



SÔU GIAÙO DUÏC ÑAØO TAÏO BÌNH
PHỒÙC

TRỒÔNG THPT HUỠNG VỒÔNG

**SAÙNG KIEÁN KINH
NGHIEÄM
MOÂN TOAÙN
ÑÈA TAØI: *HƯỚNG DẪN HỌC
SINH HỌC TỐT PHẦN
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC***

GV : TRẦC THỜ HUỠNH
LIÊN



A/ PHAÀN MÔU ÑAÀU

I/ LÝ DO CHỌN NỀ TÀI :

Lượng giác là một bộ phận trong chương trình Toán phổ thông, công thức lượng giác tương đối nhiều và khó nhớ, nếu chỉ học thuộc lòng công thức thì học sinh rất dễ nhầm lẫn. Mặt khác trong tất cả các đề thi Đại học, cao đẳng đều có ít nhất một câu giải phương trình lượng giác và câu này học sinh dễ lấy điểm nếu các em biết cách học và cách nhớ.

Theo tôi khi dạy phần lượng giác thì giáo viên cần thực hiện những công việc sau:

- 1/ Giúp học sinh hiểu, thuộc và chứng minh được các công thức lượng giác.
- 2/ Giúp học sinh một số nhận xét cơ bản để chứng minh một đẳng thức lượng giác hay rút gọn một biểu thức lượng giác.
- 3/ Giúp học sinh một số nhận xét cơ bản khi nhìn phương trình đã cho biết sử dụng công thức nào để đưa phương trình đó về dạng phương trình đã biết cách giải.
- 4/ Giúp học sinh nhận và loại nghiệm của phương trình lượng giác có điều kiện.

Nội dung đề tài này tôi chỉ gợi ý một vài cách nhớ công thức lượng giác và một số phương pháp giải phương trình lượng giác vì tôi nhận thấy công thức lượng giác học sinh thường không nhớ và đa số học sinh rất ngại phương trình lượng giác có điều kiện. Vì vậy để giúp các em học sinh nhớ nhất nhất về phần lượng giác trong các kỳ thi toán mình dẫn viết về đề tài này.

Tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy cô và đồng nghiệp để bài viết được hoàn thiện hơn.

II/ NỘI DUNG :

Bài viết gồm các phần sau:

- 1/ Cách học và ghi nhớ công thức lượng giác.
- 2/ Bài toán tìm nghiệm chung khi biết nghiệm và tìm nghiệm chung khi biết nghiệm chung.
- 3/ Một số phương pháp biến đổi phương trình lượng giác.
- 4/ Cách nhận và loại nghiệm của phương trình lượng giác có điều kiện.

Đồng Xoài, ngày 21 tháng 2 năm 2011

Giáo viên

TRÁC THỊ HUỲNH LIÊN

B/ PHÀN NỘI DUNG**I/ CÁCH HỌC VÀ GHI NHỚ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC****1/ HEÀ THOUC CÔ BAUN :** (phần này ta ghi nhớ từ định nghĩa giá trị lượng giác)

1/ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

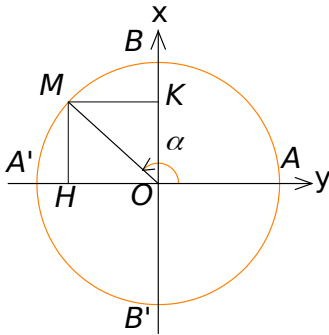
2/ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

3/ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

4/ $\tan x \cdot \cot x = 1$

5/ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

6/ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$



Khi dạy định nghĩa giá trị lượng giác góc α , giáo viên lưu ý tọa độ điểm ngọn cung M là (x;y) và $\sin \alpha = y$,

$$\cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0), \cot \alpha = \frac{x}{y} (y \neq 0)$$

Từ đó giáo viên cho học sinh tìm tọa độ điểm ngọn cung M ở một vài vị trí đặc biệt, ví dụ : $\alpha = 150^\circ$; $\alpha = -390^\circ$, $\alpha = \frac{\pi}{3}, \dots$

Sau đó giáo viên hướng dẫn học sinh tìm hiểu công thức 1,2,3 từ định nghĩa, công thức 4,5,6 học sinh phải chứng minh được, xem như một ví dụ để giáo viên đi đến dạng toán chứng minh một đẳng thức lượng giác.

2/ CUNG LIÊN KẾT : (để học thuộc công thức này trước hết các em phải thuộc định nghĩa các cung đối, bù, phụ, hơn kém ...Sau đó thuộc phần cách nhớ và áp dụng vào bài tập)

Hai cung nối nhau laø x vaø - x**Hai cung bù nhau****laø x vaø $\pi - x$**

$\cos(-x) =$

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}$$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) =$

$$\begin{aligned} \tan(\pi - x) &= -\tan x \\ \cot(\pi - x) &= -\cot x \end{aligned}$$

Hai cung phụ nhau laø x vaø $\frac{\pi}{2} - x$ **Hai cung hơn kém****nhau π laø x vaø $\pi + x$**

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$$\begin{aligned} \tan(\pi + x) &= \tan x \\ \cot(\pi + x) &= \cot x \end{aligned}$$

Hai cung hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$ laø x vaø $\frac{\pi}{2} + x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$$

CÀUCH NHỒU : Giáo viên đóng khung những trường hợp đặc biệt và ghi nhớ trường hợp đặc biệt đó, trường hợp nào không được nhắc đến thì thêm dấu trừ vào
cos ñoái, sin buø, phuï cheuo
Hôn keùm $\frac{\pi}{2}$ ta coù tang vaø

cotang

Hôn keùm $\frac{\pi}{2}$, cheuo, sin moät

3/**COÂNG THỨC COÃNG** : (phần này các em học thuộc cách ghi nhớ, ưu ý ta luôn viết cùng a trước, cùng b sau theo đúng thứ tự)

