**Chuyên đề 8. PHÉP CHIA HẾT TRấN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN**

**A. Kiến thức cần nhớ**

**1.** **Khái niệm**: Cho a,b là hai số nguyên và b khác 0. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số nguyên q sao cho a = bq.

Khi a chia hết cho b thì ta nói b là ước của a hay b chia hết a; a là bội của b.

**Lưu ý** : Khi a chia hết cho b thì a cũng chia hết cho - b.

**2.** **Một số tính chất thường dùng**

1. Nếu a chia hết cho b, b chia hết cho c thì a chia hết cho c.
2. Nếu a, b chia hết cho m thì ax + by cũng chia hết cho m ( x, y là số nguyên )
3. Nếu a chia hết cho tích m.n thì a chia hết cho m, a chia hết cho n. ( điều ngược lại không đúng)
4. Nếu a chia hết cho m, n với (m , n) = 1 thì a chia hết cho tích mn.
5. Nếu tích a.b chia hết cho m mà (b, m) = 1 thì a chia hết cho m.
6. Cho p là số nguyên tố. Khi đó, nếu tích ab chia hết cho p thì a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p.
7. Khi chia n + 1 số nguyên dương liên tiếp cho n (n > 0) luôn nhận được hai số dư bằng nhau.
8. Tích của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho n (n > 0).
9. Trong n số nguyên liên tiếp ( n > 0) luôn có duy nhất một số chia hết cho n.
10. Cho a,b là hai số nguyên và b khác 0. Khi đó, tồn tại duy nhất cặp số nguyên (q; r) sao cho

a = bq + r và 0 ≤ r ≤ | b| - 1.

* Cho b > 0 và a tuỳ ý.

Khi đó, nếu chia a cho b thì số dư chỉ có thể là 0, 1, 2, ..., b - 1.

**B. Một số ví dụ**

**I - PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ**

**Ví dụ 1**. Chứng minh rằng :

1. ab(a + b) chia hết cho 2 với a, b ∈ Z.
2. A = n(n2 +1 )(n2 + 4) chia hết cho 5 với n ∈ Z.

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho k. Chẳng hạn:

Câu a. Chúng ta xét các trường hợp số dư khi chia a; b cho 2.

Câu b. Chúng ta xét các trường hợp số dư khi chia n cho 5.

**lời giải**

1. Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 2, ta có :

* Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 2 thì ab chia hết cho 2.
* Nếu a và b cùng không chia hết cho 2 thì chúng cùng lẻ suy ra a + b chẵn do đó a + b chia hết cho 2.

Vậy ab(a + b) chia hết cho 2 với a, b ∈ Z.

1. Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 5, ta có :

* Nếu n =5k (k ∈ Z)thì A chia hết cho 5.
* Nếu n =5k ± 1 thì n2 = 5m + 1(m ∈ Z) nên n2 + 4= 5m + 5 chia hết cho 5 suy ra A chia hết cho 5.
* Nếu n =5k ± 2 thì n2 = 5m + 4 (m ∈ Z) nên n2 + 1= 5m + 5 chia hết cho 5 suy ra A chia hết cho 5.

Vậy A = n(n2 +1 )(n2 + 4) chia hết cho 5 với n ∈ Z.

**Ví dụ 3**. Cho x, y, z là các số nguyên sao cho (x - y)(y - z)(z- x) = x + y + z.

Chứng minh rằng x + y + z chia hết cho 27.

*(thi học sinh giỏi Toán 9, Thành Phố Hồ Chí Minh, vòng 2 - năm học 1995- 1996)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Nhận thấy x + y + z chia hết cho 27 tức là (x - y)(y - z)(z- x) chia hết cho 27. Vỡ vậy chỳng ta cần xột số dư khi chia x, y, z cho 3. Tuy nhiên nếu xột riờng thỡ nhiều trường hợp quỏ, do tớnh hoỏn vị chỳng ta cú thể xét các trường hợp cựng số dư, khác số dư.

**Trỡnh bày lời giải**

Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 3, ta có :

* Nếu x, y, z chia cho 3 có các số dư khác nhau thì : x - y, - z, z- x cùng không chia hết cho 3, còn x + y + z chia hết cho 3 do đó (x - y)(y - z)(z- x) = x + y + z không xảy ra.
* Nếu x, y, z chỉ có hai số chia cho 3 có cùng số dư thì x - y, y - z, z- x chỉ có một hiệu chia hết cho 3 còn x + y + z không chia hết cho 3 do đó

(x - y)(y - z)(z- x) = x + y + z không xảy ra.

