$.	0,25
	Xét tam giác IPQ có IK vừa là đường cao, vừa là phân giác nên nó là tam giác cân, suy ra IK là đường trung tuyến, hay K là trung điểm của PQ.	0,25
	Dựng$D$làgiaođiểmcủaAKvàBC. Do $PQ//BC$, ápdụngđịnhlýTalet ta có $\frac{KP}{BD}=\frac{AK}{AD}=\frac{KQ}{DC}$, suyra $DB=DC$. Suyra$D$làtrungđiểmcủaBC.	0,25
c (1,0 điểm)	Gọi E là giao điểm của AS và BC, G là giao điểm thứ 2 của AS và (O). Trên cạnh BC lấy điểm D' khác E sao cho $\widehat{BAE}=\widehat{CAD'}$, cần chứng minh D' là trung điểm của BC. Ta có $\widehat{AGB}=\widehat{ACD'}$ và $\widehat{BAG}=\widehat{CAD'}$ nên $\triangle AGB$ đồng dạng $\triangle ACD'$ Suy ra $\frac{GB}{CD'}=\frac{AG}{AC}$ $\quad(1)$	0,25
	Ta có $\widehat{AGC}=\widehat{ABD'}$ và $\widehat{CAG}=\widehat{BAD'}$ nên $\triangle AGC$ đồng dạng $\triangle ABD'$ Suy ra $\frac{GC}{BD'}=\frac{AG}{AB}$ $\quad(2)$	0,25
	Ta có $\widehat{SBG}=\widehat{SAB}$ nên $\triangle SBG$ đồng dạng $\triangle SAB$, suy ra $\frac{SB}{SA}=\frac{BG}{AB}$. Chứng minh tương tự ta được $\frac{SC}{SA}=\frac{CG}{AC}$. Suy ra $\frac{CG}{CA}=\frac{BG}{BA}$(3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $CD'=BD'$hay D'là trung điểm của BC. Ta có điều phải chứng minh.	0,25

Câu 4 *(1,5 điểm)*

a) Tìmcácsốnguyên x,y thỏamãn $x^3+y^2=xy^2+1$.

b) Cho cácsốnguyêndương a,b,c thỏamãn $c+\frac{1}{b}=a+\frac{b}{a}\cdot$ Chứng minh ab làlậpphươngcủamộtsốnguyêndương.

<table>
<tr><th>Ý</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>a
(0,75
điểm)</td><td>Ta có $x^3+y^2=xy^2+1\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)-y^2\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x+1-y^2\right)=0$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\y^2=x^2+x+1\end{array}\right.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Với $x=1$, khi đó phương trình có nghiệm $(1;y)$ với y là số nguyên.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Với $y^2=x^2+x+1\Leftrightarrow(2y)^2-(2x+1)^2=3\Leftrightarrow(2y-2x-1)(2y+2x+1)=3$
Lậpbảngxétcáctrườnghợp
<table>
<tr><td>$2y-2x-1$</td><td>1</td><td>-1</td><td>3</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$2y+2x+1$</td><td>3</td><td>-3</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>-1</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>
Vậy tập các giá trị $(x;y)$ thỏa mãn là $\left\{(0;1),(0;-1),(-1;-1),(-1;1),(1;y),y\in\mathbb{Z}\right\}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>b
(0,75</td><td>Ta có $c+\frac{1}{b}=a+\frac{b}{a}\Leftrightarrow abc+a=a^2b+b^2$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

điểm)	Suy ra a chia hết cho b, đặt $a=bk, k\in\mathbb{N}^*$, thay vào điều kiện ta được $b^2kc+bk=b^3k^2+b^2 \Leftrightarrow bkc+k=b^2k^2+b$	0,25
	Suy ra b chia hết cho k và k chia hết cho b, suy ra $b=k$, suy ra $ab=b^3$, ta có điều phải chứng minh.	0,25

Câu 5 ***(1,5 điểm)***

a) Cho cácsốthựckhôngâm a,b,c thỏamãnđiềukiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\le\frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4.$$

b) Ban đầucó 2020 viênsỏiđểtrong 1 chiếctúi. Cóthểthựchiệncôngviệcnhưsau:

Bước 1: Bỏđi 1 viênsỏivà chia túinàythành 2 túimới.

