ĐỀ VDC SỐ 06 Cực trị hàm tổng và hàm hợp

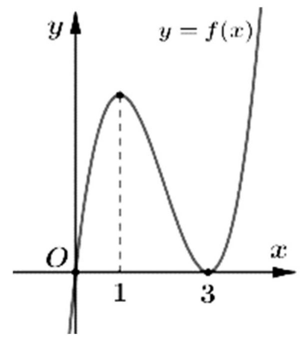
Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f\left(1\right)>1$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-2020;2021\right)$ để hàm số sau đây có tất cả 9 điểm cực trị $g\left(x\right)=\left|f^3\left(x\right)+\dfrac{3}{2}f^2\left(x\right)+m\right|$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 4

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=2\left[f\left(x\right)\right]^3-9\left[f\left(x\right)\right]^2+12f\left(x\right)+2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 5. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 4: Cho hàm số bậc bốn $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

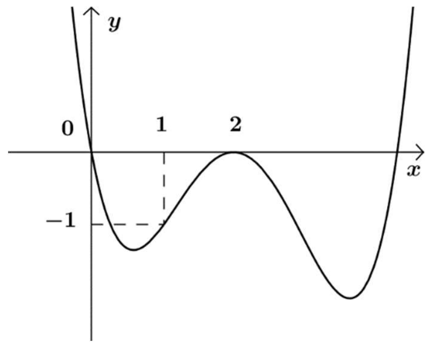
Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x-1\right)\right]^2+2021$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$, thỏa mãn $1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)$ và $f(1)=0$. Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



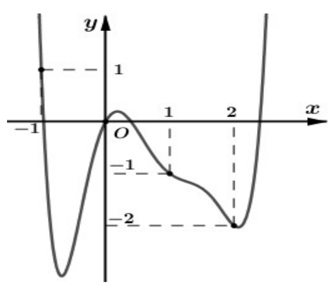
Tìm tất cả các giá trị của m để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+m\right)$ là 5.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{17}{4}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{17}{4}\right)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x-12)^{2020}\left(x^2-2x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương.

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2019.

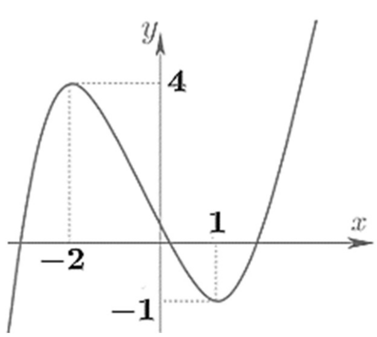
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $g(-2)>0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x)\right|=\left|2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = f\left(\left|f^2\left(x\right) - 2f\left(x\right) - m\right|\right)$ có 17 cực trị.

A. 4 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 6 .

Câu 10: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f\left(0\right) = 0$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$-\infty$

Hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x^3\right) + 6x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

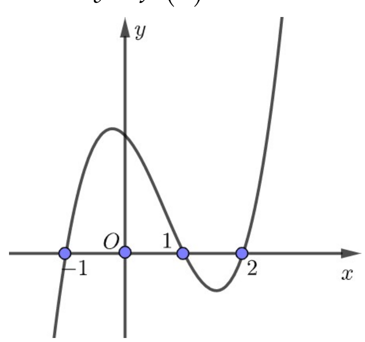
Câu 11: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f\left(0\right) = 0$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{7}{6}$	↘	$-\infty$

Tìm m nguyên để hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x^3\right) + 3m^2x + m - 1\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất có thể. Thì giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;0\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

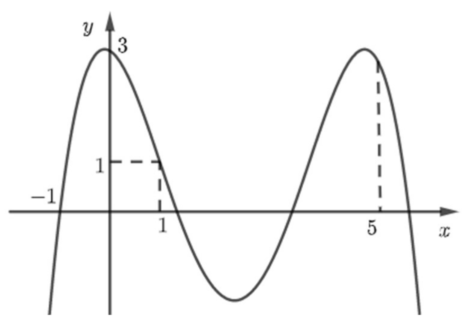
Câu 12: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g\left(x\right) = \left(\left|x\right| + \left|x^2 - 1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 7 .

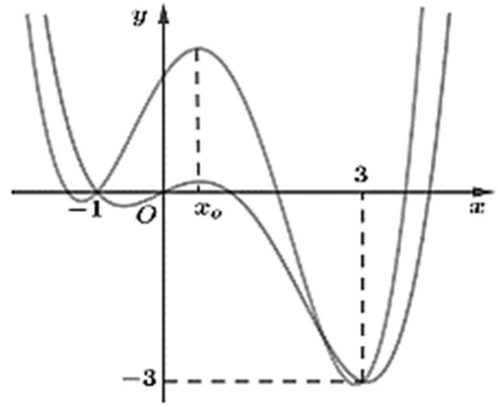
Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$, có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=8f\left(x^3-3x+3\right)-\left(2x^6-12x^4+16x^3+18x^2-48x+1\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

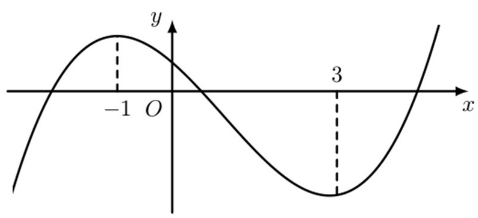
Câu 14: Cho hai hàm số bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có các đồ thị như hình dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

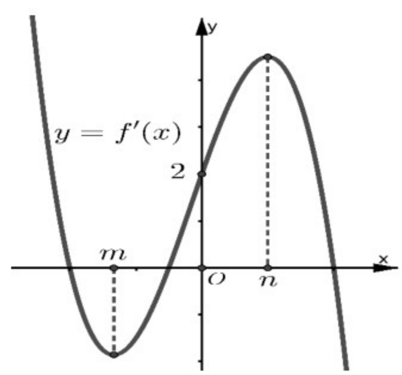
Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e>n$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 6.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left[f\left(2x^2 + x\right)\right]^2$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

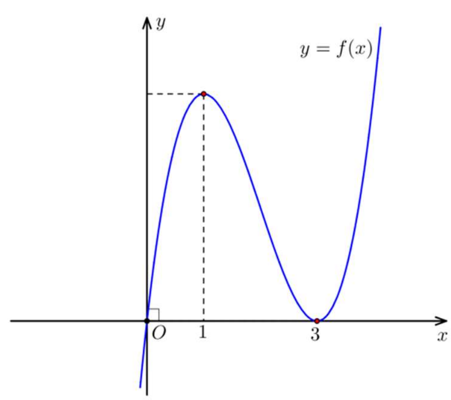
Câu 18: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4}\left[f(x) - 1\right]^4$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + f(x) + m\right|$ có đúng 3 cực trị.

A. $m \geq \frac{1}{4}$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m > \frac{1}{4}$.

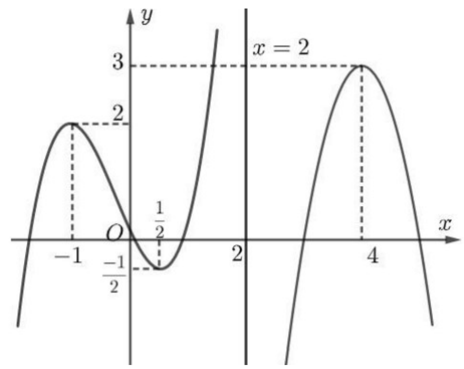
Câu 20: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-2\right)^4}{\left[f\left(x+1\right)\right]^3}$ là

A. 7 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

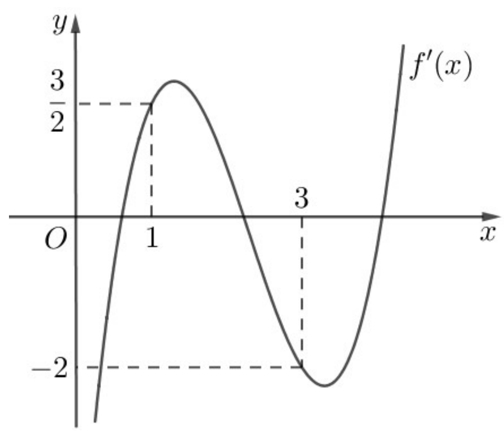
Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|2x-1\right|+2\right)$ là

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 3 .

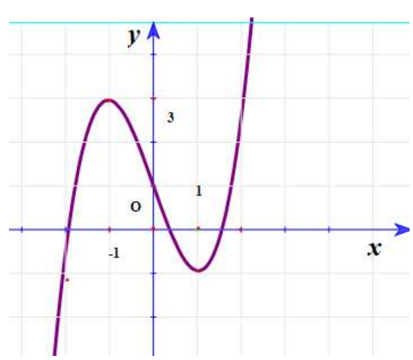
Câu 22: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^4\right)-2x^3+1$ là

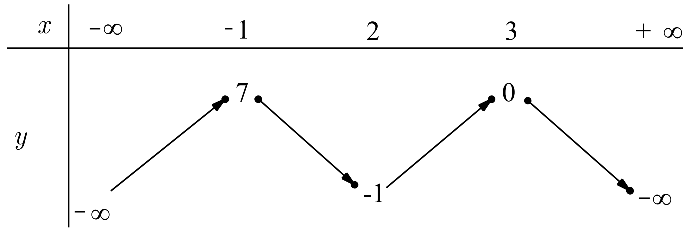
A. 3 . **B.** 6 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 23: Cho hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[xf\left(x-1\right)\right]^2$ là



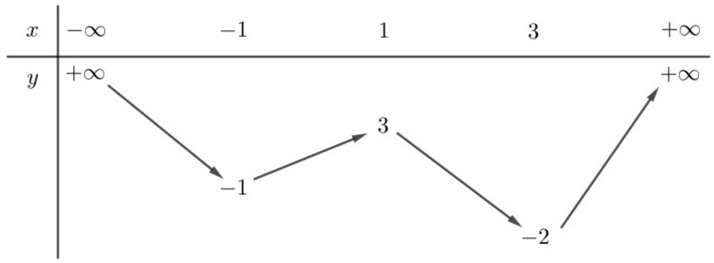
A. 9 . **B.** 7 . **C.** 6 . **D.** 5 .

