|  |  |
| --- | --- |
| **UBND TỈNH BẮC NINH**  **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** | **ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**  **NĂM HỌC: 2022-2023**  Môn thi: **Toán (chuyên Toán và Tin)**  Thời gian làm bài: **150 phút** |

**Câu 1. (1,5 điểm)**

1. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho 2 điểm *A*(2; −3); *B*(7; 7). Tìm điểm *M* thuộc trục *Ox* để *M, A, B* thẳng hàng.
2. Cho *a* là nghiệm phương trình . Tính giá trị của biểu thức

*T* = 12*a*4 − *a*2 + 2*a*.

**Câu 2. (2,0 điểm)**

1. Giải phương trình sau: 
2. Giải hệ phương trình sau: 

**Câu 3. (2,0 điểm)**

* 1. Tìm tất cả các nghiệm (*x*; *y*; *z*) của phương trình *x*(*x*2 + *x* + 1) = *zy* − 1 thỏa mãn *x*, *y* là các số nguyên và *z* là số nguyên tố.
  2. Tìm tất cả số thực *x* thỏa mãn  và đều là số nguyên.

**Câu 4. (3,0 điểm)**

1. Cho đường tròn *(O)* có đường kính *AB*. Lấy điểm *C* thuộc đoạn *AO* (*C* khác *A*, *O*). Vẽ đường tròn (*I*) đường kính *BC*. Vẽ tiếp tuyến *AD* và cát tuyến *AEF* với đường tròn (*I*) (*E* nằm giữa *A*, *F*) sao cho tia *AO* nằm giữa 2 tia *AD*, *AE*. Đường thẳng vuông góc với *AB* vẽtừ *C* cắt đường tròn (*O*) tại 2 điểm, gọi một trong hai giao điểm là *N* sao cho *N* và *D* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Gọi *S* là giao điểm của hai đường thẳng *DI* và *NB*. Gọi *R* là giao *DN* và *AS*. Gọi *J* là trung điểm *SD*.
   1. Chứng minh tam giác *AND* cân.
   2. Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC và SEF. Chứng minh ba điểm *J*, *L*, *T* thẳng hàng.
2. Cho hình vuông ABCD có diện tích là S. Tứ giác MNPQ có bốn đỉnh *M*, *N*, *P*, *Q* thuộc *AB*, *BC*, *CD*, *DA* và 4 đỉnh này không trùng 4 đỉnh hình vuông. Chứng minh rằng:



**Câu 5. (1,5điểm)**

1. Cho *x, y, z* là các số thực không âm thỏa mãn *x*3 + *y*3 + *z*3 = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



1. Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kì đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng gặp 9 đối thủ của mình và không có trận nào hòa. Chứng minh rằng luôn xếp được 10 bạn thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau.

