

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CUỘC THI QUỐC GIA GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY
ĐỀ CHÍNH THỨC NĂM 2010

Môn: TOÁN Lớp 12 Cấp THPT

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 19/3/2010

Chú ý: - Đề thi này gồm 4 trang, 10 bài, mỗi bài 5 điểm
 - Thí sinh làm bài trực tiếp vào bản đề thi này

ĐIỂM CỦA TOÀN BÀI THI		CÁC GIÁM KHẢO (Họ, tên và chữ ký)	SỐ PHÁCH (Do Chủ tịch Hội đồng thi khu vực ghi)
Bảng số	Bảng chữ		

Qui định: Học sinh trình bày vắn tắt cách giải, công thức áp dụng, kết quả tính toán vào ô trống liền kề bài toán. Các kết quả tính gần đúng, nếu không có chỉ định cụ thể, được ngầm định chính xác tới 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = 4^x (4^x + 2)^{-1}$. Hãy tính tổng:

$$S = f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \dots + f\left(\frac{2009}{2010}\right).$$

Cách giải	Kết quả

Bài 2. Cho các hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} - 3x + 2, (x \neq 0)$ và $g(x) = a \sin 2x$. Tìm các giá trị của a

thoả mãn hệ thức: $f[f(-1)] \approx \sqrt{2} + g[f(2)]$

Cách giải	Kết quả

Bài 3. Tìm nghiệm gần đúng của hệ:

$$\begin{cases} xy(x-2)(y-2) = 4 \\ x^2 + y^2 - 2(x+y) = 4 \end{cases}$$

Cách giải	Kết quả

Bài 4. Tìm gần đúng tọa độ các giao điểm A và B của đường tròn:

$$4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y - 5 = 0 \text{ và đường thẳng đi qua hai điểm } M(-4;3), N(5;-2)$$

Cách giải	Kết quả

Bài 5. Hãy tìm số tự nhiên n , sao cho giá trị của $(1+1)(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})...(n+\sqrt{n})$ sai khác số 43294578923 không quá một đơn vị.

Cách giải	Kết quả

Bài 6. Cho hai điểm A và B trên đồ thị hàm số: $y = x^2 + 2x - 3$, với $x \in [-2; 2]$. Hãy tính gần đúng khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm đó.

Cách giải	Kết quả

Bài 7. Cho dãy số $\{u_n\}$ với

$$u_n = \sin(2010 - \sin(2010 - \sin(2010 - \dots \sin(2010 - \sin 2010) \dots)))$$

Tìm n_0 để với mọi $n \geq n_0$ thì u_n có 4 chữ số phần thập phân ngay sau dấu phẩy là không đổi. Tính giá trị u_{2009} .

Cách giải	Kết quả

Bài 8. Một người mua xe máy trả góp với giá tiền là 20.000.000 đ, mức lãi suất 1,2% / tháng với quy ước 1 tháng trả 800.000đ cả gốc và lãi. Hỏi sau 12 tháng kể từ ngày người ấy mua xe số tiền còn nợ là bao nhiêu đồng? Sau một năm lãi suất lại tăng lên là 1,5% / tháng và người đó lại quy ước 1 tháng trả 1.000.000đ cả gốc và lãi (trừ tháng cuối cùng). Hỏi sau bao nhiêu tháng người ấy trả hết nợ? (tháng cuối trả không quá 500.000đ).

Cách giải	Kết quả

Bài 9. Cho một tứ diện SPQR có $SP = QR = 11$, $SQ = PR = 20$ và $SR = PQ = 21$. Hãy tính thể tích của tứ diện đó?