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\cot(a + b) = \frac{\cot b \cdot \cot a - 1}{\cot b + \cot a}$$

CÀUCH NHỒU :

cos thì cos cos, sin sin

Sin thì sin cos, cos sin

ñi cương

Cos ñoái, sin khoâng

(công thức $\tan(a \pm b)$ và $\cot(a \pm b)$ học sinh tự chứng

minh)

$$\cot(a - b) = \frac{\cot b \cdot \cot a + 1}{\cot b - \cot a}$$

4/**COÂNG THỨC NHAÂN**: (phần này các em tự chứng minh, xem như bài tập)

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

5/**COÂNG THỨC HÃI BAÛC NAÂNG CUNG**

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

6/**COÂNG THỨC TÍNH $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$ THEO $t = \tan \frac{a}{2}$**

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

7/**COÂNG THỨC BIEÁN ÑOÀI** : (phần này các em học thuộc cách nhớ cho công thức biến tổng thành

tích, sau đó suy ngược lại công thức biến tích thành tổng)

BIEÁN TÍCH THAØNH TOÃNG :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

NĂM HỌC 2010-2011

CÀUCH NHỒU : 1/ Cos coãng cos baøng
hai cos cos

Cos trøø cos baøng

trøø hai sin sin

Sin coãng sin baøng

hai sin cos

Sin trøø sin baøng hai

cos sin

2/ cos nhaân cos baøng $\frac{1}{2}$ cuûa cos coãng
cos

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

BIẾN TOÁN THAØNH TÍCH

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

CAÙCH NHÔÙ : tang mình coäng vôùi tang ta

II/ BÀI TOÁN TÌM NGỌN CUNG KHI BIẾT CUNG

Ví dụ : Tìm số ngọn cung của cung x :

$$1/ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$2/ x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$3/ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

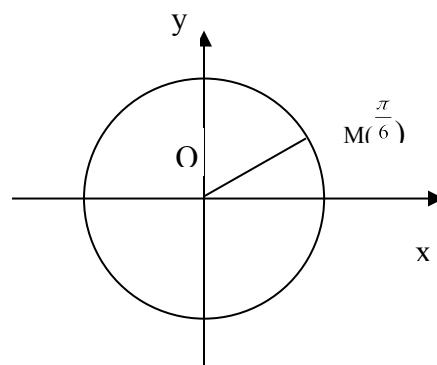
Giải:

Phương pháp: Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta lần lượt chọn các giá trị $k = 0, 1, 2, \dots$ sau đó biểu diễn ngọn cung trên đường tròn lượng giác đến khi ngọn cung vừa biểu diễn trùng với ngọn cung đầu tiên thì ta dừng lại, đếm số ngọn cung đã biểu diễn trên đường tròn lượng giác và kết luận.

$$1/ \text{ Khi } k = 0 \text{ thì } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{ngọn cung của } x \text{ nằm ở } M\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

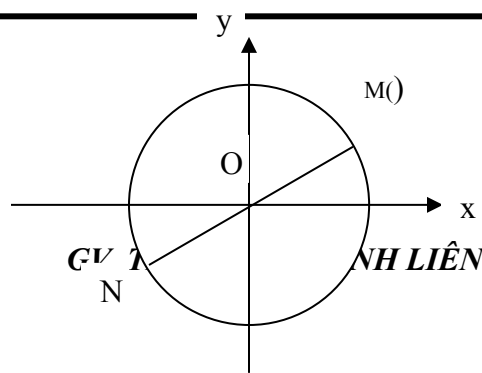
$$\text{Khi } k = 1 \text{ thì } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow \text{ngọn cung của } x \text{ quay lại } M\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Kết luận : } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ chỉ có 1 ngọn cung nằm ở } M\left(\frac{\pi}{6}\right)$$



$$2/ \text{ Khi } k = 0 \text{ thì } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{ngọn cung của } x \text{ nằm ở } M\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Khi } k = 1 \text{ thì } x = \frac{\pi}{6} + \pi \Rightarrow \text{ngọn cung của } x \text{ nằm ở } N$$



(N là điểm đối xứng của M qua O)

Khi $k = 2$ thì $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow$ ngọn cung của x quay lại M ($\frac{\pi}{6}$)

Kết luận : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ có 2 ngọn cung nằm ở M và N.

3/ Khi $k = 0$ thì $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ ngọn cung của x nằm ở M ($\frac{\pi}{6}$)

Khi $k = 1$ thì $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ngọn cung của x nằm ở P

Khi $k = 2$ thì $x = \frac{\pi}{6} + \pi \Rightarrow$ ngọn cung của x nằm ở N

(N là điểm đối xứng của M qua O)

Khi $k = 3$ thì $x = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ ngọn cung của x nằm ở Q

(Q là điểm đối xứng của N qua O)

Khi $k = 4$ thì $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow$ ngọn cung của x quay lại M ($\frac{\pi}{6}$)

Kết luận : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ có 4 ngọn cung nằm ở đỉnh hình vuông MNPQ nội tiếp trong đường tròn lượng giác.

Tổng quát:

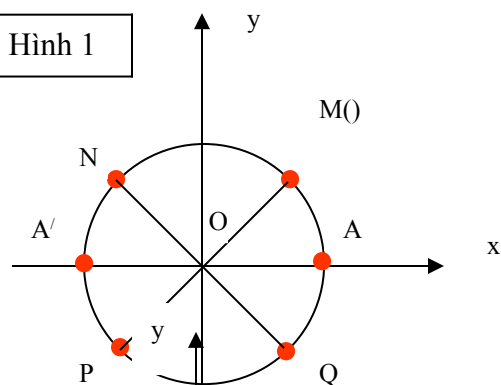
Nếu $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n} (k, n \in \mathbb{Z})$ thì x có n ngọn cung nằm ở đỉnh đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn lượng giác.

