

Bài 1(3 điểm):

- a) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x + xy + y = 9$.
 b) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

Bài 2(4 điểm):

a) Cho $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.

b) Cho a, b, x, y là các số thực thoả mãn: $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a+b)^{1008}}$

Bài 3 (4 điểm):

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

b) Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 4x^2 - 2y^2 = 2 \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$$

Bài 4 (7 điểm):

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

- a) Chứng minh rằng: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
 b) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.
 c) Chứng minh tỷ số $\frac{AH^3}{BC \cdot BE \cdot CF}$ không đổi.
 d) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác PEFQ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Bài 5 (2 điểm):

Cho x, y, z dương sao cho $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3y+3z+2x} + \frac{1}{3z+3x+2y}$.

-----HẾT-----

NĂM HỌC 2015-2016

M«n To, n 9

C© u	Néi dung	Chia điểm
I.a	<p>a.1,5 điểm</p> <p>- Từ (gt) ta có :$(x + 1)(y + 1) = 10$; vì $10 = 1.10 = 2.5$</p> <p>- Vì $x,y \in \mathbb{N}$</p> <p>- Lập bảng ta tìm được 4 nghiệm $(x ; y) = (0 ; 9) ; (9 ; 0) ; (1 ; 4) ; (4 ; 1)$</p>	<p>0,75</p> <p>0,75</p>
I.b	<p>b.1,5 điểm</p> <p>- Ta có :</p> $4a^2 + 3ab - 11b^2 : 5 \Rightarrow (5a^2 + 5ab - 10b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) : 5$ $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 : 5$ $\Leftrightarrow (a + b)^2 : 5$ $\Rightarrow a + b : 5 \quad (\text{Vì } 5 \text{ là số nguyên tố})$ <p>- Ta có: $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) : 5$ (đpcm)</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
II	<p>Câu a(2 điểm)</p> $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$ $\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16 - 8\sqrt{5})(16 + 8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}})$ $\Leftrightarrow a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \Leftrightarrow a^3 = 32 - 12a \Leftrightarrow a^3 + 12a - 32 = 0$ $\Leftrightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2015} = 1$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>Câu b(2 điểm)</p> <p>Ta cần: $(x^2 + y^2)^2 = 1$ nên $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a + b}$</p> $\Leftrightarrow b(a + b)x^4 + a(a + b)y^4 = ab(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$ $\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 - 2abx^2y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0$ <p>Tõ ã: $\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{1}{a + b} \Rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}} = \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{1}{(a + b)^{1008}} \Rightarrow$</p> $\frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a + b)^{1008}}$ <p>KL:...</p>	<p>1</p> <p>1</p>
III	<p>Câu a(2 điểm)</p> <p>Giải phương trình: $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{5 - 2x} = 3x^2 - 12x + 14$</p>	
	<p>§K: $1,5 \leq x \leq 2,5$</p> <p>+ Số đông bất ãng thức c« si hoÆc Bu nhi a ã, nh gi, VT ≤ 2</p> <p>+ §, nh gi, VP ≥ 2</p> <p>Do ã: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 3} = \sqrt{5 - 2x} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$</p> <p>KL.</p>	<p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,75</p>
III	<p>Câu b(2 điểm)</p>	

	<p>Từ (gt) ta có : $3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x+2y) = 0 \Leftrightarrow x=y$ hoặc $x = -\frac{2}{3}y$</p> <p>- Nếu $x = y$ thay vào (1) ta được $x = 1 ; x = -1$</p> <p>- Nếu $x = -\frac{2}{3}y$ Thay vào hệ ta được hệ vô nghiệm</p> <p>KL : Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x ; y) = (1 ; 1) ; (-1 ; -1)$.</p>	<p>1</p> <p>1</p>
IV		
IV	<p>Câu a(1 điểm)</p> <p>XĐT tam gi, c vu«ng ABH cả HE⊥AB $\Rightarrow AB.AE = AH^2$ (1)</p> <p>XĐT tam gi, c vu«ng ACH cả HF⊥AC $\Rightarrow AC.AF = AH^2$ (2)</p> <p>Tổ (1) vµ (2) suy ra AE.AB = AF.AC.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
IV	<p>Gãc IAH b»ng 2 Içn gãc BAH Gãc KAH b»ng 2 Içn gãc CAH Suy ra gãc IAH + gãc KAH = 2(gãc BAH + gãc CAH) = 180° Suy ra I, A vµ K th¼ng hụng</p>	
IV	<p>Câu c(2 điểm)</p> <p>Ta có: $AH^2 = BH.CH \Rightarrow AH^4 = BH^2 .CH^2 = BE.BA.CF.CA =$ $BE.CF.AH.BC \Rightarrow AH^3 = BE.CF.BC \Rightarrow \frac{AH^3}{BE.CE.BC} = 1$</p>	
IV	<p>Câu d(2 điểm)</p> <p>$S_{PQFE} = \frac{1}{2}(PE + FQ).FE = \frac{1}{4}BC.FE$. Mà $FE \leq PQ$ hay $FE \leq \frac{BC}{2} \Rightarrow$ $\leq \frac{BC^2}{8}$</p> <p>$S_{PQFE} \leq \frac{BC^2}{8}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi A là điểm chính giữa của nửa đường tròn tâm O, đường kính BC.</p>	
V	<p>(2 điểm)</p>	

HD Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với a; b là các số dương. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) \end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right)$$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right)$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+3y+2z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) + \frac{1}{16} \\ &\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$