Câu 24: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(2x-1)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$ tương ứng là



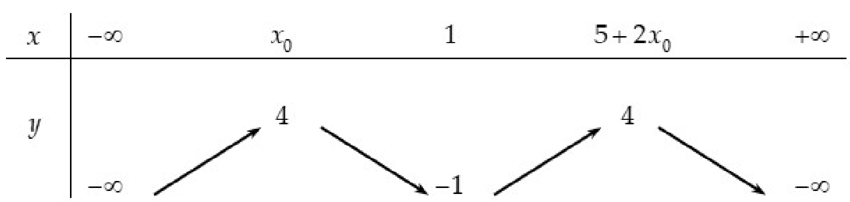
A. 3 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** 7

Câu 25: Cho bảng biến thiên của hàm số $f\left(3-2x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



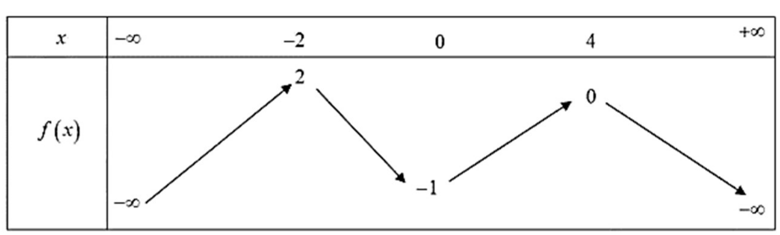
A. $\left(-2;0\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị là $x=a; x=8-a$. Bên dưới cho bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2-2x+3\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x^3-3x^2+1\right)$ là



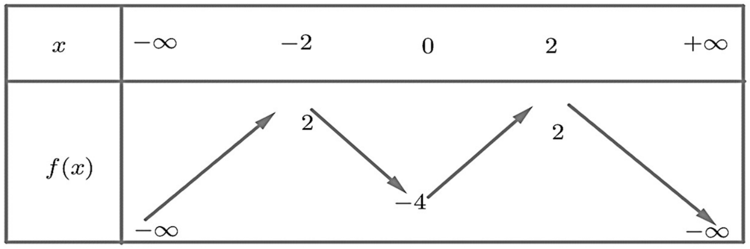
A. 3 . **B.** 4 . **C.** 8 . **D.** 6

Câu 27: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4.\left[f(x)\right]^2$ là:



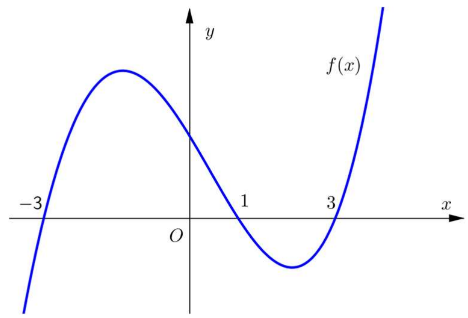
A. 9 . **B.** 6 . **C.** 5 . **D.** 7

Câu 28: Cho bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=x^2.\left[f\left(x+2\right)\right]^6$ là



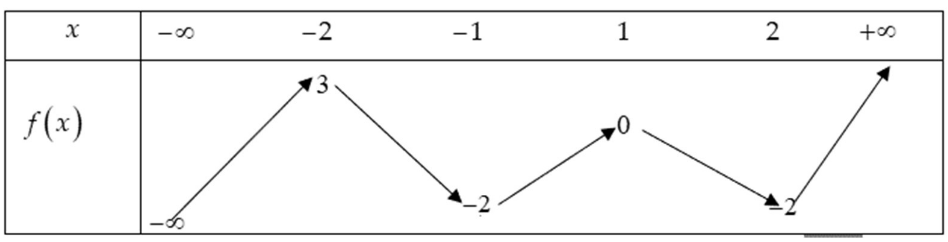
A. 5 . **B.** 12 . **C.** 7 . **D.** 9

Câu 29: Cho đồ thị hàm đa thức $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x).f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



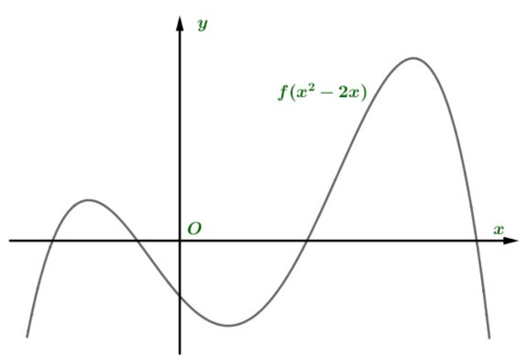
A. 5 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 9

Câu 30: Cho bảng biến thiên của hàm đa thức $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x-2)^3\left[f(x-1)\right]^2$ là:



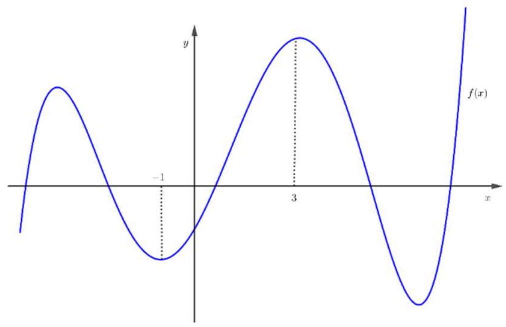
A. 8 . **B.** 5 . **C.** 7 . **D.** 6 .

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2mx - |x-m| + m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



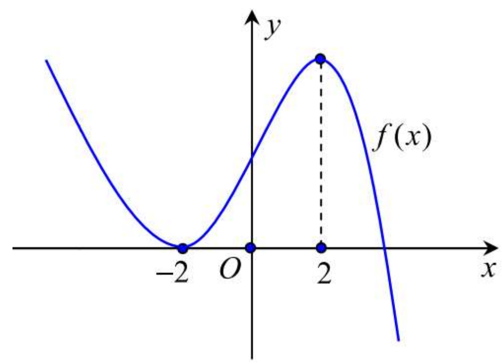
A. 7 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 9

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để hàm số $y = f(-|x+2021m| - 2m + 1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 33: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x^3 - mx^2 - 5x + 4m)$ có 6 điểm cực trị?



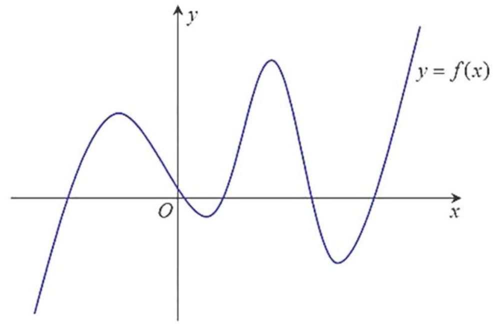
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 34: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = [f(x) - m]^3 - 3f(x)$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$								$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

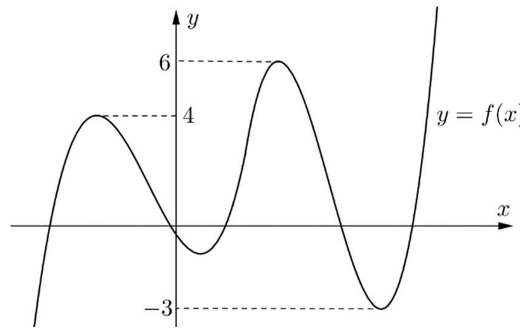
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. gọi S là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (f(x))^3 - m.(f(x))^2 - (2m-3)f(x) + 2021$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



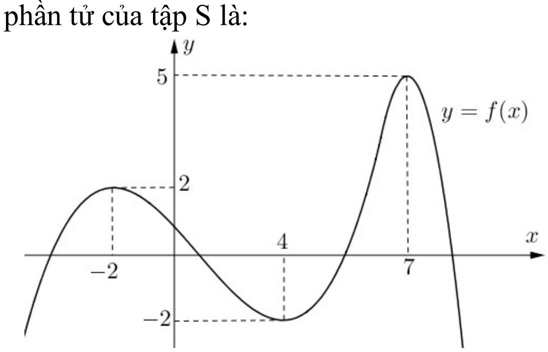
A. 11. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-20;20\right]$ để hàm số $y=\left(f(x)\right)^2-2\left(m+2\right)f(x)-3m+12$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



A. 35 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 34

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-20;20\right]$ để hàm số $y=\left(f(x)+m\right)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



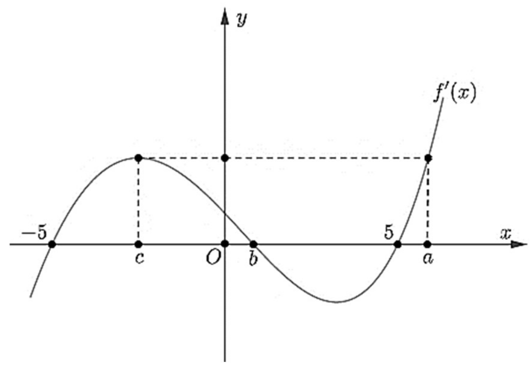
A. 20 **B.** 22 **C.** 21 **D.** 19

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ. Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3+6\left[f(x)\right]^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(10)=30f(-6)=30f(5)=30$. Hỏi hàm số $y=f\left(f(x)-3x+9\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



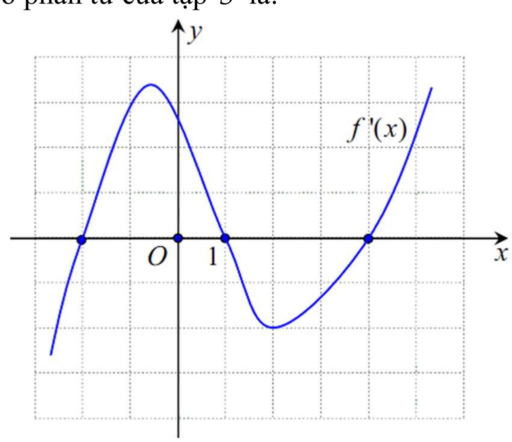
A. 7 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 9

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi hàm số $y=f\left(x^3-3x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-6	↗	-2	↘	$-\infty$

A. 7 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 9

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



A. 8 . **B.** 6 . **C.** 4 . **D.** 10

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

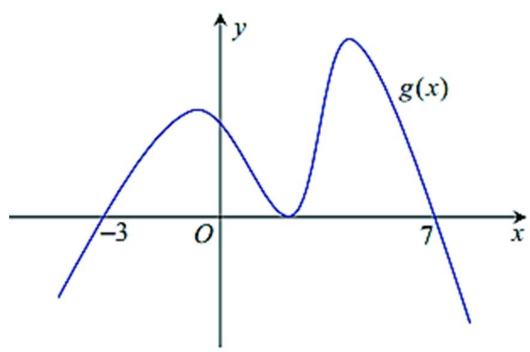
A. 31 . **B.** 35 . **C.** 33 . **D.** 37

Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá tị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f^3\left(x\right)-3mf\left(x\right)+11-2m$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

A. 3 . **B.** 5 . **C.** 8 . **D.** 9

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đặt $f\left(x\right)=\int\limits_{2018}^{x^2-2x}g\left(t\right)dt$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)$ tương ứng là:



A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 5

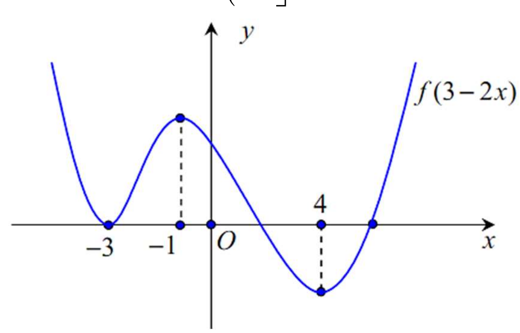
Câu 45: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-60;60\right]$ để phương trình $f\left(x^2-2mx+1\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 1

Câu 46: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3mx^2+3\left(2m-1\right)x-m\right|$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-2022;2022\right]$ để hàm số $f\left(x\right)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải của trục tung Oy?

