**ĐỀ ĐỀ XUẤT THI HSG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**

**MÔN TOÁN 10. NĂM HỌC 2022 - 2023**

**Thời gian : 180 phút**

**Câu 1** (*Đa thức)*

Cho tam thức bậc hai . Biết rằng phương trình  có bốn nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm có tổng bằng , chứng minh rằng .

**Câu 2** (*Bđt*) Giả sử  là các số thực không âm thỏa mãn  Chứng minh rằng 

**Câu 3** ( *hình học*).

Cho tam giác ABC nội tiếp (O)có đường cao AD,BE,CF. Gọi EF cắt BC

tại L. Giả sử BE,CF cắt AL tại I,J và X,Y là trung điểm BE,CF.

a) Chứng minh rằng X,Y,I,J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Giả sử ∠BAC=60°. Gọi O' là điểm đối xứng của O qua BC. Đường qua L vuông AO' cắt OD tại G. Chứng minh rằng AG chia đôi BC.

**Câu 4** ( *số học*) .

a) Cho  là tập hợp tất cả các số tự nhiên  khác  thỏa mãn tính chất " có đúng  ước số dương". Hãy tìm số  bé nhất thuộc tập .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  với ,  là các số nguyên dương.

**Câu 5** (*tổ hợp*)

Một giải đấu bóng đá có 20 đội bóng tham dự. Tại một thời điểm của giải đấu, người ta nhận thấy có 101 trận đấu đã được diễn ra và hai đội bất kì thi đấu với nhau không quá một trận. Chứng minh rằng, tại thời điểm đó, tồn tại 3 đội bóng đôi một đã thi đấu với nhau.

Giáo viên ra đề: Đào Thị Lê Dung – THPT Chuyên Thái Bình

SĐT: 0385.792.492.

..........................................................................Hết....................................................................

**HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ CHẤM**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hướng dẫn giải** | **Thang điểm** |
| **Câu 1.( 4 điểm)**  Cho tam thức bậc hai . Biết rằng phương trình  có bốn nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm có tổng bằng , chứng minh rằng . | **4 điểm** |
| Giả sử phương trình  có bốn nghiệm phân biệt  trong đó có hai nghiệm  thỏa mãn . Suy ra phương trình  phải có hai nghiệm phân biệt, gọi chúng là , theo định lý Viet ta có  .  Khi đó  là các nghiệm của các phương trình . Ta xét hai trường hợp sau:  *Trường hợp 1:*  là hai nghiệm của cùng một phương trình, chẳng hạn  hay . Áp dụng định lý Viet thì  hay .  Các phương trình  trở thành  và  Các phương trình này đều có hai nghiệm phân biệt nên  , suy ra . Lại do  nên ta có . | **2 điểm** |
| *Trường hợp 2:*  lần lượt là nghiệm của hai phương trình . Ta có  và . Cộng hai đẳng thức này ta có  (vì  và ).  Áp dụng BĐT Bunhiacôpxky thì  ⇒ . | **2 điểm** |
| **Câu 3** (4 điểm). |  |
| Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có đường cao AD, BE, CF. Gọi EF cắt BCtại L. Giả sử BE, CF cắt AL tại I, J và X,Y là trung điểm BE, CF.  a) Chứng minh rằng X,Y, I, J cùng nằm trên một đường tròn.  b) Giả sử ∠BAC=60°. Gọi O' là điểm đối xứng của O qua BC. Đường thẳng qua L vuông AO' cắt OD tại G. Chứng minh rằng AG chia đôi BC. |  |
|  |  |
| Gọi AD,BD,CE đồng quy tại H.  Do AB,EL,CJ đồng quy tại F và EB cắt AL tại I.  => (EB,HI)=-1.  Mà X là trung điểm EB nên theo hệ thức Maclaurin, ta có: HX.HI=HB.HE  Tương tự ta cũng có HY.HJ=HC.HF  Mà BFEC nội tiếp nên HE.HB=HC.HF  => HX.HI=HY.HJ  =>XYIJ nội tiếp (đpcm). | **2 điểm** |
|  |  |
| Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:  ∠BHC=180°-∠BAC=120°=2∠BAC=∠BOC.  => BHOC nội tiếp.  Gọi tiếp tuyến tại B,C của (O)cắt nhau tại P.  => B,H,O,C,P cùng nằm trên một đường tròn.  Do O' đối xứng O qua BC nên O' là tâm (BHC), tức tâm (BOC).  Ta có kết quả quen thuộc AO' cắt OH tại trung điểm mỗi đường, gọi là N.  => N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.  Gọi PL cắt (O') tại Q.  Do AD,BE,CF đồng quy tại H và EF cắt BC tại L nên (BC,DL)=-1.  Gọi QO cắt BC tại D’ thì QD’ là phân giác trong ∠BQC. Mà QD’ vuông QL nên  QL là phân giác ngoài ∠BQC.  =>(BC,D'L)=-1. => D trùng D', tức O,D,Q thẳng hàng.  Gọi MA cắt OD tại G', cắt (N)tại U; AO cắt EF tại V; K là trung điểm AC.  => AO vuông EF tại V và OK vuông AC tại K nên OVEK nội tiếp.  => AV.AO=AE.AK=AU.AM  => UVOM nội tiếp.  Lại có ∠OV L=∠OQL=∠OML=90° nên O,M,Q,L,V cùng thuộc đường  tròn đường kính OL.  =>U thuộc đường tròn đường kính OL nên UOMQ nội tiếp.  =>G'U.G'M=G'O.G'L  =>G' thuộc trục đẳng phương của (N)và (O').  Mà LE.LF=LB.LC nên L thuộc trục đẳng phương (N)và (O').  =>LG' vuông NO', tức LG' vuông AO'.  =>G trùng G'.  =>AG chia đôi BC (đpcm). | **2 điểm** |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 2** (4 điểm). Giả sử  là các số thực không âm thỏa mãn  Chứng minh rằng  Giải | **4 điểm** | |
| Quy đồng, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với |  | |
| Giả sử  nằm giữa hai số  Khi đó  Do đó |  | |
| Nên để chứng minh  ta chỉ cần chứng minh |  | |
| Ta có  Do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.  Dấu bằng xảy ra khi  hoặc  và các hoán vị |  | |
| **Câu 4** ( *số học*) . a) Cho  là tập hợp tất cả các số tự nhiên  khác  thỏa mãn tính chất " có đúng  ước số dương". Hãy tìm số  bé nhất thuộc tập .  b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  với ,  là các số nguyên dương.  Giải | **4 điểm** | |
| 1. Giả sử , trong đó  là các số nguyên dương,  là các số nguyên tố.   Số ước số dương của  là .  Ta có  hoặc .  Truờng hợp 1 . Để  bé nhất, ta chọn , suy ra .  Trường hợp 2: . Để  bé nhất, ta chọn , suy ra . Kết luận  là số tự nhiên bé nhất thỏa đề bài. | **2 điểm** | |
| 1. Với  thì . Ta sẽ chứng minh  là giá tri nhỏ nhất của . Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại các số  nguyên dương sao cho .   Ta chú ý rằng  không chia hết cho  nên chỉ có thể xảy ra trường hợp .  Nếu  thì . Ta có , vô lý.  Nếu  thì . Ta có  hay , suy ra  là số chẵn.  Đặt , khi đó .  Ta có  (vô lý).  Vậy  khi . | **2 điểm** | |
| **Câu 5** (*tổ hợp*)  Một giải đấu bóng đá có 20 đội bóng tham dự. Tại một thời điểm của giải đấu, người ta nhận thấy có 101 trận đấu đã được diễn ra và hai đội bất kì thi đấu với nhau không quá một trận. Chứng minh rằng, tại thời điểm đó, tồn tại 3 đội bóng đôi một đã thi đấu với nhau. | **4 điểm** | |
| Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử không tồn tại 3 đội bóng sao cho 2 đội bất kì đã thi đấu với nhau.  Gọi  là (một trong số các đội) đã thi đấu nhiều trận nhất. Giả sử  đã thi đấu *k* trận với các đội |  | |
| Do giả sử phản chứng, các đội  đôi một chưa thi đấu với nhau. Như vậy một đội trong nhóm  chỉ thi đấu tối đa  trận với đội còn lại.  Bên cạnh đó, một đội ngoài nhóm  chỉ thi đấu tối đa  trận. |  | |
| Áp dụng bổ đề bắt tay và các lập luận trên, ta có số trận tối đa có thể diễn ra là    Điều này mâu thuẫn với giả thiết có 101 trận đấu được diễn ra. Vậy giả sử phản chứng là sai, hay ta có điều phải chứng minh. |  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |

............................................................