III/ BÀI TOÁN TÌM CUNG KHI BIẾT NGỌN CUNG

Phương pháp: Để viết được cung x ta cần nhớ phân tổng quát ở bài toán tìm ngọn cung khi biết cung, do đó ta nhóm những ngọn cung nào tạo thành một đa giác nội tiếp trong đường tròn lượng giác lại và viết thành một cung, còn các ngọn cung khác nếu không gom lại được thì ta viết riêng

Ví dụ : Cho cung x có các ngọn cung nằm trên đường tròn lượng giác như hình vẽ. Hãy tìm cung x ?

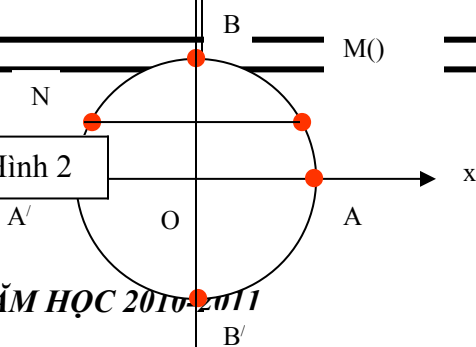
Hình 1



Bốn đỉnh M, N, P, Q tạo thành một hình vuông nội tiếp trong đường tròn lượng giác nên ta gom chung, hai đỉnh A, A' đối xứng nhau qua O nên ta viết chung thành một cung được

Vậy các cung x ở hình 1 là
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = h\pi \end{cases} (k, h \in \mathbb{Z})$$

Hình 2



Bốn đỉnh A, B, A', B' tạo thành một hình vuông nội tiếp trong đường tròn lượng giác nên ta gom chung, Hai đỉnh M, N hợp với đỉnh B' tạo thành tam giác đều nội tiếp trong đường tròn lượng giác nên ta viết chung thành một cung được. Vậy các

cung x ở hình 2 là
$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{h\pi}{3} \end{cases} (k, h \in \mathbb{Z})$$

PHƯƠNG PHÁP THU GỌI NGHIỆM :

1/ Nếu $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \beta + h2\pi \end{cases}$ với $\alpha = \beta \pm \pi$ thì ta ghi $x = \alpha + l\pi$ ($k, h, l \in \mathbb{Z}$)

2/ Nếu $\begin{cases} x = \alpha + k\frac{2\pi}{m} \\ x = \beta + h\frac{2\pi}{n} \end{cases}$ (1) với m nguyên cùng dấu (1) hoặc với n nguyên cùng dấu (2)

là bội chung nhỏ nhất của $m + n$ thì ta ghi $x = \alpha + \frac{l2\pi}{n+m}$ ($k, h, l, n, m \in \mathbb{Z}$)

3/ Nếu $\begin{cases} x = \alpha + k\frac{2\pi}{m} \\ x = \beta + h\frac{2\pi}{n} \end{cases}$ (1) với m nguyên cùng dấu (1) là bội chung của n nguyên cùng dấu (2)

thì ta ghi $x = \beta + \frac{h2\pi}{m}$ ($k, h, n, m \in \mathbb{Z}$)

IV/ MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Phương pháp 1: *Biến đổi phương trình đã cho về dạng tích số :*

1/ Khi hai vế phương trình có những thừa số giống nhau và có chứa x thì ta phân chia về một vế và đưa về phương trình tích .

Ví dụ 1: Giải phương trình : $\sin x (2 \cos x + 1) = \cos^2 x \sin x$

Giải : $\sin x (2 \cos x - 1) = \cos^2 x \sin x \Leftrightarrow \sin x (\cos^2 x - 2 \cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = 2h\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2/ Nếu các góc trong phương trình có dạng $u, 2u, \dots$ thì ta thường dùng công thức nhân đôi hoặc công thức hai bậc nâng cùng để đưa về phương trình chẵn theo một góc

Ví dụ 2 : Giải phương trình : $\sin 2x = 2 \cos^2 x$

Giải : $\sin 2x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + h\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + h\pi \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$

hoặc $\sin 2x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 1$

Ví dụ 2 : Giải phương trình : $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$

Giải : $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos 4x = 0$
 $\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 0$
 $\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cdot \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + h\pi \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

3/ Nếu trong phương trình có chứa $\cos^2 x, \sin^2 x$ thì ta dùng công thức hai bậc nâng cùng

Ví dụ 3: Giải phương trình : $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$

Giải : $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2}$
 $\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$
 $\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 7x \cos x$
 $\Leftrightarrow \cos x (\cos 7x - \cos 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x = 3x + 2h\pi \\ 7x = -3x + 2h\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{h\pi}{2} \\ x = \frac{h\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{h\pi}{2} \\ x = \frac{h\pi}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $\begin{cases} x = \frac{h\pi}{2} \\ x = \frac{h\pi}{5} \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$

4/ Nếu trong phương trình có dạng tổng thì ta biến thành tích hoặc ngược lại

Ví dụ 4: Giải phương trình : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Giải : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = 0$
 $\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$
 $\Leftrightarrow \sin 2x (2 \cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + h\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + h\pi \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 5: Giải phương trình : $\cos x \cos 7x = \cos 3x \cos 5x$