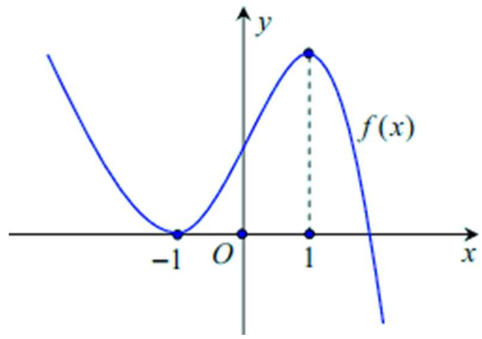
A. 2019 . **B.** 2020 . **C.** 2021 . **D.** 2022

Câu 47: Cho hàm số $y=f\left(3-2x\right)$ như hình vẽ. Biết rằng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x^2-2m\left|x\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị là $\left(a;b\right]$. Giá trị của biểu thức $P=2\left(a^2+b^2\right)$ là:



A. 5 . **B.** 10 . **C.** 15 . **D.** 20

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x^3 - mx^2 - 2x + m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2

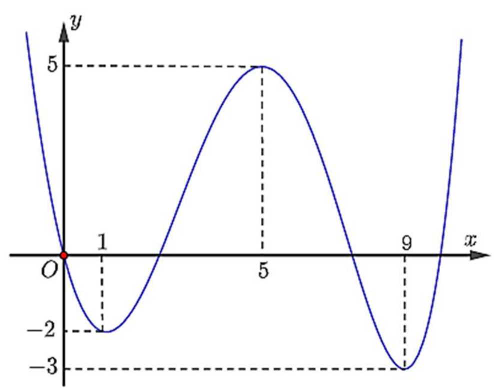
Câu 49: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(x^3 - 3\left|x^2 - 1\right| + m\right)$ có 10 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1

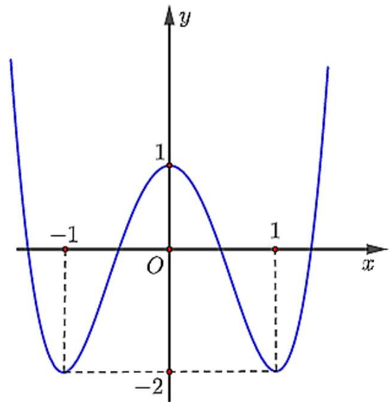
Câu 50: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|\right)$ có 51 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1

Câu 51: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 1

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	
$u(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↗		↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là:

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.A	4.B	5.D	6.C	7.D	8.C	9.C	10.D
11.D	12.A	13.A	14.A	15.A	16.A	17.C	18.C	19.D	20.C
21.C	22.C	23.B	24.A	25.B	26.B	27.D	28.D	29.A	30.D
31.C	32.B	33.B	34.A	35.D	36.C	37.B	38.D	39.A	40.A
41.B	42.C	43.C	44.C	45.A	46.C	47.B	48.D	49.C	50.D
51.B	52.B								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Ta có: $g'(x)=\left(2x-2-\dfrac{x-1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$

$=(x-1)\left(2-\dfrac{1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)=(x-1)\left(\dfrac{2|x-1|-1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$

Phương trình + $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Khi: $2.|x-1|-1=0\Leftrightarrow |x-1|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Khi: $f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1-|x-1|=-1\\x^2-2x+1-|x-1|=0\\x^2-2x+1-|x-1|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-1|^2-|x-1|+1=0\\|x-1|^2-|x-1|=0\\|x-1|^2-|x-1|-1=0\end{array}\right.$

Giải các phương trình trên ta được $\left[\begin{array}{l}|x-1|=0\\|x-1|=1\\|x-1|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=0\\x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 7 lần đổi dấu . Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 2: Chọn C

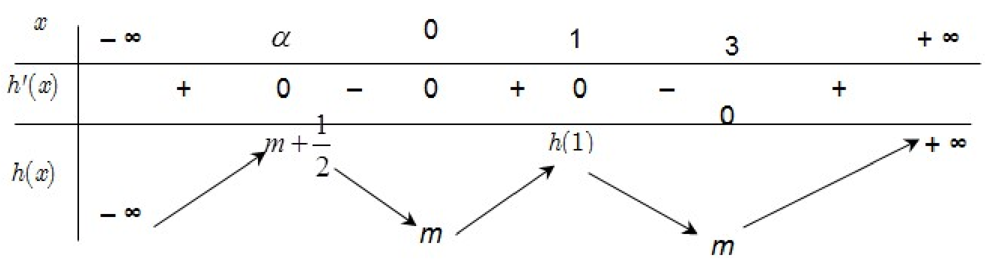
Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ và đường thẳng: $y=0$.

Xét hàm số: $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$.

Có: $h'(x)=3f^2(x).f'(x)+3f(x).f'(x)=3f(x).f'(x)\left[f(x)+1\right]$

Giải phương trình: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\\f(x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=1\\x=\alpha\ ,(\alpha<0)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Ta có $h(1)>m+\dfrac{1}{2}$. Nên để đồ thị hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow m<0<m+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{2}<m<0$. Đối chiếu điều kiện suy ra không có giá trị nào của m.

Câu 3: Chọn A

Hàm số $y=g(x)=2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2+12f(x)+2021$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6.f^2(x).f'(x)-18f(x).f'(x)+12f'(x)=6f'(x)\left[f^2(x)-3f(x)+2\right]$.

Giải phương trình đạo hàm: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\f(x)=1 & (2)\\f(x)=2 & (3)\end{array}\right.$.

Từ (1), ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$.

Từ (2), ta có $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-\infty;1)\\x=2\ (\text{nghiem}\ \ kep)\\x=b\in(3;4)\\x=c\in(4;+\infty)\end{array}\right.$.

Từ (3), ta có $f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=d\in(a;1) \\ x=e\in(1;2) \\ x=3(nghiem\ \ kep) \\ x=u\in(c;+\infty) \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu, ta có

x	$-\infty$		a		d		1		e		2		3		b		4		c		u		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	|	+	0		|		0		0		|	-	0		|	+	|	+	
$f(x)-1$		-	0		|		|	+	|		0		|		0	-	|	-	0	+	|	+	
$f(x)-2$		-	|	-	0		|		0	-	|	-	0	-	|	-	|		|	-	0	+	
y'		+	0	-	0		0		0		0	-	0		0	-	0		0	-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực đại.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $g'(x)=2f(x-1)f'(x-1)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f(x-1).f'(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x-1)=0 \\ f'(x-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-1=a(a<-1) \\ x-1=b(-1<b<0) \\ x-1=c(0<c<1) \\ x-1=d(d>1) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=0 \\ x-1=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1+a(x<0) \\ x=1+b(0<x<1) \\ x=1+c(1<x<2) \\ x=1+d(x>2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$f'(x-1)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<-1 \\ 0<x-1<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$1+a$		0		$1+b$		1		$1+c$		2		$1+d$		$+\infty$
$f(x-1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x-1)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 5: Chọn D

Ta có:

$$1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)\Leftrightarrow 1+f'(x)=x\left[x^2+2xf(x)+f^2(x)\right]=x\left[x+f(x)\right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{1+f'(x)}{\left[x+f(x)\right]^2}=x\Rightarrow \int\frac{1+f'(x)}{\left[x+f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Rightarrow -\frac{1}{x+f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$$

Do $f(1)=0\Rightarrow -\dfrac{1}{1+f(1)}=\dfrac{1}{2}+C\Rightarrow C=-\dfrac{3}{2}$

Khi đó: $-\dfrac{1}{x+f(x)}=\dfrac{x^2-3}{2}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^2-3}-x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2-3\right)^2}-1$

Suy ra: $f(x)=0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{x^2-3}=x\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$

Và $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x=\left(x^2-3\right)^2\Leftrightarrow 4x=x^4-6x^2+9\Leftrightarrow x^4-6x^2-4x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=a>2\end{array}\right.$

Khi đó: $g'(x)=4f'(2x-1)f(2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=-2\\ 2x-1=1\\ 2x-1=a\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=\dfrac{a+1}{2}>\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Ta có: $f(x)$ không xác định khi $x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow g(x)$ không xác định khi $2x-1=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{3}+1}{2}$

Mặt khác: $g'(-1)=4.f'(-3).f(-3)=4.\left(-\dfrac{4}{3}\right).\dfrac{8}{3}<0$ và

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^+} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-} g(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Ta có bảng biến thiên:

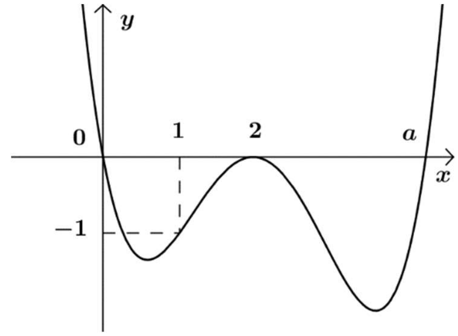
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$		1		$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$		$\frac{a+1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 6: Chọn C

Ta có: $g'(x)=(2x-3).f'\left(x^2-3x+m\right)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1)\\ f'\left(x^2-3x+m\right)=0 & (2)\end{array}\right.$.

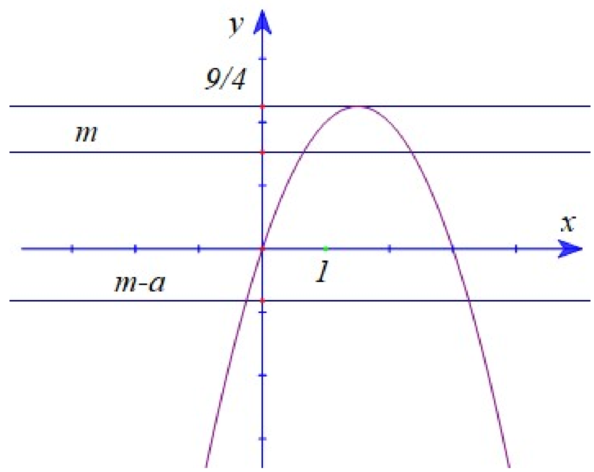
Ta có: $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.



Và $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+m=0 \\ x^2-3x+m=2 \\ x^2-3x+m=a,\ a>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^2+3x \\ m-2=-x^2+3x \\ m-a=-x^2+3x \end{array}\right.$.

Với $x^2-3x+m=2$ thì $g'(x)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có đồ thị



Do $a>2$, suy ra $m<\frac{9}{4}$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<\frac{9}{4}$

Câu 7: Chọn D

Ta có: $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right) \Rightarrow y'=(2x-2020)f'\left(x^2-2020x+2021m\right)$

$=(2x-2020)\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020}\left(x^2-2020x+2021m\right)\left(x^2-2020x+2021m-2\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-2020=0 & (1) \\ x^2-2020x+2021m-12=0 & (2) \\ x^2-2020x+2021m=0 & (3) \\ x^2-2020x+2021m-2=0 & (4) \end{array}\right.$$

Dễ thấy $(2),(3),(4)$ không có nghiệm chung, và $\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương khi hai phương trình $(3),(4)$ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 .

(3) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2021m<0 \\ 1010^2-2020.1010+2021m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<0$

(4) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2021m-2<0 \\ 1010^2-2020.1010+2021m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{2}{2021}$

Vậy $m<0$ thì hàm số có 3 cực trị dương.

Do $m \in (-2020;2020)$ nên có 2019 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

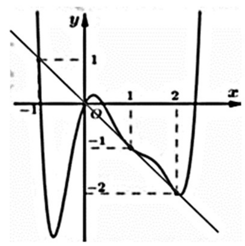
Câu 8: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021$

Ta có $g'(x)=2f'(x+2)+2x+4$. Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x+2)=-(x+2)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'(t)=-t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $d\ :\ y=-t$



Dựa vào đồ thị của $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

$$f'(t)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=-1 \\ x+2=0 \\ x+2=1 \\ x+2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗		↗		↗	

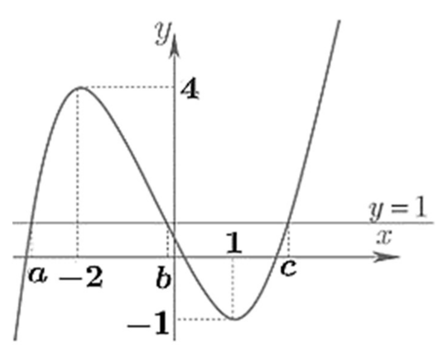
Suy ra hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021$ có 2 điểm cực trị và $g(x)=0$ có 1 nghiệm bội lẻ .

Vậy hàm số $y=|g(x)|=|2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=-2$ và $x=1$

Ta có: $y'=\dfrac{\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)'\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}f'\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$

$=\dfrac{2f'(x)\left(f(x)-1\right)\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}\left(\underbrace{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|+2}_{>0}\right)\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|-1\right)$



$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2; x=1 \\ f(x)=1 \Leftrightarrow x=a,\ x=b,\ \ x=c \\ f^2(x)-2f(x)-m=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m \\ \left|f^2(x)-2f(x)-m\right|=1 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m\pm 1 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2f(x)$; $g'(x)=2f'(x)\left[f(x)-1\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2; x=1 \\ f(x)=1 \Leftrightarrow x=a,\ x=b,\ \ x=c \end{array}\right. ; \quad \begin{cases} g(a)=g(b)=g(c)=1^2-2.1=-1 \\ g(-2)=4^2-2.4=8 \\ g(1)=(-1)^2-2.(-1)=3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-1		b		1		c		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm bội lẻ của $y'=0$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với 3 đường thẳng $d_1: y=m+1,\ d_2: y=m,\ d_3: y=m-1$.