Do đó x, y, z chia cho 3 có cùng số dư suy ra x - y, y - z, z - x chia hết cho 3 .

Vậy x + y + z = (x - y)(y - z)(z- x) chia hết cho 27.

**II - PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TÍCH**

**Ví dụ 3**. Chứng minh rằng P = a5b – ab5 chia hết cho 30 với a, b là hai số nguyên bất kỳ.

*( thi học sinh giỏi Toán 9, Toàn Quốc , năm học 1985 - 1986)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Nhận thấy rằng nếu dùng phương pháp xét số dư cho 30 thỡ nhiều trường hợp quỏ nờn khụng khả thi. Ta sử dụng phương pháp phân tích thành tích: để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta phân tích k ra thừa số k =p.q, nếu (p; q) = 1, ta chứng minh A(n) chia hết cho p và A(n) chia hết cho q.

Mặt khỏc 30 = 2.3.5 mà (2; 3) = (3; 5) = (5; 2) = 1 nên ta chỉ cần chứng minh P chia hết cho 2; 3; 5. Mỗi trường hợp chỳng ta dựng kỹ thuật xột số dư.

**lời giải**

Ta có: P = ab(a2 + b2)(a2 – b2)

Vì 30 = 2.3.5 mà (2; 3) = (3; 5) = (5; 2) = 1 nên ta chứng minh P chia hết cho 2; 3; 5

* Chứng minh P chia hết cho 2.
* Nếu ít nhất a hoặc b chẵn thì ab chia hết cho 2.
* Nếu a và b cùng lẻ thì a- b chia hết cho 2.
* Chứng minh P chia hết cho 3.
* Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 3 thì ab chia hết cho 3.
* Nếu a, b cùng không chia hết cho 3 thì chúng có dạng 3k ± 1 suy ra a2 , b2 có dạng 3m + 1 nên a2 - b2 chia hết cho 3.
* Chứng minh P chia hết cho 5.
* Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 5 thì ab chia hết cho 5.
* Nếu a, b cùng không chia hết cho 5.
* Nếu a, b có một trong các dạng 5k ± 1 hoặc 5k ± 2 thì a2 , b2 có cùng dạng 5m + 1 hoặc 5m + 4 nên a2 - b2 chia hết cho 5 .
* Nếu a, b có một số có dạng 5k ± 1 còn một số có dạng 5k ± 2 thì a2 và b2 có một số có dạng 5m + 1 còn một số có dạng 5m + 4 nên a2 + b2 chia hết cho 5 .

Vậy P chia hết cho 30.

**Ví dụ 4**. Chứng minh rằng một số có dạng: P = n4 – 4n3 – 4n2 + 16n ( với n là số chẵn lớn hơn 4 ) thì chia hết cho 384.

*(thi học sinh giỏi toán 9, Toàn Quốc - Năm học 1970- 1971)*

**Giải**

**cách giải**. Ta nhận thấy biểu thức cú thể phõn tớch thành nhõn tử được: n4 - 4n3 - 4n2 + 16n = n(n - 4)(n - 2)(n + 2). Vì n chẵn lớn hơn 4 nên n = 2k + 2 ( k ∈ N\*). thay vào biểu thức P ta được : P = (2k + 2)(2k+ 2 - 4)(2k + 2 - 2)(2k + 2 + 2) = 16k(k - 1)(k + 1)(k + 2). Mặt khỏc ta cú 384 = 16.24 do vậy chỳng ta chỉ cần chứng minh k(k - 1)(k + 1)(k + 2) chia hết cho 24.

**lời giải**

Ta có : n4 - 4n3 - 4n2 + 16n = n(n - 4)(n - 2)(n + 2)

Vì n chẵn lớn hơn 4 nên n = 2k + 2 ( k ∈ N+) thay vào biểu thức P ta được :

(2k + 2)(2k+ 2 - 4)(2k + 2 - 2)(2k + 2 + 2) = 16k(k - 1)(k + 1)(k + 2).

* k, k + 1, k + 2 có một số chia hết cho 3.
* k – 1, k , k + 1, k + 2 có hai số chẵn liên tiếp, nên một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4 suy ra k(k - 1)(k + 1)(k + 2) chia hết cho 8.

