

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

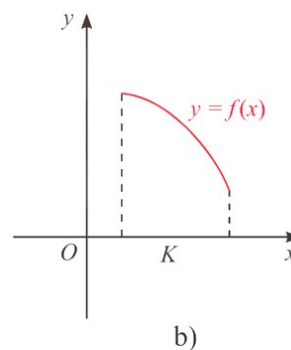
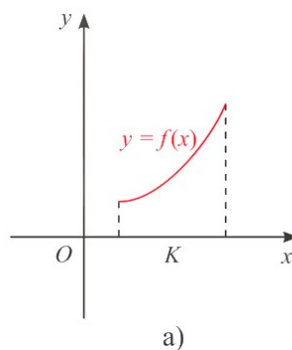
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

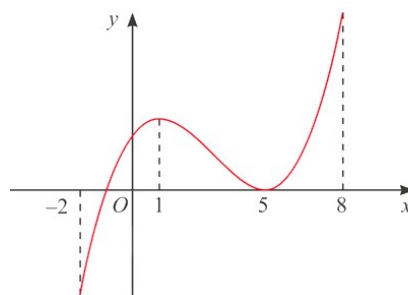
Chú ý

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.a).
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.b).



- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình.



Giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(5; 8)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

ĐỊNH LÝ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K .

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

Chú ý

- Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K .

- Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K .

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x - 4$; $y' > 0$ với $x \in (2; +\infty)$; $y' < 0$ với $x \in (-\infty; 2)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

b) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i=1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y		-4		4		

Arrows indicating the trend of the function: from $-\infty$ to -4 (increasing), from -4 to $-\infty$ (decreasing), from $+\infty$ to 4 (decreasing), from 4 to $+\infty$ (increasing).

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$.

Ví dụ 4. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(x+1) - (x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$, với mọi $x \neq -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1		1

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$.

Giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Ta có: $y' = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$; $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	0	-
y	$+\infty$		$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.