Yêu cầu bài toáng tương đương với 3 trường hợp sau.

Trường hợp 1: d_1, d_2, d_3 đều cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt không trùng với các điểm $x\in\{-2;1;a;b;c\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\le m+2<8 \\ 3\le m<8 \\ 3\le m-2<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m<6 \\ 3\le m<8 \\ 5\le m<10 \end{cases} \Leftrightarrow 5\le m<6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=5.$$

Trường hợp 2: 2 đường thẳng d_1, d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt và d_3 không cắt hoặc tiếp xúc đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có tung độ bằng -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m+2<3 \\ -1<m<3 \\ m-2\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ -1<m<3 \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=0\ (2).$$

Trường hợp 3: Hai đường thẳng d_1 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 2 điểm phân biệt và d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại hai điểm phân biệt, d_3 cắt $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2\ge 8 \\ 3\le m<8 \\ -1<m-2<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 6 \\ 3\le m<8 \\ 1<m<5 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing\ (3)$$

Từ $(1),(2)\ \&\ (3) \Rightarrow$ có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) + 6x$ có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) + 6$.

Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \dfrac{-2}{x^2}$ $(*)$

Ta dễ dàng thấy được $f''(x) = a(x+1)(x+2) \Rightarrow f'(x) = a\left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2) = 3,\ f'(-1) = \dfrac{13}{4}$ ta tìm được $a = -\dfrac{3}{2},\ C = -\dfrac{4}{3}$, từ đó $f'(0) = 2 > 0$

Với $x < 0$, $f'(x) > 0$ nên kéo theo $f'(x^3) > 0$ mà $\dfrac{-2}{x^2} < 0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x) > 0$.

Với $x > 0$, $f'(x)$ là hàm sô nghịch biến, còn $\dfrac{-2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ có nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $h'(0) \approx +\infty$ và $h'(+\infty) \approx -\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = c > 0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$		0		c		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h(c)$	$\searrow$	$-\infty$

Do ta có $h(0) = f(0) + 6.0 = 0$ nên $h(c) > 0$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 3 cực trị.

Câu 11: Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) + 3m^2x + m - 1$ có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) + 6m^2$.

Nếu $m = 0$ thì $h(x) = f(x^3)$ nên $g(x) = \left|f(x^3) + 3m^2x + m - 1\right|$ có 3 cực trị

Xét với $m \neq 0$

Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \dfrac{-2m^2}{x^2}$ $(*)$

Ta dễ dàng thấy được $f''(x) = a(x+1)(x+2) \Rightarrow f'(x) = a\left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2) = 1,\ f'(-1) = \dfrac{7}{6}$ ta tìm được $a = -1,\ C = -\dfrac{1}{3}$, từ đó $f'(0) = \dfrac{1}{3} > 0$

Với $x < 0$, $f'(x) > 0$ nên kéo theo $f'(x^3) > 0$ mà $\dfrac{-2m^2}{x^2} < 0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x) > 0$.

Với $x > 0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $\dfrac{-2m^2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $\lim\limits_{x \to 0}\left(f'(x^3) + \dfrac{2m^2}{x^2}\right) \approx +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f'(x^3) + \dfrac{2m^2}{x^2}\right) \approx -\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = c > 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$		0		c		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$m-1$	$\nearrow$	$h(c)$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và $h(0)=f(0)+m-1=m-1$ nên hàm số $g(x)=|h(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị nếu $h(c)>0$. Từ đó ta cần $h(0)\ge 0 \Rightarrow m\ge 1$. Vậy $m\ge 0$.

Câu 12: Chọn A

Từ đồ thị của $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Đặt $u=|x|+|x^2-1|$.

Ta có bảng ghép trục sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\|x\|$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\|x^2-1\|$		x^2-1	0	$1-x^2$		$1-x^2$	0	x^2-1	
u		x^2-x-1		$1-x-x^2$		$1+x-x^2$		x^2+x-1	
u		$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$		$\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$		$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$	
u	$+\infty$	$\searrow$ 2 $\searrow$	1	$\nearrow$ $\frac{5}{4}$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $\frac{5}{4}$ $\searrow$	1	$\nearrow$ 2 $\nearrow$	$+\infty$
$f(u)$		$\searrow$ $\nearrow$		$\searrow$ $\nearrow$		$\searrow$ $\nearrow$		$\searrow$ $\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)=f\left(|x|+|x^2-1|\right)$ có ba điểm cực đại.

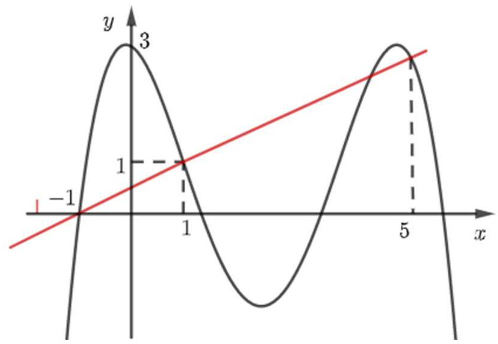
Câu 13: Chọn A

Ta có: $g'(x)=8(3x^2-3)f'(x^3-3x+3)-(12x^5-48x^3+48x^2+36x-48)$.

$$=24(x^2-1)\left[f'(x^3-3x+3)-\frac{(x^3-3x+3)+1}{2}\right];$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.\\ f'(x^3-3x+3)=\dfrac{(x^3-3x+3)+1}{2}\quad(1).\end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có:



Đặt $t=x^3-3x+3$. Phương trình (1) trở thành: $f'(t)=\frac{t+1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\\t=5\end{array}\right.$.

Với $t=-1$ ta có: $x^3-3x+3=-1$. Phương trình này có 1 nghiệm.

Với $t=1$ ta có: $x^3-3x+3=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Với $t=5$ ta có: $x^3-3x+3=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

Như vậy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt và 2 nghiệm bội ba.

Câu 14: Chọn A

Ta có: $h(x)=\left[f(x)-g(x)\right]^2\Rightarrow h'(x)=2\left[f(x)-g(x)\right]\left[f'(x)-g'(x)\right]$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-g(x)=0\quad(1)\\f'(x)-g'(x)=0\ (2)\end{array}\right.$

Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x=-1$; $x=x_1\left(x_1\in(-1;3)\right)$; $x=3$, và $f(x)-g(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là nghiệm bội lẻ của (1). Mà $f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc 4 nên bậc của phương trình (1) nhỏ hơn hoặc bằng 4. Từ đó suy ra phương trình (1) là phương trình bậc 3.

Do phương trình (1) là phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình (1).

Suy ra $h'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt và $h'(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm đấy, nên hàm $h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có đạo hàm $y'=2(x-1)f'\left((x-1)^2+m\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x-1)^2+m=-1\\(x-1)^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x-1)^2=-1-m\\(x-1)^2=3-m\end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m\le 0<3-m\Leftrightarrow -1\le m<3\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Câu 16: Chọn A

Ta có $y'=\left(f(x)-2x\right)'.f''\left(f(x)-2x\right)=\left(f'(x)-2\right).f''\left(f(x)-2x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)-2=0\\ f''\left(f(x)-2x\right)=0\end{array}\right..$$

Khi $f'(x)-2=0\Leftrightarrow f'(x)=2$ có 3 nghiệm.

Khi $f''\left(f(x)-2x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)-2x=m\ (1)\\ f(x)-2x=n\ (2)\end{array}\right.$.

Xét phương trình (1): $f(x)-2x=m\,(m<0)$, đặt $g(x)=f(x)-2x\Rightarrow g'(x)=f'(x)-2$.

Phương trình đạo hàm $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1<m\\ x=0\\ x=x_2>n\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$x_1<m$		0		$x_2>n$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	e	$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

Xét phương trình (2): $f(x)-2x=n\,(n<e)$, đặt $h(x)=f(x)-2x\Rightarrow h'(x)=f'(x)-2$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1<m\\ x=0\\ x=x_2>n\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$x_1<m$		0		$x_2>n$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	e	$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17: Chọn C

Ta có $g'(x)=\left(\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2\right)'=2f\left(2x^2+x\right)(4x+1)f'\left(2x^2+x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(2x^2+x\right)=0 \\ 4x+1=0 \\ f'\left(2x^2+x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x=a\ \ (a>1) \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ 2x^2+x=1 \\ 2x^2+x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}(a>1) \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Vì $a>1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x)=0$ là:

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+8a}}{4}<x_2=-1<x_3=-\dfrac{1}{4}<x_4=\dfrac{1}{2}<x_5=\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}$.

Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0\in\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\left(0\in\left(x_3;x_4\right)\right)$. Xét $g'(0)=2.f(0)f'(0)>0$. Suy ra $g'(x)>0$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ hay khoảng $\left(x_3;x_4\right)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ có 2 điểm cực đại là $x=x_2=-1$ và $x=x_4=\dfrac{1}{2}$.

Câu 18: Chọn C

Giả sử $f(x)=ax^4+bx^2+c.$ Từ $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \\ f'(\pm1)=0 \\ f(\pm1)=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$. Suy ra $f(x)=2x^4-4x^2+1$.

Khi đó $y=\dfrac{1}{x^4}\left[2x^4-4x^2\right]^4=2^4x^4(x^2-2)^4$. Có $y'=2^4.4.x^3.(x^2-2)^3.(3x^2-2)$.

Và $y'=0\Leftrightarrow x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$; $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Do đó, hàm số y có 5 cực trị.

Câu 19: Chọn D

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m\Rightarrow g'(x)=2f(x)f'(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ta có: $f'(x)=0 \Rightarrow$ có hai nghiệm là $x=0; x=3$ và $f(x)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ có một nghiệm là $x=a<0$ nên hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Do đó để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f^2(x)+f(x)+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=1-4m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$.