Do đó k(k - 1)(k + 1)(k + 2) chia hết cho 24 vì (3; 8) = 1

hay 16k(k - 1)(k + 1)(k + 2) chia hết cho 16.24 tức là n4 - 4n3 - 4n2 + 16n chia hết cho 384.

**III - PHƯƠNG PHÁP TÁCH TỔNG**

**Ví dụ 5**. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a ta đều có (a3 + 5a) là số nguyên chia hết cho 6.

*(thi học sinh giỏi Toán 9, Thành Phố Hà Nội , năm học 2008- 2009)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Nhận thấy vớ dụ này cú thể giải được bằng kỹ thuật xột số dư. Song chúng ta có thể giải bằng phương pháp tách tổng: Để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta có thể biến đổi A(n) thành tổng của nhiều hạng tử và chứng minh mỗi hạng tử chia hết cho k. Do đó ta chỉ cần tỏch a3 + 5a = a3 - a + 6a, sau đó chứng tỏ a3 - a và 6a cựng chia hết cho 6.

**Trỡnh bày lời giải**

Ta có a3 + 5a = a3 - a + 6a .

Mà a3 - a = (a - 1)a(a + 1) chia hết cho 6 vỡ là tớch của ba số nguyờn liờn tiếp và 6a chia hết cho 6 với mọi số nguyên a.

Vậy (a3 + 5a) là số nguyên chia hết cho 6.

**IV -PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC**

**Ví dụ 6**. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , số A(n) = 5n(5n + 1) – 6n(3n + 2n) chia hết cho 91.

*(tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Vòng 1 - năm học 1997-1998)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Những bài toỏn chứng minh chia hết mà biểu thức cú số mũ n hoặc quỏ lớn chỳng ta cú thể sử dụng kết quả của các hằng đẳng thức mở rộng :

an – bn chia hết cho a – b (a ≠ b ) với n bất kỳ.

an – bn chia hết cho a + b (a ≠ - b ) với n chẵn.

an + bn chia hết cho a + b (a ≠ -b )với n lẻ.

Trong vớ dụ này, ta có 91 = 7.13 và (7; 13) = 1. Để chứng minh A(n) chia hết cho 91, ta chứng minh A(n) chia hết cho 7 và 13. Vậy chỳng ta chỉ cần nhúm cỏc hạng tử một cỏch thớch hợp.

**Trỡnh bày lời giải**

Ta có 91 = 7.13 và (7; 13) = 1. Để chứng minh A(n) chia hết cho 91, ta chứng minh A(n) chia hết cho 7 và 13. Ta có A(n) = 25n + 5n – 18n – 12n.

Áp dụng tớnh chất với mọi a, b, n là số nguyờn dương và a ≠ b.

25n- 18n chia hết cho 25 - 18 tức là 25n- 18n chia hết cho 7.

12n- 5n chia hết cho 12 - 5 tức là 12n- 5n chia hết cho 7.

Vậy A(n) = 25n- 18n - (12n- 5n) chia hết cho 7.

25n -12n chia hết cho 25 - 12 tức là 25n- 12n chia hết cho 13.

18n - 5n chia hết cho 18 - 5 tức là 18n - 5n chia hết cho 13.

Vậy A(n) = 25n- 12n - (18n- 5n) chia hết cho 13.

Suy ra số A(n) = 5n(5n + 1) - 6n(3n + 2n) chia hết cho 91.

**Ví dụ 7**. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thỡ chia hết cho 65

*(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyờn, Hà Nội , năm học 2014 – 2015)*

**Giải**

Ta có 65 = 13.5 và (5; 13) = 1. Để chứng minh biểu thức chia hết cho 65, ta chứng minh biểu thức chia hết cho 13 và 5.

Ta cú .

Áp dụng tớnh chất với mọi a, b, n là số nguyên dương và a ≠ b

25n -12n chia hết cho 25 - 12 tức là 25n- 12n chia hết cho 13.

20n - 7n chia hết cho 20 - 7 tức là 20n - 7n chia hết cho 13.

chia hết cho 13

25n -20n chia hết cho 25 - 20 tức là 25n- 20n chia hết cho 5.

12n - 7n chia hết cho 12 - 7 tức là 20n - 7n chia hết cho 5.

chia hết cho 5

 mà ƯCLN (5; 13) = 1 nên A ⋮ 65.