Cách giải	Kết quả

Bài 10. Một nút giao thông có cầu vượt và 4 cung chuyển làn được thiết kế như hình vẽ. Trong đó:

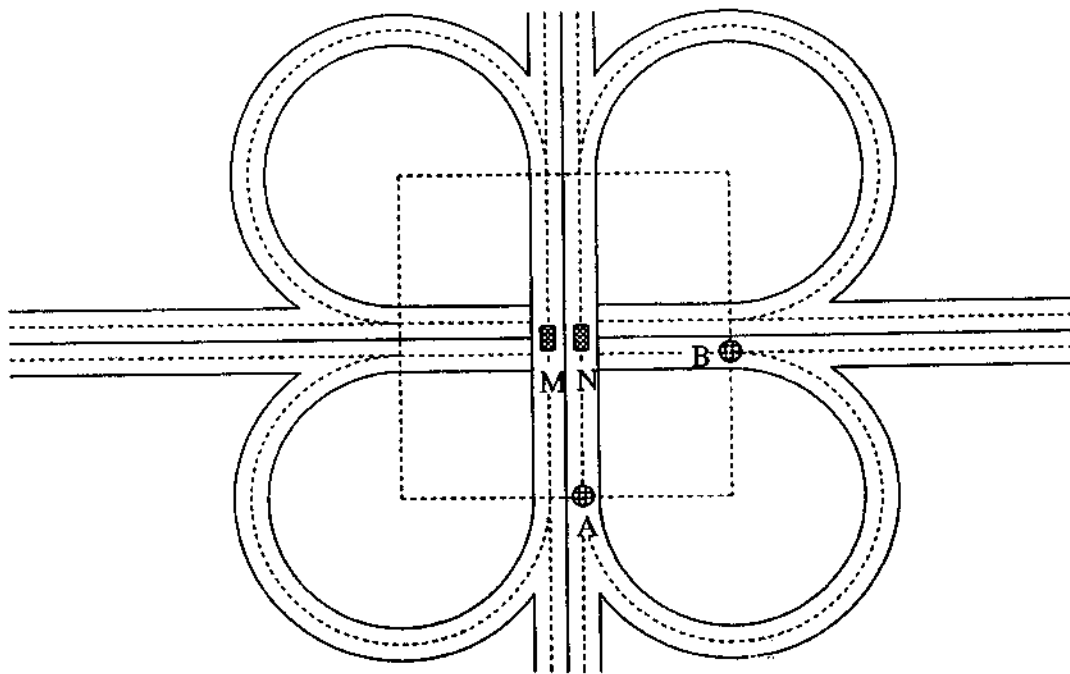
- Độ cao mặt đường cầu vượt so với mặt đường dưới gầm cầu là 6 m (chênh lệch về độ cao giữa các điểm trên mặt cầu vượt tại khu vực này là không đáng kể);
- Bề rộng của mặt đường chính (trên cầu vượt cũng như dưới gầm cầu) là 18m, được chia làm 2 làn bởi giải phân cách cứng;

- Bề rộng mặt đường của các cung chuyển làn là 9m. Đường tim của mỗi cung (biểu thị bằng đường đứt nét) có hình chiếu thẳng góc là một cung tròn (chính xác là $\frac{3}{4}$ vòng tròn với bán kính là 45m) với tiếp tuyến tại mỗi điểm (trừ 2 đầu mút) luôn có cùng góc nghiêng so với mặt bằng đáy.

Bạn hãy cho biết:

- 1) Khi một xe đang ở vị trí M trên cầu vượt và muốn chuyển sang chiều đi ngược lại thì nó phải đi như thế nào? Hãy tính độ dài quãng đường đi tối ưu từ vị trí M nó đến vị trí N đối xứng với M qua giải phân cách (giả sử rằng xe luôn đi theo tim đường);
- 2) Một chiếc xe muốn đi từ vị trí A trên mặt cầu vượt xuống tới vị trí B trên đường dưới gầm cầu thì nó phải đi như thế nào và quãng đường nó phải đi tối thiểu là bao nhiêu (nếu nó luôn đi theo tim đường)?