Giải : $\cos x \cos 7x = \cos 3x \cos 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + 2k\pi \\ 6x = -2x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài tập : Giải các phương trình sau :

1) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$

2) $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

3) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

4) $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$

5) $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

6) $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$

7) $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

8) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

9) $9 - 13 \cos x = -\frac{4}{1 + \tan^2 x}$

10) $3(\sin x - \cos x) + \sin 2x = 3$

11) $\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + \cos^2 x = -2$

12) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$

13) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$

14) $\sin 5x - \sin x = \sqrt{3} \sin 2x$

15) $(\cos x + \sin x)(1 - \sin x) = \cos 2x$

16) $\cos^4 x - \cos 2x + 2 \sin^6 x = 0$

17) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$

18) $\cos^2 2x + 2 \cos^2 x = 1$

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ để đưa phương trình đã cho về dạng phương trình đại số

1/ Coi thể đặt ẩn phụ $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(hoặc $t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$)

Ví dụ 1: Giải phương trình : $6 \tan^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x$

Giải: Điều kiện : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$6 \tan^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow 6 \tan^2 x = 2 \cos 2x + 1$

nên ta đặt ẩn phụ $t = \tan x \Rightarrow \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Khi đó phương trình (1) trở thành : $6t^2 = 2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + 1 \Leftrightarrow 6t^4 + 7t^2 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \\ t^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + h\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + h\pi \end{cases} \quad (h \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{6} + h\pi \quad (h \in \mathbb{Z})$

2/ Biến đổi phương trình đã cho về dạng có những biểu thức đồng dạng để từ đó ta đặt được ẩn phụ

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6 \quad (1)$

Giải: Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow (\tan x + \cot x) + (\tan^2 x + \cot^2 x) + (\tan^3 x + \cot^3 x) = 6$$

Đặt $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$, vì $|\sin 2x| \leq 1$ nên $|t| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2, \tan^3 x + \cot^3 x = t^3 - 3t$$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + h\pi \quad (h \in \mathbb{Z})$$

(thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + h\pi \quad (h \in \mathbb{Z})$

3/ Phương trình có chứa đồng thời $(\sin x \pm \cos x)^m, (\sin x \cdot \cos x)^n$ thì ta đặt $t = \sin x \pm \cos x$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1 \quad (1)$

Giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Điều kiện: $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x) = t^3 - 3t \left(\frac{t^2 - 1}{2} \right)$$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^3 - 3t \left(\frac{t^2 - 1}{2} \right) = 2t - 1 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t(t^2 - 1) = 4t - 2$

$$\Leftrightarrow t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

4/ Phương trình có dạng : $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x - \cot x) + c = 0$

Ta đặt $t = \tan x - \cot x \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{3}(\tan^2 x + \cot^2 x) + 2(\sqrt{3} - 1)(\tan x - \cot x) - 4 - 2\sqrt{3} = 0$

Giải:

Điều kiện : $x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Đặt $t = \tan x - \cot x \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $\sqrt{3}(t^2 + 2) + 2(\sqrt{3} - 1)t - 4 - 2\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}t^2 + 2(\sqrt{3} - 1)t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$* t = -2 \Leftrightarrow \tan x - \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 - \sqrt{2} = \tan \alpha \\ \tan x = -1 + \sqrt{2} = \tan \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + h\pi \\ x = \beta + h\pi \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa đk)}$$

$$* t = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x - \cot x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \cot 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + l\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{2} \quad (l \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa đk)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $\begin{cases} x = \alpha + h\pi \\ x = \beta + h\pi \end{cases}$ và $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{2} \quad (k, h, l \in \mathbb{Z})$

Bài tập: A/ Giải các phương trình sau:

$$1/ 3 \cos x + 4 \sin x + \frac{6}{3 \cos x + 4 \sin x + 1} = 6$$

$$3/ 2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0$$

$$5/ \cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$7/ \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$$

$$9/ 2 + \cos x = 2 \tan \frac{x}{2}$$

$$11/ 1 + \tan x = 2 \sqrt{2} \sin x$$

$$13/ \sin \left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} \right)$$

B/ Tìm m để phương trình : $\frac{m^2 - 1}{\cos^2 x} - 2m \tan x - m^2 + 2 = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi; \frac{\pi}{2})$

C/ Tìm m để phương trình : $\cos^2 x + 2(1 - m)\cos x + 2m - 1 = 0$ có 4 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

D/ Tìm m để phương trình : $\tan^4 x + (2m - 1)\tan^3 x + (m^2 - 2m)\tan^2 x - (m^2 - m + 1)\tan x - m + 1 = 0$

có 4 nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

E/ Cho phương trình : $2\left(\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x\right) + m\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1$ (1)

a/ Giải phương trình khi $m = 9$

b/ Tìm m để phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$

F/ Cho phương trình : $4\tan^2 x + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0$ (1)

a/ Giải phương trình khi $m = -1$

b/ Tìm m để phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

G/ Cho phương trình : $\sin^3 x - \cos^3 x = m$ (1)

a/ Giải phương trình khi $m = 1$

b/ Tìm m để phương trình (1) có đúng 3 nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$

H/ Cho phương trình : $4(\cos x - \sin x) + \sin 2x = m$ (1)

a/ Giải phương trình khi $m = -1$

b/ Tìm m để phương trình (1) vô nghiệm

5/ Phương trình lượng giác có nhận loại nghiệm :

Khi giải một phương trình lượng giác nào đó mà quá trình giải cuối cùng dẫn đến việc phải tìm giao của hai tập hợp T_1, T_2 , vấn đề đặt ra là làm sao một học sinh trung bình có thể tìm $T_1 \cap T_2$ được dễ dàng. Thông thường ta có hai cách làm :

C₁: Dùng đường tròn lượng giác

C₂: Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định

a/ Việc chọn nghiệm được nảy sinh từ việc giải phương trình lượng giác không mẫu mực:

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$ (1)

Phân tích:

Phương pháp bình phương hay đặt ẩn phụ đều khó khăn. Ta giải phương trình (1) bằng phương pháp đánh giá miền giá trị 2 vế làm xuất hiện bất đẳng thức đối lập.