**V - PHƯƠNG PHÁP DÙNG NGUYÊN LÝ ĐIRICHLET**

**Phương pháp giải**

Nếu nhốt n + 1 thỏ vào n cái lồng thì chắc chắn có một lồng chứa ít nhất hai thỏ.

- Trong n số nguyên liên tiếp thì có một số chia hết cho n ( n ≥ 1)

- Trong n + 1 số nguyên bất kỳ thì có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho n

( n ≥ 1).

**Ví dụ 8**. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thoả mãn (13579n - 1) chia hết cho 313579.

*(thi học sinh giỏi toán 9, Thành Phố Hà Nội , năm học 2005 - 2006)*

**Giải**

Xét 313579 số sau : 13579; 135792 ; 135793 ; ..... ; đem chia cho 313579 ta nhận được 313579 số dư.

Mà 13579 không chia hết cho 3 nên trong các số trên không có số nào chia hết cho 3 do đó chúng nhận các số dư trong các số : 1; 2 ; 3; ...; 313579 – 1 nên tồn tại hai số có cùng số dư .

Giả sử đó là hai số 13579i  ; 13579j  ( i > j ) ⇒ 13579i  - 13579j  chia hết cho 313579

⇒13579j(13579i - j  - 1) chia hết cho 313579  mà (13579 ; 3) = 1 nên (13579i - j  - 1) chia hết cho 313579 với n = i – j. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

***Nhận xột***. Chỳng ta cú thể giải được bài toỏn tổng quỏt sau: Với a và p là hai số nguyờn tố cựng nhau. Với số tự nhiờn k chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thoả mãn (an - 1) chia hết cho pk.

**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kỳ bao giờ cũng tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

*(thi học sinh giỏi Toán 9 Thành Phố Hà Nội , năm học 2000- 2001)*

**Giải**

Đặt 5 số đó là a, b, c, d, e. Đem 5 số chia cho 3 chúng chỉ nhận các số dư là 0; 1; 2.

* Nếu tồn tại 3 số có cùng số dư thì tổng ba số đó chia hết cho 3.
* Nếu không tồn tại 3 số có cùng số dư thì nhiều nhất chỉ có 2 số có cùng số dư khi chia cho 3, suy ra phải có 3 số có số dư khác nhau khi chia cho 3. Tổng 3 số này chia hết cho 3.

**VI - PHƯƠNG PHÁP DÙNG QUY NẠP TOÁN HỌC**

**Phương pháp giải**

Trong toán học, khi dùng quy nạp để chứng minh A(n) chia hết cho k với n ≥ n0 ta thực hiện :

* ***Bước 1***. Chứng minh A(n) chia hết cho k với n = n0.
* ***Bước 2***. Chứng minh với mọi m ≥ n0 , giả sử nếu A(m) chia hết cho k đúng , ta phải chứng minh A(m + 1) chia hết cho k.
* ***Bước 3***. Kết luận.

**Ví dụ 10**. Với mọi n nguyên dương, chứng minh rằng: A(n) = 7n + 3n - 1 chia hết cho 9.

**Giải**

* Với n = 1 thì A(1) = 7 + 3 - 1 = 9 chia hết cho 9.
* Giải sử bài toán đúng với n = k( k ≥ 1), tức là A(k) = 7k + 3k - 1 chia hết cho 9. Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1. Thật vậy :

Ta cú: A(k + 1) = 7k + 1 + 3(k + 1) - 1= 7.7k + 3k + 2

⇒ A(k + 1) = 7.( 7k + 3k - 1) - 18k + 9. Vì 7k + 3k - 1 chia hết cho 9 và 18k ; 9 chia hết cho 9 ⇒ A(k + 1) chia hết cho 9. Như vậy bài toán đúng với n = k + 1. Do đó bài toán đúng với mọi n là số nguyên dương.

**Ví dụ 11**. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì 122n + 1 + 11n + 2 chia hết cho 133.

**Giải**

* Với n = 1, tổng 123 + 113 = 2926 = 22. 133 chia hết cho 133.
* Giả sử mệnh đề đúng với n = k ( k ≥ 1), tức là 122k +1 + 11k+ 2 chia hết cho 133. Ta cần chứng minh đúng với n = k +1.