Bước 2: Chọn 1 trong 2 túinàysaochotúiđócóítnhất 3 viênsỏi, bỏđi 1 viêntừtúinàyvà chia túiđóthành 2 túimới, khiđócó 3 túi.

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túinàysaochotúiđócóítnhất 3 viênsỏi, bỏđi 1 viêntừtúinàyvà chia túiđóthành 2 túimới, khiđócó 4 túi.

Tiếptụcquátrìnhtrên.Hỏisaumộtsốbướccóthểtạoratrườnghợpmàmỗitúicóđúng 2 viênsỏi hay không?

Ý	**Nội dung**	**Điểm**
a (0,75 điểm)	Xét hiệu $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=a^3\left(1-a\right)+b^3\left(1-b\right)+c^3\left(1-c\right)$ $=a^3\left(b+c\right)+b^3\left(c+a\right)+c^3\left(a+b\right)=a^2\left(ab+ac\right)+b^2\left(bc+ba\right)+c^2\left(ca+cb\right)$	0,25
	Do a,b,c khôngâmnên bc,ca,ab khôngâm Suyra $a^2\left(ab+ac\right)+b^2\left(bc+ba\right)+c^2\left(ca+cb\right)$ $\le a^2\left(ab+ac+bc\right)+b^2\left(bc+ba+ca\right)+c^2\left(ca+cb+ab\right)$ $=\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$	0,25
	$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(2ab+2bc+2ca\right)\le\frac{1}{2}\frac{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)^2}{4}=\frac{1}{8}$ Suyrađiềuphảichứng minh.	0,25
b (0,75 điểm)	Sau mỗi bước, số sỏi giảm đi 1 và số túi tăng lên 1, suy ra tổng số sỏi và túi không thay đổi sau mỗi bước, tổng này là 2021.	0,25
	Giả sử sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi, khi đó tổng số sỏi và túi phải chia hết cho 3.	0,25
	Do 2021 không chia hếtcho 3 nênmâuthuẫn, suyragiảsửsai. Vậykhôngthểtạoratrườnghợpmàmỗitúicóđúng 2 viênsỏisaumộtsốbước.	0,25

Chú ý:

- *Nếuthísinhlàmđúngmàcáchgiảikhácvớiđápánvàphùhợpkiếnthứccủachươngtrình THCSthìtổchấmthốngnhấtchođiểmthànhphầnđảmbảotổngđiểmnhưhướngdẫnquyđịnh.*
- *Tổngđiểmtoànbàikhônglàmtròn.*

---------- HẾT ----------

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn thi: Toán *(dành cho thí sinh chuyên Toán, chuyên Tin)*

*Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. ***(2,0 điểm)***

a) Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$. Với giá trị nào của x thì biểu thức A xác định. Rút gọn A.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ x^4+y^2-2x^2-4y=5 \end{cases}$.

Câu 2. ***(2,5 điểm)***

a) Cho các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm $x^2+ax+1=0; x^2+bx+1=0; x^2+cx+1=0$.

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=(1+2a)(1+2bc)$.

Câu 3. ***(1,5 điểm)***

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(2n+7)(7n+1)$ luôn chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau; $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Câu 4. ***(3,0 điểm)***

1) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$, gọi I là trung điểm của đoạn OA. Vẽ tia Ix vuông góc với AB cắt nửa đường tròn (O) tại C. Lấy điểm E trên cung nhỏ BC $(E \neq B, E \neq C)$ nối AE cắt CI tại F.

a) Chứng minh rằng $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của hai tia BE và Ix. Giả sử F là trung điểm của IC. Chứng minh rằng hai tam giác AIF và KIB đồng dạng. Tính IK theo R.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng nhau.