Giải: VT (1) $\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x} = 2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{2 - \cos^2 3x} = \cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ 2 - \cos^2 3x = \cos^2 3x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = 1$$

VT (1) $= 2(1 + 2\sin^2 2x) \geq 2$ vì $\sin^2 2x \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $1 + 2\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \quad (*)$$

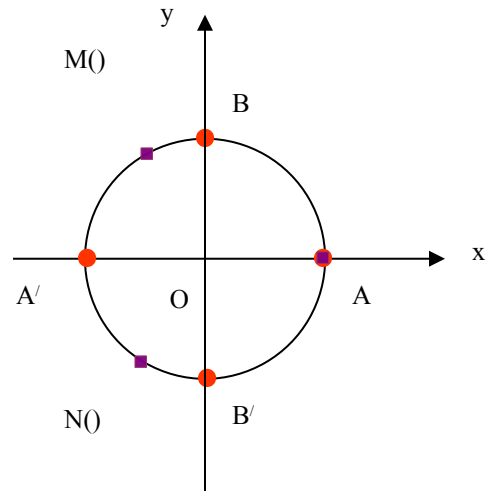
Để giải hệ (*) ta có nhận xét:

- a. Ta có thể tìm nghiệm mỗi phương trình của (*). Nếu nghiệm tìm được đơn giản, ta tìm trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn cung thuộc các tập nghiệm mỗi phương trình. Chọn lấy những điểm ngọn chung từ đó tìm được nghiệm của hệ cũng là nghiệm của phương trình ban đầu. Với ý tưởng đó ta dùng C_1

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{l\pi}{2} \end{cases}$$

(cần lưu ý với học sinh là các tham số nguyên trong mỗi phương trình là khác nhau)

+ Trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn cung thuộc tập nghiệm của mỗi phương trình được biểu thị lần lượt bởi các dấu (.) chấm tròn và ($\square$) ô vuông trên hình vẽ. Chỉ có 1 điểm ngọn chung tại A.



+ Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- b. Ta cũng có thể chọn giao của hai nghiệm bằng cách tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định.

$$\text{Thật vậy: (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{l\pi}{2} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm chung nếu : $\exists k, l \in \mathbb{Z} : \frac{k2\pi}{3} = \frac{l\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow l = \frac{4k}{3} = k + \frac{k}{3} \text{ (nên rút } l \text{ theo } k \text{ vì hệ số đi với 1 nhỏ hơn)}$$

$$\text{Do } l, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k}{3} = m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 3m$$

Thay vào tập nghiệm đầu tiên của hệ ta có nghiệm của phương trình (1) là $x = m2\pi$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sin 4x(\cos x - 2 \sin 4x) + \cos 4x(1 + \sin x - 2 \cos 4x) = 0$ (1)

Giải:

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow (\sin 4x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 4x) - 2(\sin^2 4x + \cos^2 4x) + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x + \cos 4x = 2 \quad (2)$$

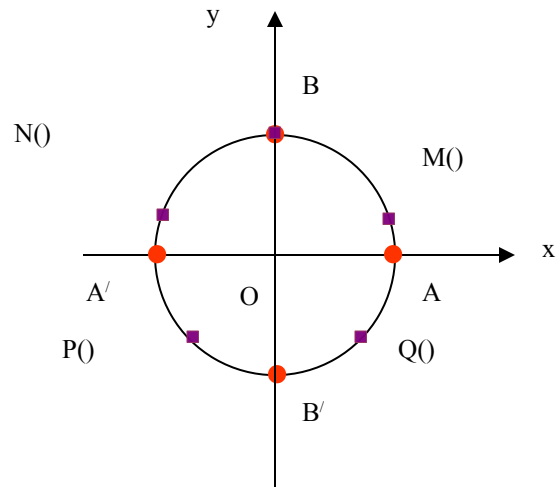
$$\text{Do } \begin{cases} \sin 5x \leq 1 \\ \cos 4x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{VT (2)} \leq 2$$

$$\text{Vậy (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} (*)$$

Cách 1:

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{l\pi}{2} \end{cases}$$

+ Biểu diễn các điểm ngọn cung thuộc tập nghiệm của hai phương trình trên đường tròn lượng giác chúng có 1 điểm ngọn chung là B.



Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{2} + m2\pi$

Nhận xét: Ta nghĩ tới C_1 khi việc biểu diễn các điểm ngọn cung thuộc tập nghiệm mỗi phương trình trên đường tròn lượng giác là ít vị trí. Trong trường hợp số điểm ngọn của chúng có quá nhiều vị trí và phức tạp thì ta sẽ nghĩ tới C_2 . Bây giờ ta dùng C_2 để chọn nghiệm thử

Cách 2:

$$\text{Hệ có nghiệm chung nếu : } \exists k, l \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow 4k = 5l - 1 \Leftrightarrow k = l + \frac{l-1}{4}$$

$$\text{Do } l, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{l-1}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{l-1}{4} = m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow l = 4m + 1$$

Từ đó thay vào tập nghiệm thứ 2 $\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + m2\pi$

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sin 4x \cdot \cos 16x = 1$ (1)

Phân tích: Có thể biến đổi tích thành tổng hay đánh giá miền giá trị các vế. Mỗi nhận xét cho ta cách giải riêng. Tuy nhiên việc biến đổi tích thành tổng cho lời giải ngắn gọn hơn.