Ta cú: 122k + 3 + 11k + 3 = 144.122k + 1 + 11.11k + 2 = 133.122k + 1 + 11.( 122k +1 + 11k+ 2).

Mỗi số hạng của tổng chia hết cho 133 nên 122k + 3 + 11k + 3 chia hết cho 133.

Như vậy bài toán đúng với n = k + 1. Do đó bài toán đúng với mọi n là số nguyên dương.

**VII - PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỒNG DƯ THỨC**

**Phương pháp giải**

Hai số nguyên a và b chia cho số nguyên m ( m ≠ 0) có cùng số dư ta nói a đồng dư với b theo modun m, kí hiệu a ≡ b ( mod m).

Với a, b, c, d ∈ Z và m ∈N+ ta có :

* a ≡ b ( mod m); b ≡ c ( mod m) ⇒ a ≡ c ( mod m)
* a ≡ b ( mod m); c ≡ d ( mod m) ⇒ a + c ≡ b + d ( mod m);

a - c ≡ b - d ( mod m) ; a. c ≡ b. d ( mod m)

* a ≡ b ( mod m) ⇒ an ≡ b n( mod m) với n ∈N\*
* a ≡ b ( mod m) ; c ∈ N\* ⇒ ac ≡ bc ( mod m) với c ∈ Z.

**Ví dụ 12**. Cho . Tìm số dư trong phép chia A cho 7.

*(thi học sinh giỏi Toán 9, Thành Phố Hà Nội , năm học 2008- 2009)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Nhận thấy 27309 ≡ 2 ( mod 7), mặt khỏc 23 = 8 ≡ 1 ( mod 7)⇒23k ≡ 1 ( mod 7) nờn ta cần tỡm đồng dư của số mũ với 3.

**Trỡnh bày lời giải**

Ta có 10n ≡ 1( mod 3) với n ∈N ⇒ 10n = 3k + 1 ( với k ∈N) (1)

Ta có 27309 ≡ 2 ( mod 7) ⇒ 27309 3k + 1 ≡ 23k + 1 ≡ 2.8k ≡ 2 (mod 7) (2)

Từ (1), (2) Ta có A ≡ 2 + 2 + ... + 2 (mod 7)

⇒ A ≡ 20 ≡ 6 (mod 7)

Vậy số dư trong phép chia A cho 7 là 6.

**Ví dụ 13**. Với mỗi số tự nhiên n , đặt an = 3n2 + 6n + 13. Chứng minh rằng nếu hai số ai , aj không chia hết cho 5 và có số dư khác nhau khi chia cho 5 thì ai + aj chia hết cho 5.

**Giải**

Ta có an = 3(n + 1)2 + 10.

Ta thấy nếu an không chia hết cho 5 thì n + 1 không chia hết cho 5 suy ra :(n + 1)2≡ 1 hoặc 4 ( mod 5) ⇒ an≡ 3 hoặc 2( mod 5). Do đó, nếu ai , aj đều không chia hết cho 5 và có số dư khác nhau thì ai + aj ≡ 3+ 2 ≡ 0 ( mod 5) nên ai + aj chia hết cho 5.

**IX- PHƯƠNG PHÁP ÁP DỤNG TÍNH CHẴN LẺ**

**Phương pháp giải**

Một số bài toán chia hết ta có thể giải nhanh bằng nhận xét sau :

* Trong hai số nguyên liên tiếp thì có một số chẵn và một số lẻ.
* Tổng hoặc hiệu của một số chẵn và một số lẻ là một số lẻ.
* Tổng hoặc hiệu của hai số chẵn là một số chẵn.
* Tích của các số lẻ là số lẻ.
* Trong tích chứa ít nhất một số chẵn thì kết quả là số chẵn.

**Ví dụ 14**. Cho a1 ; a2 ; a3 ;....., a7 là các số nguyên và b1 ; b2 ; b3 ;....., b7 cũng là số nguyên đó , nhưng lấy theo thứ tự khác. Chứng minh rằng (a1  - b1) (a2  - b2)... (a7  - b7) là số chẵn.