………**HẾT**………

|  |  |
| --- | --- |
| **UBND TỈNH BẮC NINH**  **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** | **ĐÁP ÁN VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**  **NĂM HỌC: 2022-2023**  Môn thi: **Toán (chuyên Toán và Tin)**  Thời gian làm bài: **150 phút** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Đáp án** | **Điểm** |
| **1.1** | Trong mặt phẳng *Oxy*, cho 2 điểm *A*(2; −3); *B*(7; 7). Tìm điểm *M* thuộc trục *Ox* để *M, A, B* thẳng hàng. |  |
|  | Giả sử tồn tại  đi qua *A*(2; −3); *B*(7; 7) |  |
| Khi đó, *M* là giao điểm của *(d)* với trục *Ox* nên |  |
| **1.2** | Cho *a* là nghiệm phương trình . Tính giá trị của biểu thức  *T* = 12*a*4 − *a*2 + 2*a*. |  |
|  | Từ giả thiết, suy ra      Vậy *T=1* |  |
| **2.1** | Giải phương trình sau: (1) |  |
|  | ĐKXĐ:        Đặt  với  Khi đó phương trình trở thành:    +) Nếu  +) Nếu  Vậy phương trình (1) có nghiệm là x=3. |  |
| **2.2** | Giải hệ phương trình sau: |  |
|  | Dễ thấy *x.y.z=0* nên |  |
|  |  |
| Xét phương trình |  |
| Kết hợp với hệ trên ta có hoặc hoặc  là hoán vị của  Vậy là hoán vị của |  |
| **3.1** | Tìm tất cả các nghiệm (*x*; *y*; *z*) của phương trình *x*(*x*2 + *x* + 1) = *zy* − 1 thỏa mãn *x*, *y* là các số nguyên và *z* là số nguyên tố. |  |
|  | Ta biến đổi được như sau:  Vì *z* là số nguyên tố nên  và      Mà:  +) Nếu là số nguyên tố bất kỳ  +) Nếu (thỏa mãn)  Vậy với *p* là số nguyên tố bất kỳ |  |
| **3.2** | Tìm tất cả số thực *x* thỏa mãn  và đều là số nguyên. |  |
|  | Đặt |  |
| Khi đó        Khi đó  là số vô tỷ |  |
| +Nếu  thỏa mãn  +Nếu  thỏa mãn |  |
| Vậy  thỏa mãn bài |  |
| **4.1** | Cho đường tròn *(O)* có đường kính *AB*. Lấy điểm *C* thuộc đoạn *AO* (*C* khác *A*, *O*). Vẽ đường tròn (*I*) đường kính *BC*. Vẽ tiếp tuyến *AD* và cát tuyến *AEF* với đường tròn (*I*) (*E* nằm giữa *A*, *F*) sao cho tia *AO* nằm giữa 2 tia *AD*, *AE*. Đường thẳng vuông góc với *AB* vẽtừ *C* cắt đường tròn (*O*) tại 2 điểm, gọi một trong hai giao điểm là *N* sao cho *N* và *D* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Gọi *S* là giao điểm của hai đường thẳng *DI* và *NB*. Gọi *R* là giao *DN* và *AS*. Gọi *J* là trung điểm *SD*.   * 1. Chứng minh tam giác *AND* cân.   2. Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC và SEF. Chứng minh ba điểm *J*, *L*, *T* thẳng hàng. |  |
| **4.1a** |  |  |
| Dễ thấy *AD* là tiếp tuyển của (*I*)  ⇒AD2 = *AC*.*AB* = *AN*2  Nên tam giác *AND* cân tại *A* |  |
| **4.1b** | Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC và SEF. Chứng minh ba điểm *J*, *L*, *T* thẳng hàng. |  |
|  | Ta có:  Tam giác *AND* cân tại *A* nên  Suy ra tam giác *SDN* cân tại *S* nên *S* thuộc trung trực *ND*  Hay *AS* ⊥ *ND* tại *S*  Chính vì vậy nên *AD*2 = *AR*.*AS* = *AE*.*AF* = *AC*.*AB*  Hay 2 tứ giác *ERSF* và *CRSB* nội tiếp nên *L*, *T* cùng nằm trên trung trực *RS* (1) |  |
| Tam giác *RSD* vuông tại *R* có *J* là trung điểm *SD* nên *JR* = *JS*  Hay *J* thuộc trung trực *RS* (2)  Từ (1),(2) ⇒ J,L,T thẳng hàng. |  |
| **4.2** | Cho hình vuông ABCD có diện tích là S. Tứ giác MNPQ có bốn đỉnh *M*, *N*, *P*, *Q* thuộc *AB*, *BC*, *CD*, *DA* và 4 đỉnh này không trùng 4 đỉnh hình vuông. Chứng minh rằng |  |
|  |  |  |
| Ta có      Dễ có  Hay  Tương tự      Cộng vế với vế ta được đpcm |  |
| **5.1** | Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn *x*3 + *y*3 + *z*3 = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức |  |
|  | Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có *y*3 + 1 + 1 ≥ 3 *y*  Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế ta được    Đặt  Khi đó  và  Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel ta có    Mặt khác ta có      Đẳng thức xảy ra khi  hay |  |
| **5.2** | Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kì đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng gặp 9 đối thủ của mình và không có trận nào hòa. Chứng minh rằng luôn xếp được 10 bạn thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau. |  |
|  | Vì số cách xếp là hữu hạn, nên khi ta xếp các bạn học sinh thành 1 hàng, luôn tồn tại cách xếp thỏa mãn yêu cầu đề bài và có nhiều nhất *m* học sinh. Ta sẽ đi chứng minh *m* = 10.  Thật vậy, giả sử *m* < 10. Tức là tồn tại 1 học sinh *X* không thể xếp vào hàng. Ta xét các trường hợp sau:   * + Nếu X thắng *m* bạn trong hàng. Khi này, ta xếp *X* ở đầu hàng, sẽ thỏa mãn điều kiện đề bài.   + X thua *m* bạn trong hàng. Khi này, ta xếp *X* ở cuối hàng, sẽ thỏa mãn điều kiện đề bài.   + X thắng 1 số bạn và thua 1 số bạn trong hàng. Lúc đó, luôn tồn tại 2 bạn liên tiếp sao cho bạn đằng trước thắng X, bạn đằng sau thua   X. Khi này ta chỉ cần xếp *X* vào giữa 2 bạn đó, sẽ thỏa mãn điều kiện đề bài.  Như vậy, với mọi trường hợp, ta luôn xếp được *X* vào hàng sao cho thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi này, số học sinh trong hàng sẽ là *m*+1 > *m*, trái với cách đặt ban đầu.  Vậy giả sử sai, bài toán được chứng minh. |  |