Cách 1: Biến tích thành tổng

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sin 20x - \sin 12x = 2 \Leftrightarrow (1 - \sin 20x) + (1 + \sin 12x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 20x = 1 \\ \sin 12x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{10} \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{l\pi}{6} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm chung nếu: $\exists k, l \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{10} = -\frac{\pi}{24} + \frac{l\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5l - 2}{3} = 1 + \frac{2(l - 1)}{3}$$

Do $l, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{l - 1}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{l - 1}{3} = m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow l = 3m + 1$

Thay vào tập nghiệm thứ 2 của hệ phương trình. $\Rightarrow$ nghiệm của phương trình (1) là: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2}$

Cách 2: Đánh giá miền giá trị hai vế:

Ta có: Từ (1) $\Rightarrow |\sin 4x| \cdot |\cos 16x| = 1$ (1') (1')

Do $\begin{cases} |\sin 4x| = 1 \\ |\cos 16x| = 1 \end{cases} \Rightarrow |\sin 4x| \cdot |\cos 16x| \leq 1$

Vậy (1') $\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin 4x| = 1 \\ |\cos 16x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = \pm 1 \\ \cos 16x = \pm 1 \end{cases}$

Mặt khác do: $\sin 4x \cdot \cos 16x = 1 > 0$ nên $\sin 4x$ và $\cos 16x$ cùng dấu

Do đó $\begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 16x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin 4x = -1 \\ \cos 16x = -1 \end{cases}$ (2)

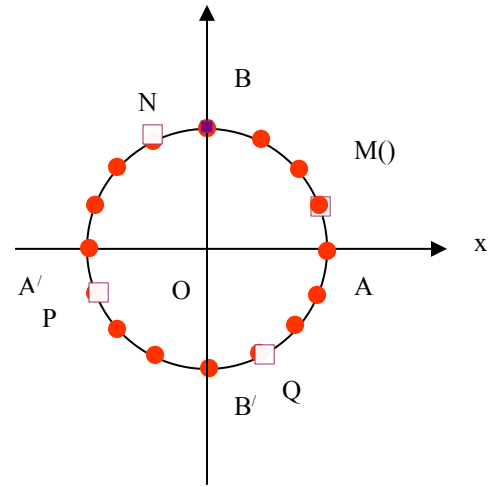
Từ (1) $\Rightarrow$ (2) nhưng nếu (2) thỏa thì (1) cũng thỏa. Vậy (1) $\Leftrightarrow$ (2)

a/ $\begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 16x = 1 \end{cases}$ (a) (ta giải hệ (a) bằng hai cách để thấy rõ ưu điểm của mỗi cách)

Cách 1: Biểu diễn nghiệm mỗi phương trình trên đường tròn lượng giác

Ta có (a) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{l\pi}{8} \end{cases}$

Biểu diễn các điểm ngọn cung của hai phương trình trên đường tròn lượng giác. Có 4 điểm ngọn cung trùng nhau là M, N, P, Q.



Vậy nghiệm của hệ (a) là: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2}$

Cách 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:

Hệ có nghiệm chung nếu: $\exists k, l \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{l\pi}{8} \Leftrightarrow l = 4k + 1$

Thay vào tập nghiệm phương trình thứ 2 của hệ, nghiệm phương trình đã cho là:

$$x = (4k + 1) \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

b/ $\begin{cases} \sin 4x = -1 \\ \cos 16x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{l\pi}{8} \end{cases}$

Hệ có nghiệm chung nếu: $\exists k, l \in \mathbb{Z} : -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{16} + \frac{l\pi}{8} \Leftrightarrow 2l = 8k - 3$ Vô lí vì VT chẵn, VP lẻ

$\Rightarrow$ Hệ (b) vô nghiệm

Kết luận: Vậy nghiệm phương trình là $x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2}$

b/ Việc chọn nghiệm phương trình được nảy sinh do giải phương trình lượng giác chứa tang, cotang hoặc có chứa ẩn số ở mẫu:

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\tan 2x \cdot \tan 3x \cdot \tan 5x = \tan 2x - \tan 3x - \tan 5x$ (1)

Phân tích: Nguyên tắc giải phương trình loại này là:

- Đặt điều kiện cho bài toán có nghĩa.
- Sau đó, giải phương trình và kiểm tra nghiệm tìm được có thỏa điều kiện đặt ra hay không?
- Kết luận nghiệm.

Giải: Điều kiện:
$$\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \\ \cos 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq (2l+1)\frac{\pi}{4} \\ x \neq (2m+1)\frac{\pi}{6} \\ x \neq (2h+1)\frac{\pi}{10} \end{cases}$$

Với điều kiện (1) $\Leftrightarrow \tan 5x(1 + \tan 2x \cdot \tan 3x) = \tan 2x - \tan 3x$ (2)

Nhận xét:

$1 + \tan 2x \cdot \tan 3x \neq 0$ vì nếu: $1 + \tan 2x \cdot \tan 3x = 0 \Rightarrow \tan 2x = -\tan 3x$ (VT=0 $\Rightarrow$ VP=0)

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 2x = 0 \text{ vô lý}$$

Vậy (2) $\Leftrightarrow \tan 5x = \frac{\tan 2x - \tan 3x}{1 + \tan 2x \cdot \tan 3x} = \tan(-x)$

$$\Leftrightarrow 5x = -x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{6}$$

Ta kiểm tra nghiệm tìm được có thỏa các điều kiện hay không?