*( Thi Học sinh giỏi Anh , năm 1968)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**. Phõn tớch từ kết luận, chỳng ta chứng tỏ phải cú một nhõn tử là số chẵn. Mỗi nhõn tử là một hiệu, tổng 7 hiệu này bằng 0 ( số chẵn), nờn cỏc hiệu này khụng thể toàn là số lẻ được, mà phải cú ớt nhất một số chẵn. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Trỡnh bày lời giải**

Đặt ci = ai - bi với i = 1,2, 3, ..., 7. Ta có :

c1+ c2+ ..... + c7 = (a1  - b1) + (a2  - b2)+ ... + (a7  - b7)

= (a1 + a2+ a3 + ....+ a7) - ( b1 + b2 +b3 + ...+ b7 ) = 0

Vì có số lẻ ci  , tổng một số số là 0 thì phải có ít nhất một số chẵn ⇒ c1. c2 ... c7 chia hết cho 2, suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 15**. Cho P = (a+ b)(b+ c)(c + a) - abc với a, b, c là các số nguyên.

Chứng minh rằng nếu a + b + c chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

*(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Chu Văn An, Amsterdam, Vòng 2 - Năm học 2005- 2006)*

**Giải**

**Tỡm cỏch giải**.

Ta có P = (a+ b)(b+ c)(c + a) - abc =(a + b)(bc + ab + ac + c2) – abc

= (a + b)ab + abc + (a + b)c( a + b + c) – 2abc

= (a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc.

Do a + b + c chia hết cho 4 nên trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn.

Suy ra 2abc chia hết cho 4.

Mà (a + b + c)(ab + bc + ca) chia hết cho 4 suy ra P chia hết cho 4.

**C. Bài tập vận dụng**

1. Có thể tìm được số tự nhiên n để n2 + n + 1 chia hết cho 2025 hay không ?
2. Chứng minh rằng n3 - n + 2 không chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n.
3. Chứng minh rằng n3 - n chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n lẻ.
   1. Cho a và b là cỏc số nguyờn sao cho  chia hết cho 13. Chứng minh rằng tồn tại ớt nhất một trong hai số 2a + 3b ; 2b + 3a chia hết cho 13.
   2. Cho a, b, c là các số nguyên , chứng minh rằng (a3+ b3 + c3 ) chia hết cho 3 khi và chỉ khi (a + b + c) chia hết cho 3.
   3. Cho số M = 19931997 + 19971993
4. Chứng minh rằng M chia hết cho 15.
5. Hỏi M tận cùng bằng chữ số nào ?

*(Thi Học sinh giỏi Toán 9, Thành Phố Hồ Chí Minh, vòng 1 , Năm học 1992- 1993)*

* 1. Chứng minh rằng A= 2903n – 803n – 464n + 261n chia hết cho 1897.

*(thi vô địch toán Hunggary , năm 1978)*

* 1. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp E = {3 ; 6; 9}

*(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Vòng 2 - năm học 2006-2007)*

* 1. Chứng minh rằng nếu m chia hết cho 2 thì  chia hết cho 48, với m là một số nguyên.

*(Thi học sinh giỏi Toán 9, Bình Phước, năm học 2012-2013)*

* 1. Với a, b là các số nguyên . Chứng minh rằng nếu  chia hết cho 5 thì a4 – b4 chia hết cho 5.

*(thi học sinh giỏi Toán 9, Hải Dương , năm học 2012-2013)*

* 1. Chứng minh rằng nếu tổng hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng lập phương của chúng chia hết cho 9.

(*thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Vĩnh Long , năm học 2012-2013)*

* 1. Cho . Tìm tất cả các số tự nhiên n để A nhận giá trị là một số nguyên tố*.*

*(thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Nghệ An , năm học 2011 – 2012)*

* 1. Cho đa thức bậc ba f(x) với hệ số của  là một số nguyên dương và biết

f(5) – f(3) = 2020. Chứng minh rằng f(7) – f(1) là hợp số.

* 1. Cho số nguyên k.

1. Chứng minh (k2 + 3k + 5) chia hết cho 11 khi và chỉ khi k = 11t + 4 với t là số nguyên.
2. Chứng minh (k2 + 3k + 5) không chia hết cho 121.

*(tuyển sinh lớp 10, chuyên toán, Phổ Thông Năng Khiếu, ĐH QG TP Hồ Chớ Minh,*

*năm học 1996- 1997)*

* 1. Cho a,b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện: 

Chứng minh rằng  chia hết cho 3.

* 1. Cho Chứng minh rằng A(n) chia hết cho 60 với mọi số tự nhiên n.
  2. Cho 

a) Phân tích P thành nhân tử .

