CD5_91-120_SO NGUYEN TO-SO CHINH PHUONG_NGUYEN THANH HA

Người làm: Nguyễn Thanh Hà
Zalo: Nguyễn Thanh Hà - số đt zalo: 0906209866
Email: hantt1.1102@gmail.com

CĐ6: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Dạng 1. Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. **(HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)**

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

Câu 2. **(HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)**

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

B. Tự luận

Câu 1. **(HSG 7 huyện HƯNG HÀ, trường VĂN LANG 2022 - 2023)**

Biết $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+...+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$. Chứng minh rằng $110x$ là số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

suy ra $11x \geq 0$ hay $x \geq 0$.

Vì $x \geq 0$ nên ta có

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+...+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$$

$$x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{6}+x+\frac{1}{12}+x+\frac{1}{20}+...+x+\frac{1}{110}=11x$$

suy ra $x=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$ (t/m)

Với $x=\frac{10}{11}$ thì $110x=100=10^2$ nên $110x$ là số chính phương.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 – 2022S)**

Cho các số thực dương m và n thỏa mãn: $m^{2020}+n^{2020}=m^{2021}+n^{2021}=m^{2022}+n^{2022}$ và $P=7+m^2+n^2$. Chứng minh rằng P là số chính phương.

Lời giải

$m^{2020}+n^{2020}=m^{2021}+n^{2021}=m^{2022}+n^{2022}$

Suy ra $m^{2022}+n^{2022}-m^{2021}-n^{2021}=0$ và $m^{2021}+n^{2021}-m^{2020}-n^{2020}=0$

Hay $m^{2021}.(m-1)+n^{2021}.(n-1)=0$ và $m^{2020}.(m-1)+n^{2020}.(n-1)=0$

Từ đó suy ra

$\Rightarrow m^{2021}.(m-1)-m^{2020}.(m-1)+n^{2021}.(n-1)-n^{2020}.(n-1)=0$

$\Rightarrow m^{2020}.(m-1)^2-n^{2020}.(n-1)^2=0$ (1)

Ta có: $m^{2020}>0; n^{2020}>0; (m-1)^2\geq 0; (n-1)^2\geq 0$

Nên $m^{2020}(m-1)^2\geq 0$ và $n^{2020}(n-1)^2\geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m^{2020}(m-1)^2=0$ và $n^{2020}(n-1)^2=0$ hay $(m-1)^2=0$ (do $m^{2020}>0$) và $(n-1)^2=0$ (do $n^{2020}>0$)

Từ đó ta có $m-1=0$ và $n-1=0$ hay $m=1$ và $n=1$

Khi đó $P=7+m^2+n^2=7+1+1=9=3^2$

Vậy P là số chính phương.

Câu 3. (HSG 7 huyện Quan Hoa, tỉnh Thanh Hoá 2021 – 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n\,\vdots\,24$.

Lời giải

Đặt $n+1=k^2, 2n+1=m^2 (k,m\in N)$

Vì $2n+1$ là số lẻ nên m là số lẻ. Đặt $m=2t+1 (t\in N)$ ta có:

$2n+1=(2t+1)^2\Rightarrow n=2t(t+1)\Rightarrow n$, suy ra $n=2t(t+1)$ hay n là số chẵn $\Rightarrow k$ là số lẻ.

Do vậy $n=k^2-1=(k-1).(k+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp nên $n\,\vdots\,8$

Mặt khác: $(n+1)+(2n+1)=3n+2=k^2+m^2$ là số chia 3 dư 2

Mà số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên k^2 và m^2 chia 3 dư 1

Do đó $m^2-k^2=(2n+1)-(n+1)=n\,\vdots\,3$. Vì $(3,8)=1$ nên $n\,\vdots\,24$ (đpcm).

Dạng 2. Chứng minh một số không là số chính phương.

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A=\dfrac{2001}{2000^2+1}+\dfrac{2001}{2000^2+2}+...+\dfrac{2001}{2000^2+2000}$. Chứng minh rằng: $1<A^2<4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

Ta có : $\frac{2001}{2000^2+1} > \frac{2001}{2000^2+2} > \frac{2001}{2000^2+3} > ... > \frac{2001}{2000^2+2000}$

Suy ra $A > \frac{2001}{2000^2+2000}.2000 = \frac{2001.2000}{2000(2000+1)} = 1 \quad (1)$

Mặt khác: $A < \frac{2001}{2000^2+1}.2000 = \frac{2001.2000}{2000^2+1} = \frac{(2000+1).2000}{2000^2+1} = \frac{2000^2+2000}{2000^2+1}$

$= \frac{(2000+1).2000}{2000^2+1} = \frac{(2000^2+1)+1999}{2000^2+1} = 1 + \frac{1999}{2000^2+1} < 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2$ hay $1 < A^2 < 4$.

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)

Lời giải

………..

Dạng 3. Tìm số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường …………… 2022 - 2023)

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

Có tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên không? Vì sao ?

Lời giải

Ta có: $0 \le \overline{ab} \le 99 \quad \Rightarrow \quad 201100 \le \overline{2011ab} \le 201199$

$$448^2 < \overline{2011ab} < 449^2$$

448 và 449 là hai số tự nhiên liên tiếp nên $\overline{2011ab}$ không là bình phương của một số tự nhiên.