Câu 20: Chọn C

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-1$; $x=0$; $x=1$

$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x)=kx(x-1)(x+1)=k\left(x^3-x\right)$, với $k\in\mathbb{R}$ và $k\neq 0$

$\Rightarrow f(x)=k\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C\right)$, C là một hằng số

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1;3)$ và $(0;-1)$ $\Rightarrow \begin{cases} k\left(-\dfrac{1}{4}+C\right)=3 \\ kC=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-16 \\ C=\dfrac{1}{16} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=-16\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{16}\right)=-4x^4+8x^2-1$

$\Rightarrow f(x+1)=-4(x+1)^4+8(x+1)^2-1$

$\Rightarrow f(x+1)=-4\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)+8\left(x^2+2x+1\right)-1$

$\Rightarrow f(x+1)=-4x^4-16x^3-16x^2+3 \Rightarrow f'(x+1)=-16x^3-48x^2-32x$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{4(x-2)^3\left[f(x+1)\right]^3-(x-2)^4.3\left[f(x+1)\right]^2.f'(x+1)}{\left[f(x+1)\right]^6}$

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{4(x-2)^3 f(x+1)-3(x-2)^4 f'(x+1)}{\left[f(x+1)\right]^4}=\dfrac{(x-2)^3\left[4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)\right]}{\left[f(x+1)\right]^4}$

Do đó: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)=0 \end{array}\right.$

Phương trình: $4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)=0$

$\Leftrightarrow 4\left(-4x^4-16x^3-16x^2+3\right)-3(x-2)\left(-16x^3-48x^2-32x\right)=0$

$\Leftrightarrow -16x^4-64x^3-64x^2+12-3\left(-16x^4-16x^3+64x^2+64x\right)=0$

$\Leftrightarrow -16x^4-64x^3-64x^2+12+48x^4+48x^3-192x^2-192x=0$

$\Leftrightarrow 32x^4-16x^3-256x^2-192x+12=0 \Leftrightarrow 8x^4-4x^3-64x^2-48x+3=0$

Xét hàm số $h(x)=8x^4-4x^3-64x^2-48x+3$

Ta có: $h'(x)=32x^3-48x^2-128x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$ với $x_1<-1<0<x_2<1<2<x_3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		-1		0		x_2		1		x_3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0			$+$			0	$-$			0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$h(x_2)$	$\searrow$	-105	$\searrow$	$h(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Mà $h(2)=-233 \Rightarrow x=2$ không là nghiệm của phương trình $h(x)=0$

$\Rightarrow$ Phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^4}{\left[f(x+1)\right]^3}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 21: Chọn C

$$g(x)=f(|2x-1|+2) \Rightarrow g'(x)=\frac{2(2x-1)}{|2x-1|}f'(|2x-1|+2)$$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|2x-1|+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x-1|+2=-1(VN)\\ |2x-1|+2=\dfrac{1}{2}(VN)\\ |2x-1|+2=4\end{array}\right. \Leftrightarrow |2x-1|+2=4$

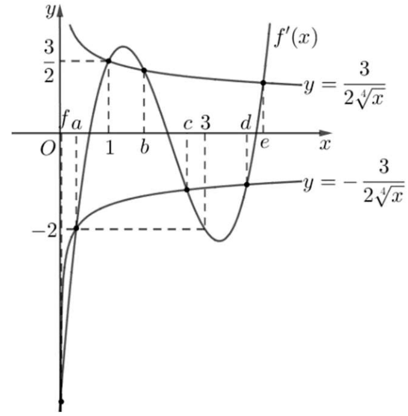
$$\Leftrightarrow |2x-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=2\\ 2x-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x=\dfrac{1}{2}$, nhưng tại $x=\dfrac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định . Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x=\dfrac{-1}{2}, x=\dfrac{3}{2}$.

Câu 22: Chọn C

Ta có: $g(x)=f(x^4)-2x^3+1 \Rightarrow g'(x)=4x^3.f'(x^4)-6x^2=2x^2.\left[2x.f'(x^4)-3\right]$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=0\\ f'(x^4)=\dfrac{3}{2x} \quad (*)\end{array}\right.$



$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ f'\left(x^4\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x^4=f\ \vee\ x^4=a\ \vee\ x^4=c\ \vee\ x^4=d\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x^4=1\ \vee\ x^4=b\ \vee\ x^4=e\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt[4]{f}\\ x=-\sqrt[4]{a}\\ x=-\sqrt[4]{c}\\ x=-\sqrt[4]{d}\\ x=1\\ x=\sqrt[4]{b}\\ x=\sqrt[4]{e}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{d}$		$-\sqrt[4]{c}$		$-\sqrt[4]{a}$		$-\sqrt[4]{f}$		0		1		$\sqrt[4]{b}$		$\sqrt[4]{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 23: Chọn B

Đặt: $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Ta có: đồ thị giao với trục Oy tại điểm $\left(0;1\right)\Rightarrow d=1$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $\left(-1;3\right)$; $\left(1;-1\right)$ nên

$$\Rightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\ 3a+2b+c=0\\ a+b+c+1=-1\\ -a+b-c+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=1\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x+1.$$

$\Rightarrow f\left(x-1\right)=\left(x-1\right)^3-3\left(x-1\right)+1=x^3-3x^2+3\Rightarrow f'\left(x-1\right)=3x^2-6x$.

Có $g\left(x\right)=\left[xf\left(x-1\right)\right]^2\Rightarrow g'\left(x\right)=2xf\left(x-1\right)\left[f\left(x-1\right)+xf'\left(x-1\right)\right]$.

$\Rightarrow g'\left(x\right)=2x\left(x^3-3x^2+3\right)\left(4x^3-9x^2+3\right)$.

$$\text{Suy ra } g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^3-3x^2+3=0\\ 4x^3-9x^2+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\approx 2,532\\ x\approx 1,347\\ x\approx -0,879\\ x\approx 2,076\\ x\approx 0,694\\ x\approx -0,52\end{array}\right..$$

Phương trình $g'\left(x\right)$ là phương trình bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 24: Chọn A

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-\left(2-x\right)^2}\in\left[0;2\right]$

$$y=f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)\Rightarrow y'=3\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0$$

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2}\in[0;2]$ nên $\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$

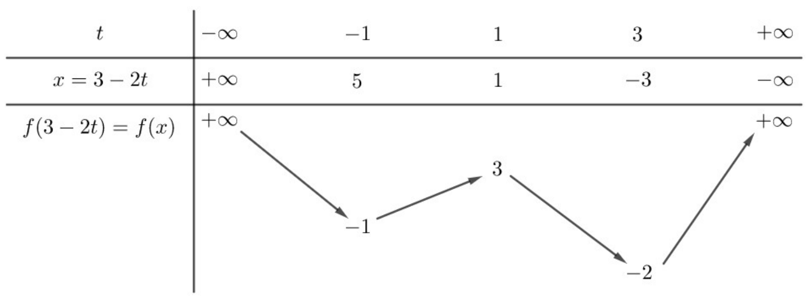
$$f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0\Leftrightarrow\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}=2\Leftrightarrow\sqrt{4x-x^2}=\frac{1}{3}.$$

Phương trình này có 2 nghiệm

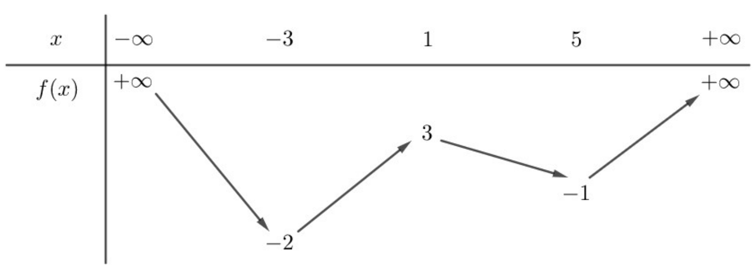
Vậy y' có 3 nghiệm, và qua mỗi nghiệm này thì y' đổi dấu, do đó hàm số có 3 cực trị.

Câu 25: Chọn B

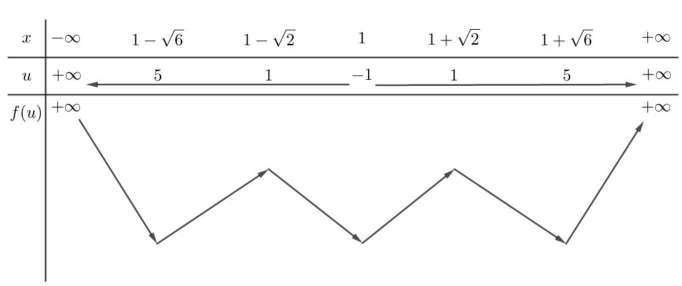
Trước hết ta khôi phục bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ từ bảng biến thiên của hàm $f(v(t))=f(3-2t)$ như sau:



Ta có thể vẽ lại bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ cho dễ nhìn như sau:



Xét hàm số $f\left(x^2-2x\right)=f(u);u=x^2-2x$. Ta có bảng biến thiên ghép $\left[x;u;f(u)\right]$ từ kỹ năng ghép trục như sau:



Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(1-\sqrt{6};1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1;1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{6};+\infty\right)$.

Mà $\left(1;2\right)\subset\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. Nên hàm số đồng biến trên $\left(1;2\right)$.

Câu 26: Chọn B

Chọn hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+4x^2-12x+4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+8x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2=a\\x=6=8-a\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a;x=8-a$.

Ta có $f\left(x^2-2x+3\right)=-\dfrac{1}{3}\left(x^2-2x+3\right)^3+4\left(x^2-2x+3\right)^2-12\left(x^2-2x+3\right)+4$

$\Rightarrow\left[f\left(x^2-2x+3\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+3=2\\x^2-2x+3=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1=x_0\\x=3=5+2x_0\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2-2x+3\right)$ thỏa đề bài.

Mặt khác: $\left[f\left(x^3-3x^2+1\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\x^3-3x^2+1=2\\x^3-3x^2+1=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x\approx 3,103\\x\approx 3,425\end{array}\right.$ (4 nghiệm đơn)

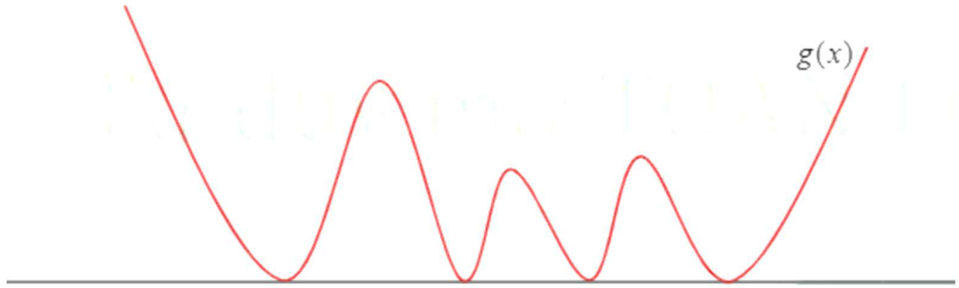
Vậy hàm số $f\left(x^3-3x^2+1\right)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 27: Chọn D

Ta có :

$x^2.f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=0\\x=a,(a<-2)\\x=b,\left(-2<b<0\right)\\x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn, $x=a,x=b$ là nghiệm bội lẻ, $x=4$ là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)=x^4.\left[f(x)\right]^2=0$ có bốn nghiệm bội chẵn suy ra ĐTHS $g(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại bốn điểm. Mặt khác hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty$ nên ta có thể phác họa đồ thị hàm số $g(x)$ như sau :



Vậy hàm số có 7 cực trị.

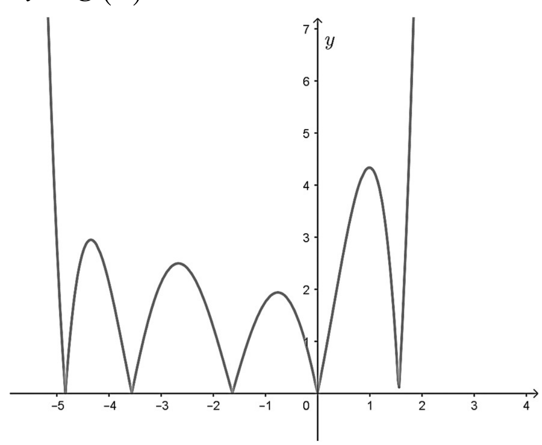
Câu 28: Chọn D

Ta có: $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ \left[f(x+2)\right]^6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+2)=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+2=a<-2 \\ x+2=b,\ b\in(-2;0) \\ x+2=c,\ c\in(0;2) \\ x+2=d>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a-2<-4 \\ x=b-2\in(-4;-2) \\ x=c-2\in(-2;0) \\ x=d-2>0 \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt, và cả 5 nghiệm đều là nghiệm kép.

Ta suy ra hình dáng đồ thị $y=g(x)$ như sau



Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.