a/ Điều kiện (a) bị vi phạm nếu: $\exists k, l \in \mathbb{Z} : \frac{k\pi}{6} = (2l+1)\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2k = 6l + 3$ (vô lý vì $k, l \in \mathbb{Z}$)

Vậy $x = k\frac{\pi}{6}$ thỏa điều kiện (a)

b/ Điều kiện (b) bị vi phạm nếu $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k\frac{\pi}{6} = (2m+1)\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow k = 2m+1$ là số nguyên lẻ

Vậy điều kiện (b) thỏa nếu $k = 2n$, khi đó nghiệm pt là $x = n\frac{\pi}{3}$

c/ Điều kiện (c) bị vi phạm nếu $\exists n, h \in \mathbb{Z} : n\frac{\pi}{3} = (2h+1)\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow 10n = 6h + 3$ (vô lý vì $n, h \in \mathbb{Z}$)

Vậy $x = n\frac{\pi}{3}$ thỏa điều kiện (c). Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là: $x = n\frac{\pi}{3}$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\tan 5x = \tan 3x$, với $|x - 3| \leq 1$ (1)

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \text{ (a)} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{h\pi}{3} \text{ (b)} \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

Với điều kiện trên thì $\tan 5x = \tan 3x \Leftrightarrow 5x = 3x + l\pi \Leftrightarrow x = \frac{l\pi}{2}$

Điều kiện (a) bị vi phạm nếu $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow k = 2l + \frac{l-1}{2}$

Vì k, l là số nguyên nên $\frac{l-1}{2} = m$ là số nguyên $\Leftrightarrow l = 2m + 1$

Suy ra điều kiện (a) không bị vi phạm nếu $l = 2n \Rightarrow$ nghiệm $x = n\pi$

Điều kiện (b) bị vi phạm nếu $\exists h, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $n\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{h\pi}{3} \Leftrightarrow 6n = 2h + 1$ (vô lý)

Vậy nghiệm x thỏa điều kiện (a) và (b) là $x = n\pi$

Do $|x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq n\pi \leq 4$, Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $n = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pi$

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\frac{(\cot^2 x - 1)}{2 \cot x} - \cos 4x \cdot \cot 2x = \cos x$ (1)

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\frac{\pi}{2}$

Với điều kiện trên thì (1) $\Leftrightarrow \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot 2 \cos x} \cdot \sin x - \cos 4x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x$
 $\Leftrightarrow \frac{\cos 2x(1 - \cos 4x)}{\sin 2x} = \cos x$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

a/ Nghiệm $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ vi phạm điều kiện nếu $\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow k = 1 + \frac{l-1}{4}$

Do $k, l \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{l-1}{4} = m \Leftrightarrow l = 4m + 1$

Vậy $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ là nghiệm Thay l vào k ta có $k = 5m + 1$

của (1) với $k \neq 5m + 1$

b/ Nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ vi phạm điều kiện nếu : $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow 1 + 4k = 3l \Leftrightarrow 1 = k + \frac{k+1}{3}$

Do $k, l \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{k+1}{3} = n \Leftrightarrow k = 3n - 1$

Vậy $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ là nghiệm của (1) với $k \neq 3n - 1$

Kết luận: Nghiệm của (1) là	$x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \quad (k \neq 5m + 1)$
	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \neq 3n - 1)$

(k, m, n ∈ Z)

c/ Việc chọn nghiệm được nảy sinh do biến đổi phương trình ban đầu về phương trình hệ quả

Ví dụ 11: Giải phương trình: $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$ (1)

Phân tích: vế trái của (1) là biểu thức có dạng tích các cos mà góc sau gấp đôi góc trước nên ta thường nhân hai vế của (1) cho sin góc nhỏ nhất.

Giải:

a/ Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = l\pi$ không thỏa phương trình (1)

b/ Xét $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\pi$. Nhân hai vế của (1) cho $\sin x$:

$$(1) \Leftrightarrow \sin x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \sin 4x \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \sin 8x \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x \Leftrightarrow \sin 16x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{15} \\ x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17} \end{cases} \quad (2)$$

Ta phải loại bỏ các nghiệm $x = l\pi$ vì (2) là phương trình hệ quả của (1)

a/ Nghiệm $x = \frac{2k\pi}{15} = l\pi \Leftrightarrow k = \frac{15l}{2} = 7l + \frac{l}{2}$

Do $k, l \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{l}{2} = m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow l = 2m$, suy ra $k = 15m$

Vậy $x = \frac{2k\pi}{15}$ là nghiệm của phương trình (1) với $k \neq 15m$

b/ Nghiệm $x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17} = l\pi \Leftrightarrow k = 8l + \frac{l-1}{2}$

Do $k, l \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{l-1}{2} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow l = 2n + 1$, suy ra $k = 17n + 8$

Vậy $x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17}$ là nghiệm của phương trình (1) với $k \neq 17n + 8$

Kết luận: Nghiệm của phương trình (1) là:

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{15} & (k \neq 15m) \\ x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17} & (k \neq 17n + 8) \end{cases} \quad (k, m, n \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 12: Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = -\frac{1}{2}$ (1)

Phân tích : vế trái của (1) là biểu thức có dạng tổng các cos mà các góc tạo thành một cấp số cộng với công sai $d = 2x$. Thường để rút gọn ta nhân hai vế cho $\sin \frac{d}{2}$

Giải:

a/ Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$ không thỏa phương trình (1)

b/ Xét $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq n\pi$. Nhân hai vế của (1) cho $\sin x$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \sin x \cos 4x + \sin x \cos 6x + \sin x \cos 8x + \sin x \cos 10x = -\frac{1}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [(\sin 3x - \sin x) + (\sin 5x - \sin 3x) + (\sin 7x - \sin 5x) + (\sin 9x - \sin 7x) + (\sin 11x - \sin 9x)] = -\frac{1}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 11x - \sin x = -\sin x \Leftrightarrow \sin 11x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{11}$$