(Các kết quả tính chính xác tới 5 chữ số thập phân ngay sau dấu phẩy)



Cách giải	Kết quả

----- HẾT -----

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CUỘC THI QUỐC GIA GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY
NĂM 2010

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn:....TOÁN.....Lớp 12.....Cấp THPT

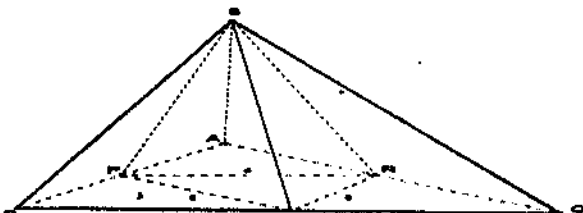
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 19/3/2010

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI

Qui định: Học sinh trình bày vắn tắt cách giải, công thức áp dụng, kết quả tính toán vào ô trống liền kề bài toán. Các kết quả tính gần đúng, nếu không có chỉ định cụ thể, được ngầm định chính xác tới 4 chữ số phần thập phân sau dấu phẩy.

Bài	Cách giải	Kết quả	Điểm
1	+ Sử dụng $f(x) + f(1-x) = 1$. $S = \left[f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2009}{2010}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1004}{2010}\right) + f\left(\frac{1006}{2010}\right) \right] + f\left(\frac{1005}{2010}\right)$ $+ S = 1004.1 + 0.5 = 1004,5.$	$+ f(x) + f(1-x) = 1.$ $+ 1004,5$	2,0 3,0
2	+ $f(f(-1)) = \frac{a}{(a+5)^2} - 3a - 13 \quad (a \neq -5).$ + $g(f(2)) = a \sin\left(\frac{a}{2} - 8\right)$ + Giải phương trình tìm a (dùng chức năng SOLVE): $f(f(-1)) - g(f(2)) = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \frac{a}{(a+5)^2} - 3a - 13 - a \sin\left(\frac{a}{2} - 8\right) = \sqrt{2}$ $+ a \approx -5,8122.$	$+ f(f(-1))$ $+ g(f(2))$ $+ a \approx -5,8122.$	1,0 1,0 3,0
3	+ Đưa về dạng: $\begin{cases} xy(x-2)(y-2) = 4 \\ x(x-2) + y(y-2) = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u + v = 4 \end{cases} \quad (\text{với } u = x(x-2); v = y(y-2)).$ + Hệ có 4 nghiệm: $\begin{cases} x_1 \approx 2,7321 \\ y_1 \approx 2,7321 \end{cases}; \begin{cases} x_2 \approx 2,7321 \\ y_2 \approx -0,7321 \end{cases}; \begin{cases} x_3 \approx -0,7321 \\ y_3 \approx 2,7321 \end{cases}; \begin{cases} x_4 \approx -0,7321 \\ y_4 \approx -0,7321 \end{cases}$	$+ \text{Biến đổi}$ $+ 4 \text{ nghiệm}$	1,0 4,0
4	+ Phương trình tham số của đường thẳng MN: $\begin{cases} x = -4 + 9t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ + Tọa độ giao điểm thỏa mãn: $(-4 + 9t)^2 + (3 - 5t)^2 + 3(-4 + 9t) - 4(3 - 5t) - \frac{5}{4} = 0$ $\Leftrightarrow 106t^2 - 55t - \frac{1}{4} = 0 (*)$ + Nghiệm của (*): $\begin{cases} t_1 = 0,523374242 \\ t_2 = -4,506317614 \cdot 10^{-3} \end{cases}$	$+ \text{phương trình đường thẳng MN}$ $+ \text{Tìm tham số } t$	1,0 1,0