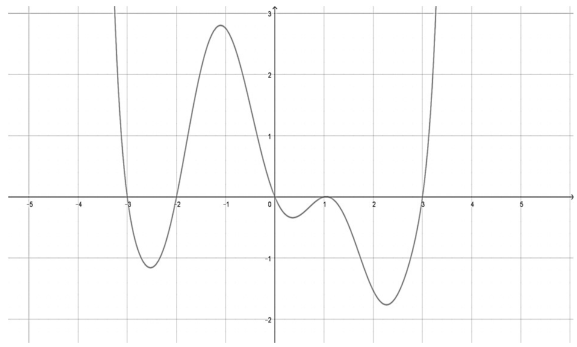
Câu 29: Chọn A

Ta có:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x).f(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(2x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \\ 2x+1=-3 \\ 2x+1=1 \\ 2x+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 6 điểm, trong đó các nghiệm $\left\{-3;3;-2;0\right\}$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép

Ta có hình dáng đồ thị $y = g\left(x\right)$ như sau



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 30: Chọn D

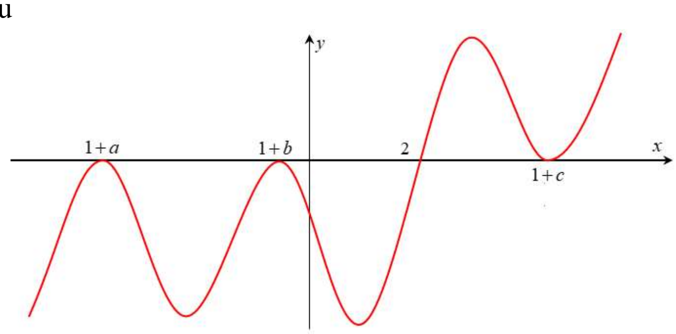
Nhận xét $\begin{cases} g\left(x\right) \ge 0, \forall x \ge 2 \\ g\left(x\right) < 0, \forall x < 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right) = -\infty \end{cases}$,

Cho $g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x-2\right)^3 = 0 \\ \left[f\left(x-1\right)\right]^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f\left(x-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-1=a\left(a<-2\right) \\ x-1=b\left(-2<b<-1\right) \\ x-1=1 \\ x-1=c\left(c>2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1+a<-1 \\ x=1+b\in\left(-1;2\right) \\ x=1+c>3 \end{array}\right.$.

Do đó $g\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có ba nghiệm bội chẵn và 1 nghiệm bội lẻ

Hay đồ thị $g\left(x\right)$ có 3 điểm tiếp xúc với trục hoành và một điểm giao điểm với trục hoành mà tại đó hàm số đổi dấu



Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 6 cực trị.

Câu 31: Chọn C

Ta có $y=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Đặt $g(x)=f\left(x^2-x\right)$. Suy ra $g(|x|)=f\left(x^2-|x|\right)$. Suy ra $g(|x-m|)=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x-m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x-m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

Hàm số $y=f\left(-|x+2021m|-2m+1\right)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=f\left(-|x|-2m+1\right)$.

Sơ đồ biến đổi đồ thị:

$f(x)\to f(-x)\to f\left(-(x+2m-1)\right)=f\left(-x-2m+1\right)\to f\left(-|x|-2m+1\right)$

Các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là: ($x_1=a<-1$); ($x_2=-1$); $(x_3=-3)$; $(x_4=-b<-3)$

Suy ra các điểm cực trị của hàm số $f\left(-(x+2m-1)\right)=f\left(-x-2m+1\right)$ là

$(x_1=-a-2m+1)$; $(x_2=1-2m+1)$;$(x_3=-3-2m+1)$;$(x_4=-b-2m+1)$

Để hàm số $y=\left(-|x|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(-x-2m+1\right)$ có đúng 2 giá trị của m.

Câu 33: Chọn B

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$

$y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)\Leftrightarrow y'=\left(3x^2-2mx-5\right).f'\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\\f'\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\\x^3-mx^2-5x+4m=-2\\x^3-mx^2-5x+4m=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3x^2-2mx-5=0 & (1)\\(x-2)\left[x^2-(m-2)x-2m-1\right]=0 & (2)\\(x+2)\left[x^2-(m+2)x+2m-1\right]=0 & (3)\end{array}\right.$

Có $\begin{cases}\Delta_1=m^2+15>0\\\Delta_2=m^2-4m+8>0\\\Delta_3=m^2-4m+8>0\end{cases}$

Nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, (2) luôn có 3 nghiệm phân biệt, (3) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)$ có 6 điểm cực trị thì (1) có 2 nghiệm trùng với các nghiệm của (2) hoặc (3).

Trường hợp 1: Phương trình (1) nhận $x=-2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình (1) nhận $x=2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m=\frac{-7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị $m = \pm\dfrac{7}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 34: Chọn A

Ta có: $y = \left[f(x) - m\right]^3 - 3\left[f(x) - m\right] - 3m$

$$\Rightarrow y' = \left\{3\left[f(x)-m\right]^2 - 3\right\}.f'(x) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\left[f(x)-m\right]^2 - 3 = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$$

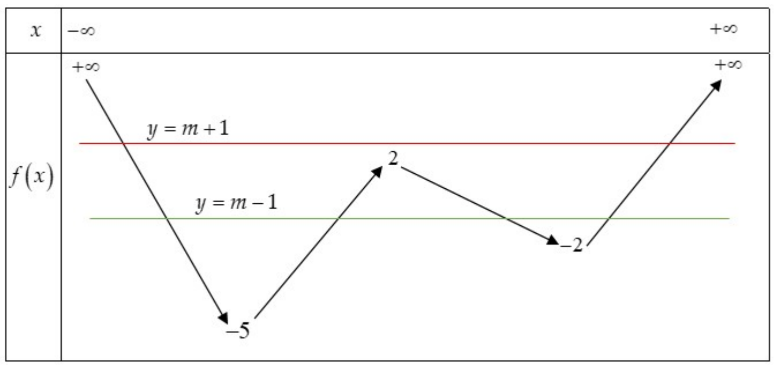
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[f(x)-m\right]^2 = 1 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = m+1 (1) \\ f(x) = m-1 (2) \\ f'(x) = 0 (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: số điểm cực trị của hàm số $y = \left[f(x)-m\right]^3 - 3f(x)$ là tổng số nghiệm bội lẻ của ba phương trình (1);(2);(3).

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để hàm số $y = \left[f(x)-m\right]^3 - 3f(x)$ có 9 điểm cực trị thì phương trình (1) và (2) có 6 nghiệm phân biệt bội lẻ. Căn cứ vào bảng biến thiên, có 2 trường hợp sau:

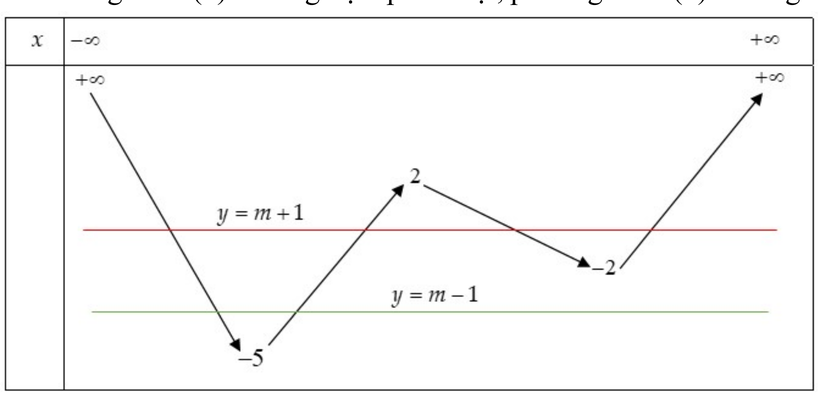
Trường hợp 1: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow \begin{cases} m+1 > 2 \\ -2 < m-1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3 \xrightarrow{m\in Z} \Rightarrow m = 2.$$

Khi $m+1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m = 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow \begin{cases} -2 < m+1 < 2 \\ -5 < m-1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ -4 < m < - \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -1 \xrightarrow{m\in Z} \Rightarrow m = -2.$$

Khi $m-1=-2 \Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=-1$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2;-1;1;2\}$.

Câu 35: Chọn D

Ta có:

$$y' = 3f'(x)\left[f(x)\right]^2 - 2m.f'(x).f(x) - (2m-3).f'(x)$$
$$= f'(x)\left[3\left(f(x)\right)^2 - 2mf(x) - (2m-3)\right]$$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 3\left(f(x)\right)^2 - 2mf(x) - (2m-3) = 0 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Để hàm số có 4 cực trị $\Rightarrow 3\left(f(x)\right)^2 - 2mf(x) - (2m-3) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Đặt $t=f(x) \Rightarrow 3t^2 - 2mt - (2m-3) = 0$

Phương trình vô nghiệm:

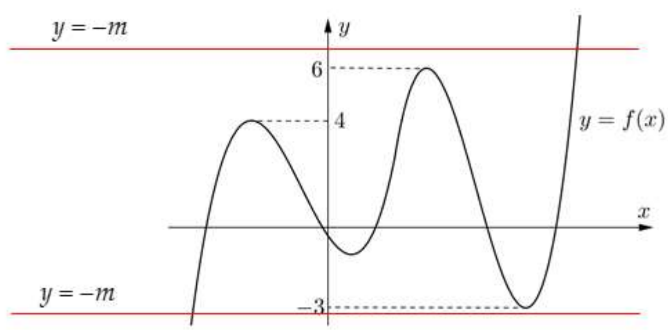
$\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(2m-3) \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 9 \le 0 \Leftrightarrow -3-3\sqrt{2} \le m \le -3+3\sqrt{2}$

Vậy có 9 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36: Chọn C

Ta có $y' = 2f(x)f'(x) - 2(m+2)f'(x) = 2f'(x)\left(f(x)-m-2\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \ (*) \\ f(x)=m+2 \end{array}\right.$



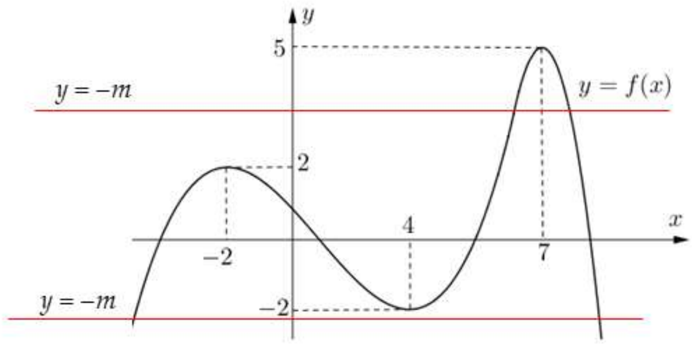
Dựa vào đồ thị thì $(*)$ có 4 nghiệm

Do đó để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2 \le -3 \\ m+2 \ge 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m \ge 4 \end{array}\right.$. Vậy có 33 giá trị m.