Câu 5. ***(1,0 điểm)***

Một bảng kích thước $2n \times 2n$ ô vuông, n là số nguyên dương. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kỳ của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

- - - - - - Hết - - - - - -

Họ và tên thí sinh:...Số báo danh:...............

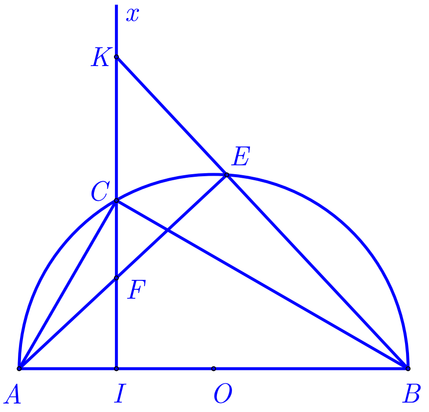
UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

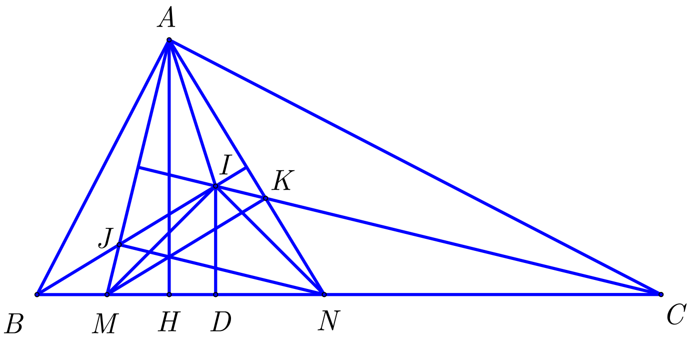
(Hướng dẫn có 04 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: **Toán** *(Dành cho thí sinh chuyên Toán)*

Câu	**Đáp án**	**Điểm**
1.a		**1,0**
	Ta có $x+4\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2\ge 0$ $x-4\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2\ge 0$; $\frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1=\left(\frac{4}{x}-1\right)^2\ge 0$. Vậy điều kiện để A xác định là $x>4$.	0,25
	Khi đó $A=\frac{\left\|\sqrt{x-4}+2\right\|+\left\|\sqrt{x-4}-2\right\|}{\left\|\frac{4-x}{x}\right\|}=\frac{\sqrt{x-4}+2+\left\|\sqrt{x-4}-2\right\|}{\frac{x-4}{x}}$.	0,25
	Nếu $\sqrt{x-4}\ge 2\Leftrightarrow x\ge 8$ thì $A=\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2\right)}{x-4}=\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$.	0,25
	Nếu $0<\sqrt{x-4}<2\Leftrightarrow 4<x<8$ thì $A=\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2-\sqrt{x-4}+2\right)}{x-4}=\frac{4x}{x-4}$.	0,25
1.b		**1,0**
	Hệ pt $\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-1)(y-2)+4(x^2-1)+4(y-2)=5\\(x^2-1)^2+(y-2)^2=10\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=x^2-1\\v=y-2\end{cases}$ Ta có hpt $\begin{cases}u^2+v^2=10\\uv+4(u+v)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=10\\uv+4(u+v)=5\end{cases}$	0,25
	Giải hệ ta được $\begin{cases}u+v=-10\\uv=45\end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc $\begin{cases}u+v=2\\uv=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3\\v=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=-1\\v=3\end{cases}$.	0,25
	+) $\begin{cases}u=3\\v=-1\end{cases}$ Tìm được 2 nghiệm $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(-2;1)$	0,25
	+) $\begin{cases}u=-1\\v=3\end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x;y)=(0;5)$ Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: $(2;1)$, $(-2;1)$, $(0;5)$.	0,25
2.a		**1,5**
	Ba phương trình trên lần lượt có: $\Delta_1=a^2-4,\ \Delta_2=b^2-4,\ \Delta_3=c^2-4$	0,5
	$\Rightarrow\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=a^2+b^2+c^2-12\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}-12=\frac{36}{3}-12=0$ (Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$).	0,5
	Suy ra $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3\ge 0$ Do đó có ít nhất một trong ba biệt thức $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ không âm.	0,5