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên mà a + b + c chia hết 6 thì P – 3abc cũng chia hết cho 6.

* 1. Cho là các số nguyên thỏa mãn .  
     Chứng minh rằng: chia hết cho 5.

*(thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2010-2011)*

* 1. Cho với là số tự nhiên chẵn. Hãy chứng minh có giá trị nguyên.
  2. Cho và. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , có một và chỉ một trong 2 số hoặc chia hết cho 5.
  3. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì .

**Chuyên đề 8. PHÉP CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN**

**1.** Xét chữ số tận cùng n ta có:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| n2+n+1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 1 |

⇒ n2+ n + 1 không chia hết cho 5 không chia hết cho 2025.

**2.** a) Ta có .

n – 1; n là hai số nguyên liên tiếp nên 

n – 1; n ; n+1 là ba số nguyên liên tiếp nên 

 không chia hết cho 6.

b) Ta có 

Với n là số lẻ , đặt n = 2k + 1, biểu thức có dạng:



Ta có k và k + 1 là hai số nguyên liên tiếp 

- Với k ⋮ 3 thì 

- Với k : 3 dư 1 thì 2k + 1 ⋮ 3 ⇒

- Với k : 3 dư 2 thì k + 1 ⋮ 3 ⇒

Vậy  với k là số tự nhiên.

Mà ƯCLN (3; 8) = 1 nên 

**3.** Ta có .

Mà  và  nên  Vậy tồn tại ít nhất một trong hai số 2a + 3b ; 2b + 3a chia hết cho 13.

**4.** Xét 

Mà 

Suy ra  khi và chỉ khi .

**5.** a) Vì 15 = 3.5 mà (3, 5) = 1 nên ta chứng minh M chia hết cho 3 và 5.

Áp dụng hằng đẳng thức ta có :

19931997 - 1 = 19931997 - 11997 chia hết cho 1993 -1 , mà 1993 -1 chia hết cho 3 nờn(19931997 - 1) chia hết cho 3.

19971993 + 1 = 19971993 + 11993 chia hết cho 1997 +1 , mà 1997 +1 chia hết cho 3

nờn (19971993 + 1) chia hết cho 3.

Do đó 19931997 + 19971993 = (19931997 - 1) + (19971993 + 1) chia hết cho 3.

19931997 - 1993 = 1993[(19932)998 - 1] chia hết cho 19932 + 1, mà 19932 + 1 chia hết cho 5 nờn 19931997 - 1993 chia hết cho 5

19971993 - 1997 = 1997[(19972)992 - 1] chia hết cho 19972 + 1, mà 19972 + 1 chia hết cho 5 nờn 19971993 - 1997 chia hết cho 5

.Do đó 19931997 - 1993 + 19971993 - 1997 chia hết cho 5

⇒ 19931997 + 19971993 - 3990 chia hết cho 5 ⇒ 19931997 + 19971993 chia hết cho 5

Suy ra M chia hết cho 15.

b) Ta có 19931997 + 19971993 chia hết cho 5 nên M có tận cùng là 0 hoặc 5.

Mặt khác 19931997 + 19971993  là chẵn nên M có tận cùng là 0.

**6.** Áp dụng công thức  với a, b, n là số tự nhiên a ≠ b



.

Mà hay A ⋮ 7



.

Mà 

Mà ƯCLN (7; 271) = 1 ⇒ A ⋮ 7.271 hay A ⋮ 1897.

**7.** *Cách 1.*Chia dãy các số nguyên dương từ 1 đến 2006 thành 201 đoạn : [1 ; 10], [11 ; 20], [21 ; 30], ... , [1991 ; 2000], [2001 ; 2006]. Vì X có 700 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lí Đi-rich lê, tồn tại ít nhất 4 số trong 700 số trên thuộc cùng một đoạn. Mặt khác, với 4 số bất kì, luôn tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư, hiệu của hai số đó chia hết cho 3, suy ra hiệu hai số này thuộc tập hợp E = {3 ; 6; 9}.