Câu 37: Chọn B

Ta có: $y' = 2\left(f(x)+m\right).f'(x)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m \\ x=-2 \\ x=4 \\ x=7 \end{array}\right.$



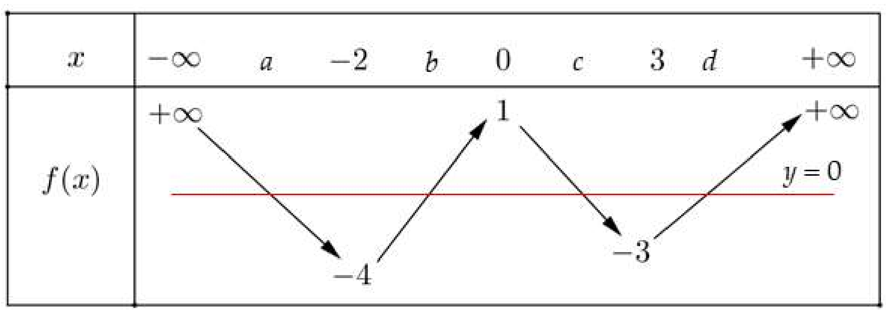
Hàm số có 5 điểm cực trị khi

$\left[\begin{array}{l} -m \le -2 \\ 2 \le -m < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ -5 < m \le -2 \end{array}\right.$. Vậy có 22 giá trị m

Câu 38: Chọn B

Ta có: $y' = 3f^2(x).f'(x) + 12f(x).f'(x) = 3f(x).f'(x)\left(f(x)+4\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\left(a < -2\right) \\ x = b\left(-2 < b < 0\right) \\ x = c\left(0 < c < 3\right) \\ x = d\left(d > 3\right) \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$$



Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		a		-2		b		0		c		3		d		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu y' thì hàm số có 4 điểm cực tiểu

Câu 39: Chọn A

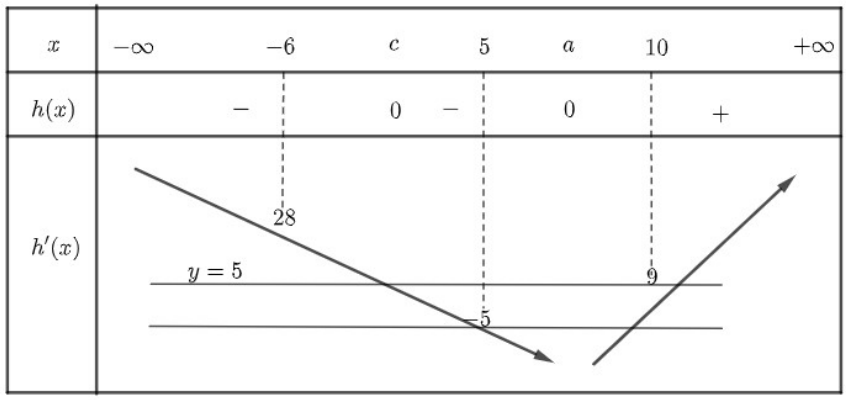
Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right) - 3x + 9\right) \Rightarrow g'\left(x\right) = \left(f'\left(x\right) - 3\right)f'\left(f\left(x\right) - 3x + 9\right)$.

Giải phương trình đạo hàm: $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right) = 3 \quad (co\, mot\, nghiem\, boi\, le) \\ f'\left(f\left(x\right) - 3x + 9\right) = 0 \end{array}\right.$

Để xét phương trình $f'\left(f\left(x\right) - 3x + 9\right) = 0$ thì ta cần khảo sát hàm số $h\left(x\right) = f\left(x\right) - 3x + 9$.

Ta có: $h'(x)=f'(x)-3=0 \Leftrightarrow f'(x)=3 \Leftrightarrow x=c; x=a$.

Bảng biến thiên:



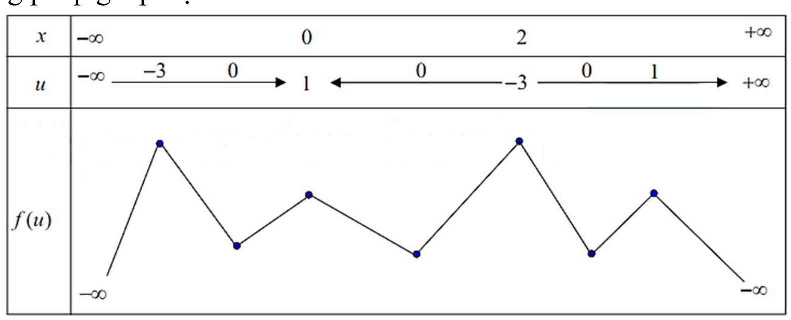
Xét $f'(f(x)-3x+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x)=f(x)-3x+9=-5 \Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le \\ h(x)=f(x)-3x+9=b\in(0;5) \Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le \\ h(x)=f(x)-3x+9=5 \Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le \end{array}\right.$

Như vậy phương trình đạo hàm $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ ứng với 7 điểm cực trị.

Câu 40: Chọn A

Đặt $u=x^3-3x^2+1 \Rightarrow u'=3x^2-6x$.

Sử dụng phương pháp ghép trục như sau:



Như vậy hàm số có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 41: Chọn B

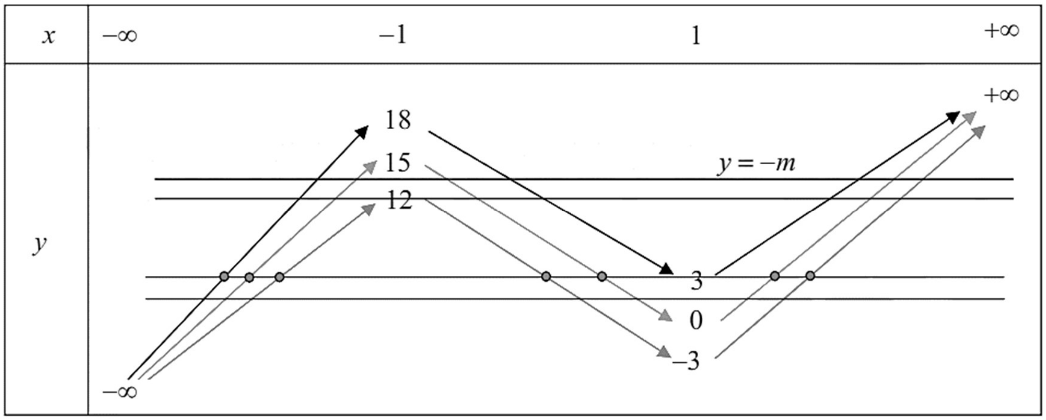
Xét hàm số $g(x)=f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right) \Rightarrow g'(x)=3\left(x^2-1\right).2^{x^3-3x+2}.f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right).\ln 2$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow co\ 2\ nghiem\ boi\ le \\ f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0 \end{array}\right.$.

Để thoả mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ.

Ta có: $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^3-3x+2}+m=-2 \\ 2^{x^3-3x+2}+m=1 \\ 2^{x^3-3x+2}+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^3-3x+2}+2=-m \\ 2^{x^3-3x+2}-1=-m \\ 2^{x^3-3x+2}-4=m \end{array}\right.$

Xét sự biến thiên của ba hàm số $2^{x^3-3x+2}+2$, $2^{x^3-3x+2}-1$, $2^{x^3-3x+2}-4$ trên cùng một hệ trục toạ độ



Để phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ thì

$$\left[\begin{array}{l}12\le -m<15\\0<-m\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-15<m\le -12\\-3\le m<0\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{-14;-13;-12;-3;-2;-1\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 42: Chọn C

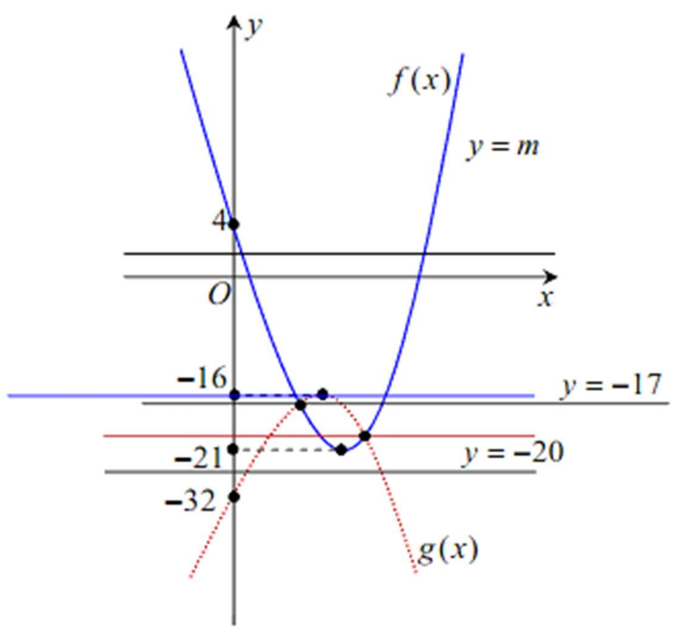
Hàm số liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và có đạo hàm không triệt tiêu trên một lân cận chứa điểm $x=0$ nên hàm số $f\left(|x|\right)$ đạt cực trị tại điểm $x=0$.

Để hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f\left(x\right)$ phải có hai điểm cực trị dương.

Ta có: $f'\left(x\right)=\left(x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}=0\\x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\left(x^2-5x+1\right)=m=f\left(x\right)\\-4\left(x^2-4x+8\right)=m=g\left(x\right)\end{array}\right.$$

Vẽ hai đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ trên cùng một hệ trục toạ độ như sau:



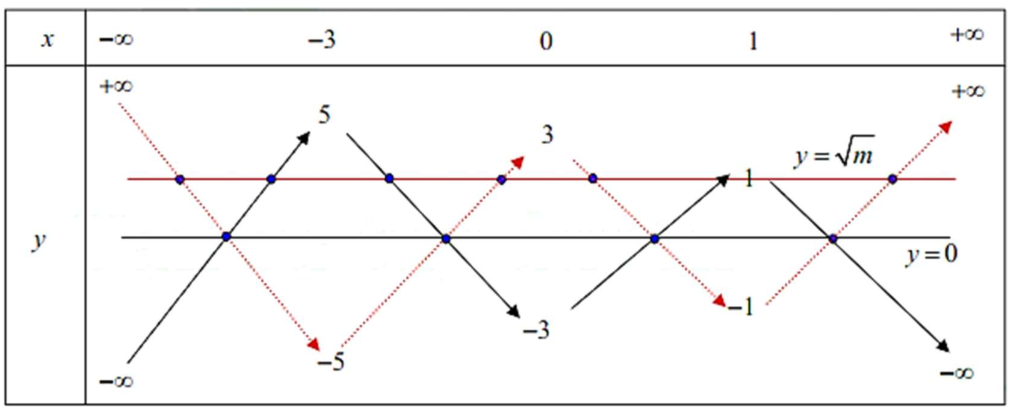
Để có đúng hai điểm cực trị dương thì $\left[\begin{array}{l}-16\le m<4\\-32<m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-16\le m\le 3\\-31\le m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có tất cả 33 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 43: Chọn C

Có: $g'(x)=3\left(f^2(x)-m\right).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Rightarrow co\ 3\ nghiem\ don: x=-3; x=0; x=1\\f^2(x)-m=0\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có đúng 9 điểm cực trị thì phương trình $f^2(x)-m=0$ phải có 6 nghiệm bội lẻ.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{m}\\-f(x)=\sqrt{m}\end{array}\right.$. Xét sự tương giao của hai hàm số $f(x)$ và $-f(x)$ trên cùng một bảng biến thiên như hình vẽ sau đây:



Suy ra $1\le\sqrt{m}<3\Leftrightarrow 1\le m<9\Rightarrow$ có 8 giá trị nguyên m thoả mãn.

Câu 44: Chọn C

Ta có: $f(x)=\int\limits_{2018}^{x^2-2x} g(t)dt=G(t)\Big|_{2018}^{x^2-2x}=G\left(x^2-2x\right)-G(2018)$.

Đạo hàm $f'(x)=G'\left(x^2-2x\right)(2x-2)=g\left(x^2-2x\right).2(x-1)$.

Xét phương trình

$$g\left(x^2-2x\right).2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \Rightarrow nghiem\ boi\ le\\g\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-3\ (vo\ nghiem)\\\left(x^2-2x\right)^2=a>0\Rightarrow co\ hai\ nghiem\ kep\\x^2-2x=7\Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{2}\Rightarrow hai\ nghiem\ boi\ le\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình đạo hàm có 3 nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 45: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx+1\right)\Rightarrow g'(x)=2(x-m)f'\left(x^2-2mx+1\right)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ f'(x^2-2mx+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=1 \\ x^2-2mx+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=m & (1) \\ x^2-2mx=0 & (2) \\ x^2-2mx+2=0 & (3) \end{array}\right. \quad (*)$

Bài toán yêu cầu phương trình $(*)$ phải có đúng 3 nghiệm bội lẻ. Đã có một nghiệm bội lẻ ở phương trình (1), vậy nên trong hai phương trình bậc hai còn lại phải có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và phương trình còn lại không có nghiệm phân biệt.

