|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **CHU VĂN AN, BÌNH ĐỊNH** | ĐỀ THI ĐỀ XUẤT MÔN TOÁN LỚP 10  KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ 2022-2023  *(Thời gian làm bài: 180 phút)* |

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bài** | **Đáp án** | **Điểm** |
| **Bài 1**  *(4đ)* | *Cho các đa thức  hệ số nguyên thỏa mãn .*  *Chứng minh rằng  là ước chung của  và .* | |
|  | Đầu tiên ta thấy rằng , nên .  Tương tự ta cũng có . | 0,5  0,5 |
| Khi đó: | 1  1 |
| Từ đây, suy ra:  ,  .  Ta có điều phải chứng minh. | 0,5  0,5 |
| **Bài 2**  *(4đ)* | *Cho các số thực dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng* | |
|  | Vì nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với  (\*) | 1đ |
| Với số thực dương  ta luôn có  (vì nó tương đương với ) | 2đ |
| Từ đó | 1đ |
| **Bài 3**  *(4đ)* | *Cho tam giác nhọn  có , đường cao  và  giao nhau tại . Gọi  là trung điểm của cạnh ,  và  lần lượt là trung điểm của. Đường thẳng đi qua  cắt đường thẳng  tại . Chứng minh rằng .* | |
|  | Gọi  là trung điểm của , khi đó  là tâm đường tròn đi qua các điểm .  Để ý rằng, tam giác  cân tại , tam giác  cân tại ,  và  cùng phụ với . Từ đó ta có biến đổi như sau:  . | 0,5  1 |
| Suy ra . Do đó  tiếp xúc với .  Tương tự ta cũng có  tiếp xúc với . | 1 |
| Xét đường tròn  ngoại tiếp tam giác  và đường tròn  tâm  bán  kính , ta có:  (gt)  Phương tích của điểm  đối với hai đường tròn là bằng  nhau.  (gt)  Phương tích của điểm  đối với hai đường tròn là bằng  nhau.  Do đó  chính là trục đẳng phương của hai đường tròn nói trên.  Suy ra điểm  có cùng phương tích đối với hai đường tròn  và . | 1 |
| Vì  nên , suy ra  tiếp xúc với , tức phương tích của điểm  đối vớilà . Hơn nữa, phương tích của điểm  đối với  là , do đó . (đpcm) | 1 |
| **Bài 4**  *(4đ)* | Với mỗi số nguyên dương , gọi  là một phân tích thừa số nguyên tố của , đặt . Chứng minh rằng, tồn tại  số nguyên dương liên tiếp, sao  cho trong đó có  số nguyên  thỏa mãn . | |
|  | Đặt . Dễ thấy rằng  và  hơn kém nhau không quá  đơn vị.  Với  thì , do đó . | 1 |
| Gọi  là dãy các số nguyên tố tăng dần từ . Theo định lý phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương  sao cho    Điều này có nghĩa là . | 1  1 |
| Từ các sự kiện:  và  luôn hơn kém nhau không quá  đơn vị, , có số nguyên dương  sao cho . Suy ra tồn tại số nguyên dương  sao cho . (đpcm) | 1 |
| **Bài 5**  *(4đ)* | Cho trước các điểm  trên mặt phẳng. Bạn Hùng muốn vẽ hình bên dưới chỉ bởi một nét vẽ (Tức là từ lúc bắt đầu vẽ đến lúc kết thúc, không được nhấc bút lên và cũng không đồ lên những nét đã vẽ). Bạn Hùng có thể thực hiện được mong muốn không? Nếu được thì các bạn hãy nêu cách vẽ, nếu không được thì hãy giải thích vì sao? | |
|  | Giả sử ta có thể vẽ được hình trên theo mong muốn của bạn Hùng. Ta gọi mỗi đường nối giữa hai đỉnh là một cạnh liên thuộc của hai đỉnh đó.  Không mất tính tổng quát, có thể giả sử nét vẽ được bắt đầu từ một đỉnh  và kết thúc tại một đỉnh , trong đó . | 1 |
| Trường hợp : Xét một đỉnh mà .  Vì nét vẽ xuất phát từ  và kết thúc tại , nên nét vẽ cạnh liên thuộc đầu tiên của  là nét vẽ rời khỏi  và nét vẽ cạnh liên thuộc cuối cùng của  cũng là nét vẽ rời khỏi , do đó số cạnh liên thuộc của  phải là một số lẻ. Lập luận tương tự, số cạnh liên thuộc của  cũng là một số lẻ. Vì  nên nét vẽ cạnh liên thuộc đầu tiên của  là tiến vào  và nét vẽ cạnh liên thuộc cuối cùng của  là rời khỏi , do đó số cạnh liên thuộc với  là một số chẵn. Tóm lại trong trường hợp này, số cạnh liên thuộc của  và  đều là số lẻ, số cạnh liên  thuộc tại mỗi đỉnh còn lại đều là số chẵn. | 1 |
| Trường hợp : Xét một đỉnh mà .  Vì nét vẽ xuất phát từ  và kết thúc tại , nên nét vẽ cạnh liên thuộc đầu tiên của  là rời khỏi  và nét vẽ cạnh liên thuộc cuối cùng của  là tiến vào , do đó số cạnh liên thuộc của  phải là một số chẵn. Vì  nên nét vẽ cạnh liên thuộc đầu tiên của  tiến vào  và nét vẽ cạnh liên thuộc cuối cùng của  rời khỏi , do đó số cạnh liên thuộc với  là một số chẵn. Tóm lại trong trường hợp này, số cạnh liên thuộc của tất cả các đỉnh đều là số chẵn. | 1 |
| Ta có thể quan sát hình vẽ trên và thấy rằng các đỉnh  đều có số lẻ cạnh liên thuộc. ĐIều này mâu thuẫn với cả hai trường hợp nói trên. Như vậy bạn Hùng không thể vẽ hình nói trên bởi một nét như bạn ấy mong muốn | 1 |

LƯU Ý CHUNG

*- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.*

*- Điểm toàn bài tính đến 0,5 và không làm tròn.*

*- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không chấm điểm cho phần đó.*