	Vậy ít nhất một trong ba phương trình trên có nghiệm.	
2.b		**1,0**
	Áp dụng BĐT Côsi ta có $a^2+\frac{4}{9}\ge\frac{4}{3}a\Rightarrow 2a\le\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}$ và $2bc\le b^2+c^2$	0,25
	Suy ra $A\le\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)=\frac{3}{2}\left(a^2+\frac{10}{9}\right)\left(b^2+c^2+1\right)$	0,25
	Áp dụng BĐT Côsi ta có $\frac{3}{2}\left(a^2+\frac{10}{9}\right)\left(b^2+c^2+1\right)\le\frac{3}{2}\left(\frac{a^2+\frac{10}{9}+b^2+c^2+1}{2}\right)^2=\frac{98}{27}\Rightarrow \text{A}\le\frac{98}{27}$.	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=c\\ a^2+\frac{10}{9}=b^2+c^2+1\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=c=\frac{\sqrt{10}}{6}\end{cases}$. Vậy GTLN của biểu thức A là $\frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a=\frac{2}{3}$ và $b=c=\frac{\sqrt{10}}{6}$.	0,25
3.a		**1,0**
	Gọi $A=n\left(2n+7\right)\left(7n+1\right)$. Ta có trong hai số n và $7n+1$ phải có một số là số chẵn nên $n\left(2n+7\right)\left(7n+1\right)$ chia hết cho 2.	0,5
	Với $n\in\mathbb{N}$, ta có ba trường hợp sau: + $n=3k,\left(k\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow A=3k\left(6k+7\right)\left(21k+1\right)\vdots 3$ $\left(1\right)$ + $n=3k+1,\left(k\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow A=\left(3k+1\right)\left(6k+9\right)\left(21k+8\right)\vdots 3$ $\left(2\right)$ + $n=3k+2,k\in\mathbb{N}\Rightarrow A=\left(3k+2\right)\left(6k+11\right)\left(21k+15\right)\vdots 3$ $\left(3\right)$ Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra $A\vdots 3,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Vậy $A\vdots 6,\ \forall n\in\mathbb{N}$.	0,5
3.b		**0,5**
	Giả sử $\left(a;b\right)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán. Khi đó $\left(4a+1;4b-1\right)=1$ và $\left(16ab+1\right)\vdots\left(a+b\right)$ $\left(1\right)$. Ta có $\left(4a+1\right)\left(4b+1\right)=\left(16ab+1\right)+4\left(a+b\right)$ chia hết cho $a+b$ $\left(2\right)$. Ta có $4a+1+4b-1=4\left(a+b\right)\vdots\left(a+b\right)$. Nếu $4a+1;a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì $4b-1$ cũng chia hết cho p, điều này mâu thuẫn vì $\left(4a+1;4b-1\right)=1$. Do đó, $\left(4a+1;a+b\right)=1\Rightarrow\left(4b+1\right)\vdots\left(a+b\right)$. Nên từ $\left(1\right)$ suy ra $\left(4b+1\right)\vdots\left(a+b\right)$ $\left(3\right)$.	0,25
	Ngược lại, nếu $\left(a;b\right)$ là cặp số nguyên thỏa mãn $\left(3\right)$ thì từ $\left(2\right)$ ta có $\left(16ab+1\right)\vdots\left(a+b\right)$.	