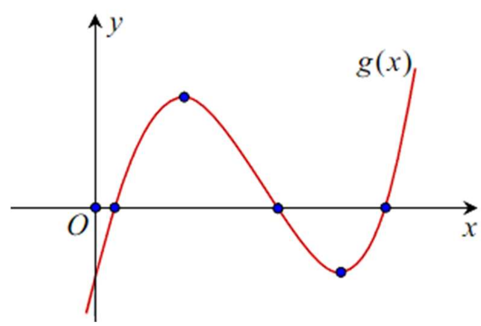
Ta có: $\Delta_2=4m^2$ và $\Delta_3=4m^2-8 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2=4m^2>0 \\ \Delta_3=4m^2-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ -\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{\pm 1\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 46: Chọn C

Đặt $g(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x-m$.

Hình vẽ minh hoạ:



Đạo hàm $g'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1)=3(x^2-3mx+2m-1)=0 \Rightarrow x=1; x=2m-1$.

Yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm phía bên phải Oy và nằm về hai phía của trục hoành, đồng thời $g(0)<0$. Suy ra:

$$\begin{cases} 2m-1\ne 1 \\ 2m-1>0 \\ g(1).g(2m-1)<0 \\ g(0)=-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ (2m-2)(-4m+12m^2-10m+2)<0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ m>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ m>0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2022;2022]} 2\le m\le 2022$. Vậy có tất cả 2021 giá trị thoả mãn.

Câu 47: Chọn B

Hàm số $f(3-2x)$ đạt cực trị tại $\left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow 3-2x=9 \\ x=-1 \Rightarrow 3-2x=5 \\ x=4 \Rightarrow 3-2x=-5 \end{array}\right.$.

Vậy ta coi như hàm số $f(x)$ sẽ đạt cực trị tại các điểm $x=-5; x=5; x=9$.

Ta đặt $g(x)=f(x^2-2mx) \Rightarrow g(|x|)=f(x^2-2m|x|)$.

Nhận thấy hàm số $g(x)=f(x^2-2mx)$ xác định tại điểm $x=0$ và không phải là hằng số trong một khoảng chứa điểm $x=0$, nên hàm số $g(|x|)=f(x^2-2m|x|)$ sẽ đặt cực trị tại $x=0$.

Để hàm số $g(|x|)=f(x^2-2m|x|)$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $g(x)=f(x^2-2mx)$ có 3 điểm cực trị dương.

Ta có: $g'(x)=(2x-2m)f'(x^2-2mx)=0\left[\begin{array}{l}x=m\\x^2-2mx=9\\x^2-2mx=5\\x^2-2mx=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & (1)\\x^2-2mx-9=0 & (2)\\x^2-2mx-5=0 & (3)\\x^2-2mx+5=0 & (4)\end{array}\right.$

Dễ thấy phương trình (2) và (3) mỗi phương trình cho ta một nghiệm đơn và dương. Phương trình (4) nếu có nghiệm đơn và dương thì sẽ có hai nghiệm phân biệt. Vì vậy phương trình (4) không thể có hai nghiệm phân biệt dương, tức là phải có hai nghiệm phân biệt âm hoặc không có hai nghiệm phân biệt và phương trình (1) có nghiệm dương.

Suy ra:

$$\begin{cases}m>0\\ \left[\begin{array}{l}\Delta'_{(4)}=m^2-5\le 0\\ \begin{cases}\Delta'_{(4)}=m^2-5>0\\2m\le 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} 0<m\le\sqrt{5}\to m\in\left(0;\sqrt{5}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow P=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(0^2+5\right)=10$$

Câu 48: Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f(x^3-mx^2-2x+m)\Rightarrow g'(x)=(3x^2-2mx-2)f'(x^3-mx^2-2x+m)$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình đạo hàm phải có 6 nghiệm bội lẻ:

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-2=0\\f'(x^3-mx^2-2x+m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2mx-2=0\\ \left[\begin{array}{l}x^3-mx^2-2x+m=-1\\x^3-mx^2-2x+m=1\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Phương trình $3x^2-2mx-2=0$ luôn cho hai nghiệm phân biệt. Suy ra hai phương trình còn lại phải cho đúng 4 nghiệm bội lẻ:

$\left[\begin{array}{l}x^3-mx^2-2x+m=-1\\x^3-mx^2-2x+m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0 & (1)\\(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0 & (2)\end{array}\right.$

Nhận thấy hai phương trình $(1),(2)$ luôn cho hai nghiệm phân biệt, và các nghiệm của hai phương trình này là không trùng nhau.

Để hai phương trình có đúng 4 nghiệm bội lẻ thì:

Trường hợp 1: $x=1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$ và $x=-1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$.

Trường hợp 2: $x=-1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$ và $x=1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-(m-1)-m-1=0\\1+(m+1)+m-1\neq 0\end{cases}\\\begin{cases}1-(m-1)-m-1\neq 0\\1+(m+1)+m-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\m\neq-\dfrac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}m\neq\dfrac{1}{2}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Vậy có hai giá trị thực của m thoả mãn.

Câu 49: Chọn C

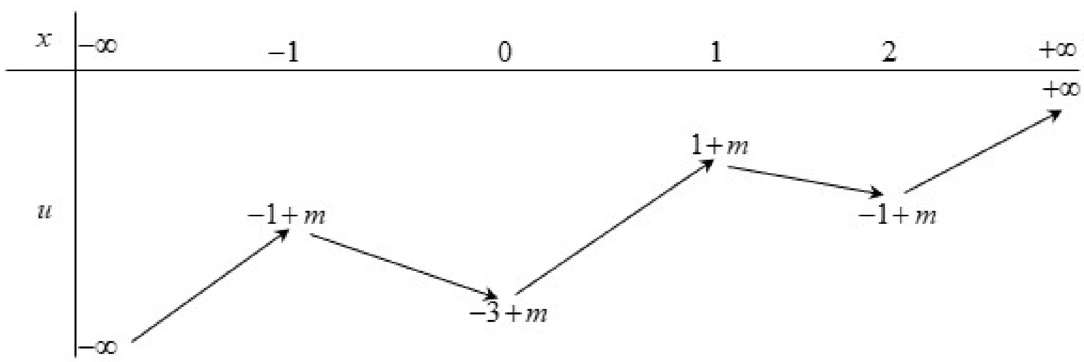
Ta có: $f'(x)=a(x+2)(x-1)\Rightarrow f(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+b$.

Đồ thị hàm số đi qua $A(-2;4)$, $B(1;-1)$ nên ta có: $\begin{cases}4=\dfrac{10}{3}a+b\\-1=-\dfrac{7}{6}a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{10}{9}\\b=\dfrac{8}{27}\end{cases}$.

Hàm số ban đầu là $f(x)=\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+\dfrac{8}{27}$.

Đặt $\begin{cases}u=x^3-3\left|x^2-1\right|+m\\f(x)\to f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.\end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2>-3+m\\1<-1+m\end{cases}\\\begin{cases}-3+m<-2<-1+m\\-1+m<1<1+m\end{cases}\\\begin{cases}-2>-1+m\\1<1+m\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<1\\m>2\end{cases}\ (loai)\\\begin{cases}-1<m<1\\0<m<2\end{cases}\\\begin{cases}m<-1\\m>0\end{cases}\ (loai)\end{array}\right.$.

Vậy $m\in(0;1)\Rightarrow$ không có giá trị nào của m thoả mãn.

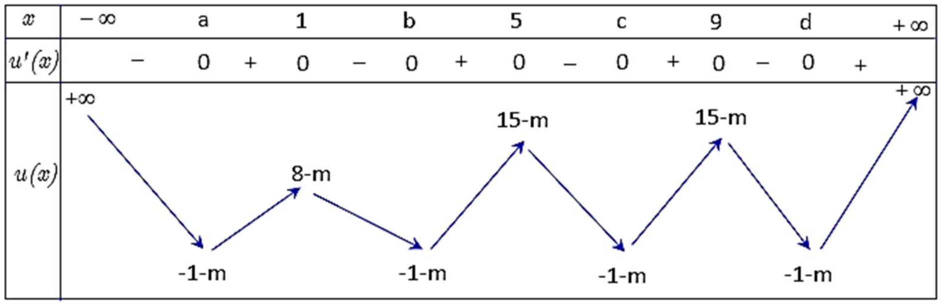
Câu 50: Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = f^2(x) - 2f(x) - m \\ h(x) = f(|x|) \end{cases} \Rightarrow u'(x) = 2f'(x).f(x) - 2f'(x)$.

Giải phương trình đạo hàm: $u'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1;5;9\} \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{a;b;c;d\} \end{array}\right.$.

Lại có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{\pm 9; \pm 5; \pm 1; 0\}$.

Bảng biến thiên:



Để hàm số $g(x)$ có 51 điểm cực trị thì $\begin{cases} -9 \le -1 - m \\ -5 > -1 - m \\ 1 < 8 - m \\ 5 > 8 - m \\ 9 < 15 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 8 \\ m > 4 \\ m < 7 \\ m > 3 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 6$.

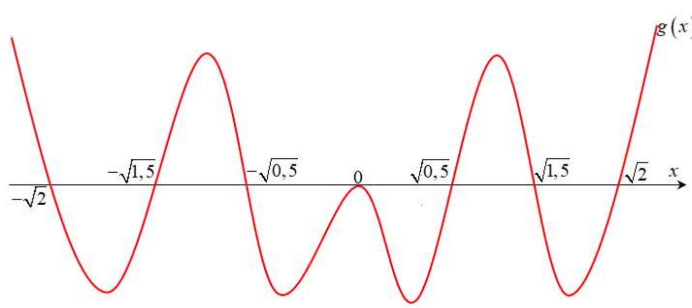
Vậy có một giá trị $m = 5$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51: Chọn B

Ta có: $g(x) = x^2\left[f(x^2-1)\right]^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ f(x^2-1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 \approx -0,5 \\ x^2 - 1 \approx 0,5 \\ x^2 - 1 = 1 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow x \in \left\{0; \pm\sqrt{0,5}; \pm\sqrt{1,5}; \pm\sqrt{2}\right\}$.

Phác họa nhanh đồ thị:



Câu 52: Chọn B

Xét hàm số $y = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$, tập xác định trên $\mathbb{R}$.

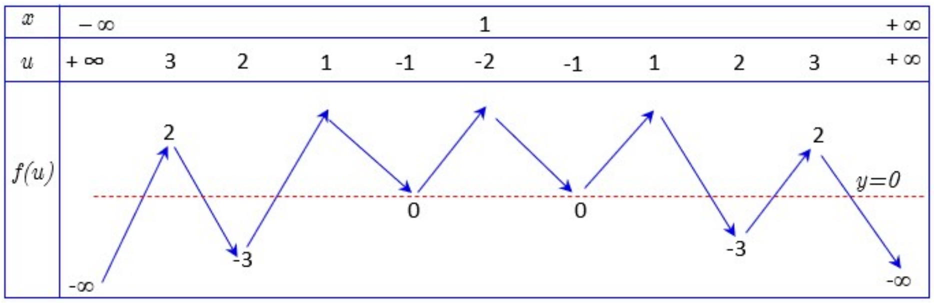
Ta có: $y=\begin{cases}2x^2-8x+4 & neu\ x\le 1 hoac\ x\ge 7\\ 8x-10 & neu\ 1<x<7\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}4x-8 & neu\ x\le 1 hoac\ x\ge 7\\ 8 & neu\ 1<x<7\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
y'		-	||	+	||	+	

Suy ra hàm số có một điểm cực trị $x=1$.

Đặt $u=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$. Sử dụng phương pháp ghép trục:



Suy ra hàm số $y=\left|f(u)\right|$ có 7 điểm cực đại.