	+ Kết luận: $A(0,7104; 0,3831); B(-4,0406; 3,0225)$	+ Tọa độ A + Tọa độ B	1,5 1,5
5	+ Dùng phép lặp: Gán 1 vào X, 2 vào A. Ghi vào màn hình: $X = X + 1; A = A(X + \sqrt[n]{X})$ + Tìm được $n = 12$	$n = 12$	5,0
6	+ $A(2; 5) \in (P); B(x; x^2 + 2x - 3) \in (P)$ + $\max AB = \max \sqrt{f(x)}$ trên $[-2; 2]$, với $f(x) = (x - 2)^2 + (x^2 + 2x - 8)^2$ + $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 22x - 36$. + $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -1,177124344, x \in [-2; 2]$ + $\sqrt{f(-2)} \approx 8,94427191; \sqrt{f(2)} = 0;$ $\sqrt{f(-1,177124344)} \approx 9,514745859;$ + Kết luận: $\max AB \approx 9,5148$.	+ Xác lập $f(x)$ + Tìm được $\max AB \approx 9,5148$.	2,0 3,0
7	+ Máy tính để chế độ RADIAN. + Dùng phép lặp: Gán $\sin 2010$ vào A; gán 1 vào X; Ghi vào màn hình: $X = X + 1; A = \sin(2010 - A)$. + $n_0 = 186$ thì $u_{186} \approx u_{187} \approx \dots \approx -0,3071$ + $u_{2009} \approx -0,3071$.	+ $n_0 = 186$ + $u_{2009} \approx -0,3071$.	4,0 1,0
8	+ Lập dãy: $\begin{cases} u_1 = 20000000 \\ u_{n+1} = u_n(1 + 0,012) - 800000 \end{cases}$ + Lập dãy: $\begin{cases} u_{12} = 12818250,87 \\ u_{n+1} = u_n(1 + 0,015) - 1000000 \end{cases} \quad (n \geq 12)$ + $n = 12, T = 12818250,87$. + $n = 27$ (trả hết nợ).	+ $n = 12, T = 12818250,87$. + $n = 27$ (trả hết nợ).	3,0 2,0
9	+ Ta dựng tứ diện SABC sao cho P, Q, R là trung điểm của các cạnh tương ứng AB, BC, CA.. + Các tam giác SAB, SBC, SCA vuông tại S. $V_{SPQR} = \frac{1}{4} V_{ABCD}$  + Tính các cạnh SA, SB, SC $\begin{cases} SA^2 + SB^2 = AB^2 = 4b^2 \\ SB^2 + SC^2 = BC^2 = 4a^2 \\ SC^2 + SA^2 = 4c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SA^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) \\ SB^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ SC^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2) \end{cases}$	+ Sử dụng được tính chất các cạnh đối bằng nhau để tìm ra cách tính thể tích + Tính được thể tích là 360 (đv tt)	2,0 3,0

	$+ V_{SABC} = \frac{1}{6} \sqrt{8(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$ $\Rightarrow V_{SPQR} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} = 360$ (với $a = 11; b = 20; c = 21$)		
10	- Điểm then chốt là tính được độ dài của mỗi cung chuyển làn, hay chính xác hơn là độ dài tim đường của chúng. Đây là đường cong trong không gian, có hình chiếu thẳng góc là cung tròn (chính xác là $\frac{3}{4}$ đường tròn). Đường cong này nằm trên mặt trụ đứng với đáy là vòng tròn. Nếu như ta “bỏ dọc” mặt hình trụ này theo một đường sinh và “đuỗi phẳng” ra thì sẽ thu được một hình chữ nhật. Khi ấy, đường tim của cung chuyển làn sẽ “đuỗi ra” thành cạnh huyền của tam giác vuông với một cạnh chính là $\frac{3}{4}$ vòng tròn được đuỗi, và cạnh kia là đường vuông góc hạ từ mặt đường cầu vượt xuống tới mặt đường dưới gầm cầu vượt, tức là bằng 6 m. Dễ dàng tính được chiều dài của “cạnh huyền” này xấp xỉ bằng $d=212,14236$ m. - Để xe đi từ M đến N, theo đúng hướng đường quy định, thì phải trải qua 2 cung chuyển làn và 3 khúc liên kết. Dễ thấy rằng, tổng độ dài quãng đường đi là: $2d+99+2(45+4.5)=622,28472$m. - Để đi từ A đến B, theo đúng hướng đường quy định, thì phải trải qua 3 cung chuyển làn và 4 khúc liên kết, với tổng độ dài là: $3d+4(99) = 1032,42708$m.	+ $d=212,14236$ m. + $s(M \rightarrow N)=622,28472$m. + $s(A \rightarrow B)=1032,42708$m.	2,0 1,5 1,5