	Ta chứng minh được $(4a+1;4b-1)=1$ vì nếu hai số $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì p là số nguyên tố lẻ.	
	Ta lại có $4a+1+4b-1=4(a+b)\Rightarrow(a+b)\vdots p$ suy ra $(4b+1)\vdots(a+b)\vdots p$ điều này mâu thuẫn với $4b+1-(4b-1)=2$ không chia hết cho p. Như vậy $(1)\Leftrightarrow(3)$. Ta lại có $4b+1$ lẻ và $4b+1<4(a+b)$ nên $(3)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4b+1=a+b\\4b+1=3(a+b)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3b+1\\b=3a-1\end{array}\right.$. Như vậy các cặp số nguyên thỏa mãn bài toán là $(a;b)\in\{(3c+1;c),(c;3c-1)\mid c\in\mathbb{N}^*\}$.	0,25
4.1.a		**1,0**
	 Vẽ đúng hình ý a)	0,25
	Ta có : +) $\widehat{AEB}=90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) +) $\widehat{BIF}=90^\circ$ (Do $Ix\perp AB$).	0,5
	Tứ giác $BEFI$ có $\widehat{AEB}+\widehat{BIF}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ Suy ra tứ giác $BEFI$ nội tiếp.	0,25
4.1.b		**1,0**
	Do tứ giác $BEFI$ nội tiếp nên $\widehat{AFI}=\widehat{KBI}$	0,25
	Xét ΔAIF và ΔKIB có: $\widehat{AFI}=\widehat{KBI}$ (chứng minh trên); $\widehat{AIF}=\widehat{KIB}=90^\circ$ Suy ra ΔAIF" ΔKIB.	0,25
	Xét ΔACB có $\widehat{ACB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Và $CI\perp AB$ (gt) Suy ra $CI^2=AI.IB=\frac{R}{2}.\frac{3R}{2}=\frac{3R^2}{4}\Rightarrow CI=\frac{R\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IF=\frac{CI}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{4}$.	0,25
	Do ΔAIF" ΔKIB nên $\frac{AI}{KI}=\frac{IF}{IB}\Rightarrow KI=\frac{AI.IB}{IF}=\frac{R}{2}.\frac{3R}{2}.\frac{4}{R\sqrt{3}}=R\sqrt{3}$.	0,25
4.2		**1,0**

<table>
<tr><td></td><td>
Gọi M, N là giao điểm của AJ, AI với BC, hạ $ID \perp BC$.
Ta có $\widehat{BAN}=90^\circ-\widehat{NAC}=90^\circ-\widehat{NAH}=\widehat{BNA}$ nên ΔABN cân tại B.
Tương tự ΔACM cân tại C.
Do đó, $IA = IM = IN$ nên D là trung điểm của MN.
Mà $MN = AB + AC - BC = 2r = 2ID$ nên ΔMIN vuông tại I.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì CK là trung trực của AM nên $\widehat{KMC}=\widehat{KAC}=\frac{1}{2}\widehat{HAC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=\widehat{IBC}$ nên $MK\,//\,BI$. Mà BI là trung trực của AN nên $MK \perp AN$.
Tương tự $NJ \perp AM$.
Do đó các điểm I, J, K nằm trên đường tròn đường kính MN có bán kính r (điều phải chứng minh).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều nhất trên các hàng đó.
<table>
<tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
</table>
<i>(hình minh họa khi $n = 3$)</i>
Ta chứng minh số ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n.
Giả sử số ô được đánh dấu còn lại lớn hơn hoặc bằng $n+1$.
Các hàng còn lại chưa chọn là n.
Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (trong n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Mà theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều nhất trên các hàng đó. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu.
Nếu vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n+\left(n+1\right)>3n$ trái giả thiết.
Vậy sau khi chọn n hàng (với cách chọn như trên) sẽ còn lại không quá n ô được đánh dấu. Vì thế có nhiều nhất là n cột chứa chúng. Do đó, sẽ không còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.
Suy ra điều phải chứng minh.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.

- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.

---------------Hết---------------