Nghiệm $x = \frac{k\pi}{11}$ vì phạm điều kiện nếu $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ sao cho : $\frac{k\pi}{11} = n\pi \Leftrightarrow k = 11.n$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là : $x = \frac{k\pi}{11}$ với $k \neq 11.n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$)

MỘT SỐ ĐỀ THI ĐỀ HỌC SINH TỰ LUYỆN

Giải các phương trình : $1/\cos 2x + \cos \frac{3}{4}x = 2$ ĐHTM 97

ĐS : $x = 8n\pi$

2/ $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$ ĐS : ptn

3/ $\sin x(\cos \frac{x}{4} - 2\sin x) + \cos x(1 + \sin \frac{x}{4} - 2\cos x) = 0$ ĐS : $x = 2\pi + 8n\pi$

4/ $\sin x.\sin 2x.\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 1$ ĐS : ptn

6/ $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2$ ĐS : $x = k\pi$

5/ $\sin x.\cos 4x.\cos 8x = 1$ ĐS : $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

7/ $\sin^{2000}x + \cos^{2000}x = 1$ TTĐTCBYT tp HCM 1999

8/ $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$ ĐS : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

9/ $\tan 2x.\tan 7x = 1$ ĐS : $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}$ ($k \neq -5 - 9t$)

C/ TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1/ Bộ đề thi Đại Học của Bộ Giáo Dục
- 2/ Các đề thi Đại Học những năm vừa qua
- 3/ Sách chuyên đề lượng giác của Lê Hồng Đức, Phan Huy Khải
- 4/ Tạp chí Toán học tuổi trẻ

D/ PHÀN KEÁT LUAÂN

Keát quaũ thొic hieãn :

Nội dung đề tài này, tôi đã áp dụng dạy cho học sinh lớp 10, 11 trong thời gian 14 tiết, trong đó 8 tiết đầu tôi dạy và khắc sâu phần công thức lượng giác, sau đó hướng dẫn cho học sinh những phương pháp cơ bản để giải phương trình lượng giác, phần này tôi dạy

cho các học sinh từ trung bình yếu trở lên, phần phương trình lượng giác có nhận loại nghiệm tôi dạy cho học sinh khá giỏi với thời gian 6 tiết. Khi tôi dạy cho học sinh vaán ñeà naøy, tôi thaáy caùc em raát thích thuù, khi gaëp moät ñeà baøi töông töï caùc em ñaõ vaãn duøng caùch giaûi moät caùch linh hoaït, coù khi cuøng moät ñeà caùc em laïi giaûi ñöôïc nhieàu caùch khaùc nhau. Tôi hy vọng với nội dung đề tài này tôi sẽ giúp ích được cho học sinh một số kinh nghiệm học công thức và phương pháp giải phương trình lượng giác để các em hiểu sâu và nắm bắt được vấn đề, qua đó các em sẽ yêu thích môn Toán hơn, sẽ tự tin hơn trong phòng thi và kết quả các kỳ thi sẽ đạt cao hơn.

Kết quả cá nhân đạt được trong các năm gần đây

NĂM HỌC KHEN THƯỞNG	MOÂN TOAÙN	NIEÄM TÖØ 5 - 10		NIEÄM TÖØ 8-10		HOÏC SINH GIOÙI
	3 KHOÁI	SL	%	SL	%	TOAÙN
2006-2007	182	104	57,1	18	17,3	2
Bảng khen UBND TỈNH						
2007-2008	217	198	91,2	21	9,6	
Giấy khen SỞ GD-BP						
2008-2009	192	178	92,7	20	10,4	4
CSTĐCS SỞ GD-BP						

Nhiệm vụ hàng năm của người giáo viên dạy Toán là làm sao cho học sinh yêu thích môn Toán, chăm chú nghe giảng trong giờ dạy của mình và ñaít keát quaû cao trong caùc kyø thi. Hiện nay có rất nhiều học sinh cảm thấy môn Toán trở nên khó khăn, không nhớ được công thức, ít liên quan đến đời sống thực tại. Do đó khi tiếp xúc giảng dạy môn Toán tôi luôn có gắng tìm phương pháp hay để các em tiếp cận và ñeà cuûa Toaùn hoïc ñeã daøng hôn. Sáng kiến trên là một phần nhỏ trong suy nghĩ của tôi, tôi hy vọng quý thầy cô cũng nhờ

tôi tìm kiếm nhiều phương pháp hay, thực quan, để hiểu về học sinh của chúng ta

ngày càng giỏi hơn, thì ñaõu nhieàu hôn ñöõa.

Dù đã cố gắng rất nhiều trong việc phân tích các ví dụ nhưng cũng khó tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy cô để bài viết được hoàn

hảo hơn.

NHAÂN XÉT VÀ ÑAÙNH GIAÙ CUÛA TOÁ TOAÙN

**NHAÃN XEÙT VAØ ÑAÙNH GIAÙ CUÙA HOÃI ÑOÀNG KHOA HOÏC
TRÖÔØNG THPT HUỠNG VŨÔNG**

**NHAÃN XEÙT VAØ ÑAÙNH GIAÙ CUÙA HOÃI ÑOÀNG KHOA HOÏC
SỞ GIÁO DỤC BÌNH PHƯỚC**

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 horizontal black lines spaced evenly apart, typical of notebook paper. The lines extend across the entire width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical lines or other markings present.