*Cách 2.*

Chia X thành 3 tập hợp như sau :

A = { x / x = 3k + 1, k ∈ N};

B = { x / x = 3k + 2, k ∈ N};

C = { x / x = 3k + 3, k ∈ N};

Có 700 số được chia thành 3 tập hợp, theo nguyên lí Đi-rich lê, tồn tại một tập hợp có ít nhất 234 phần tử. Trong tập hợp này luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị. Thật vậy nếu các số trong tập hợp chỉ các nhau ít nhất 9 đơn vị thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn 9.233 = 2097 > 2006, mâu thuẫn với giả thiết. Suy ra trong X luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6. Vậy trong tập

hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x - y thuộc tập hợp E = {3 ; 6; 9}.

**8.** Đặt m = 2k ( k ∈ Z)

Ta có 

Xét k chẵn 

Xét k lẻ 

Xét k ⋮ 3

Xét k không chia hết cho 3



Mà ƯCLN (3; 16) = 1 nên  hay chia hết cho 48.

**9.** Ta có 

(vì 10b2 ⋮5).

* *Trường hợp 1*. 

Mà  nên .

* *Trường hợp 2:* a + b ⋮ 5 mà  nên .

Vậy  chia hết cho 5 thì a4 – b4 chia hết cho 5.

**10.** Đặt hai số nguyên đó là a và b thì a + b ⋮ 3

Xét 

suy ra 

**11.** Xét n = 0 thì A = 1, không phải số nguyên tố **.**

Xét với n = 1 thì A = 3 là số nguyên tố.

Xét n ≥ 2 .

Ta có 

.

Mà 

 và  nghĩa là A không phải là số nguyên tố với n ≥ 2. Vậy chỉ có n = 1 thỏa mãn.

**12.** Theo đề bài f(x) có dạng 

Ta có: 



Ta có: 





## Vậy f(7) – f(1) là hợp số.

**13.**

1. Ta có k2 + 3k + 5 = (k - 4)2 + 11(k - 1). Suy ra k2 + 3k + 5 chia hết cho 11 khi và chỉ khi (k - 4)2 chia hết cho 11. Do 11 là số nguyên tố nên điều này chỉ xảy ra khi k – 4 chia hết cho 11 hay k = 11t + 4 với t là số nguyên.
2. Giả sử có k nguyên sao cho (k2 + 3k + 5) chia hết cho 121. Khi đó (k2 + 3k + 5) chia hết cho 11. Theo câu a) thì k = 11t + 4, thay vào ta có :

k2 + 3k + 5 = (k - 4)2 + 11(k - 1) = 121t2 + 121t + 33 không chia hết cho 121 ( vì 33 không chia hết cho 121). Mâu thuẫn.

Vậy (k2 + 3k + 5) không chia hết cho 121.

**14.** Từ giả thiết ta có



 vì abc ≠ 0

Ta có: 

.

**15.** Ta có 

- Nếu n chẵn .

Nếu n lẻ .

- Ta có n – 1; n; n + 1 là ba số nguyên liên tiếp nên 

- Nếu n ⋮ 5 thì A ⋮ 5

Nếu n : 5 dư 1 hoặc 4 thì 

Nếu n : 5 dư 2 hoặc 3 ⇒ n2 : 5 dư 4  .

Mà 3; 4; 5 nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên A ⋮ 3.4.5 hay A ⋮60.

**16.** a) Ta có: 







.

b) Từ a + b + c ⋮ 6 ⇒ P ⋮ 6

ít nhất tồn tại một số chẵn .

**17.** Ta có 

Xét 

Mà .

- Nếu 

- Nếu a = 5k ± 1 thì .

- Nếu a = 5k ± 2 thì .

Vậy với a là số nguyên thì a5 – a ⋮ 5.

Tương tự ta có 



Mà .

18.Ta có:  
là các số nguyên liên tiếp ⇒(1)  
Vì là số chẵn nên ta đặt ().  
  
là các số nguyên liên tiếp ⇒ ⇒ (2)  
Từ (1) và (2)⇒.

19.Ta có .

Với n là số tự nhiên thì 4n+1 chỉ có thể tận cùng là 4 hoặc 6 ⇒ an +bn chỉ có thể tận cùng là 6 hoặc 8 không chia hết cho 5 và bn không cùng chia hết cho 5. (1)

Xét    (vì 2n+1 lẻ)



Từ (1) và (2) suy ra có một và chỉ một trong 2 số hoặc chia hết cho 5.

**20.** Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  chia 3 dư 1

 (1)

Mặt khác p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  là hai số chẵn liên tiếp.

 (2)

\* Mà (3,8) 1, từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.