

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO
NĂM HỌC 2009 – 2010 -Lớp 12 THPT**

Qui định: Học sinh trình bày vắn tắt cách giải, công thức áp dụng, kết quả tính toán vào ô trống liền kề bài toán. Các kết quả tính gần đúng, nếu không có chỉ định cụ thể, được ngầm định chính xác tới 4 chữ số phân thập phân sau dấu phẩy

Bài 1. (10 điểm) Cho hàm số : $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 3^{\sqrt{x}}}{\log_3^2 x + 12}$. Tính tổng:

$$S = f(\cot^2 1) + f(\cot^2 2) + f(\cot^2 3) + \dots + f(\cot^2 20)$$

Bài 2. (10 điểm) Tính gần đúng nghiệm (theo đơn vị độ, phút, giây) của phương trình:

$$\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$$

Bài 3. (10 điểm) Tính gần đúng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{2^{\cos 2x} + (x^2 + 1) \cdot \sin x + 3}{x^2 - x + 1} \text{ trên } [0; 1]$$

Bài 4. (20 điểm) a) Tìm x biết : $A_{13}^x + C_{23}^x - P_{x+1} - x^{x-2} - (2x+3)^6 = 33772562$ với P_n là số hoán vị của n phần tử, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

b) Tìm hệ số của các số hạng chứa x^8 và x^{19} trong khai triển nhị thức Newton của $(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5})^n$, biết rằng: $C_{16}^{n+1} - C_{15}^n = 7(n+3)$ (n : nguyên dương, $x > 0$)

Bài 5. (30 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy và $AB = 3,54$ cm; $AD = 4,35$ cm; $SA = 5,22$ cm. Lấy các điểm B', D' theo thứ tự thuộc SB, SD sao cho AB' vuông góc với SB, AD' vuông góc với SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'

Bài 6. (10 điểm) Tính giá trị của biểu thức:

$$N = \sqrt{20+12} \sqrt{20122001} + \sqrt{20+12} \sqrt{20122002} + \dots + \sqrt{20+12} \sqrt{20122008} + \sqrt{20+12} \sqrt{20122009}$$

Bài 7. (10 điểm) Tính gần đúng đạo hàm cấp 30 của hàm số: $f(x) = \sin^2 x$ tại $x = 201209 \frac{\pi}{5}$

---Hết---

ĐÁP ÁN (Dành cho máy FX- 570ES)

Bài 1. (Chế độ: Rad)

Cách 1: $X = X + 1: A = A + \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\tan(X)}\right)^2} + 3\sqrt{\left(\frac{1}{\tan(X)}\right)^2}}{\left(\log_3\left(\left(\frac{1}{\tan(X)}\right)^2\right)\right)^2 + 12}$

CALC 0 → X, 0 → A $\square\square$... cho đến khi X nhận giá trị 20 thì dừng, đọc kết quả ở biến B

Kết quả: $S \approx 160,0595$

Cách 2: Khai báo : $\sum_{X=1}^{X=20} \left(\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\tan(X)}\right)^2} + 3\sqrt{\left(\frac{1}{\tan(X)}\right)^2}}{\left(\log_3\left(\left(\frac{1}{\tan(X)}\right)^2\right)\right)^2 + 12} \right)$

Bài 2. Biến đổi phương trình: $\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$ thành:

$$4\tan^3 x - 2\tan^2 x - 3\tan x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \approx -1,732050808 \\ \tan x \approx 2 \\ \tan x \approx 1,732050808 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -60^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x \approx 63^\circ 26' 6'' + k \cdot 180^\circ \\ x \approx 60^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$$

Bài 3. (RAD, TABLE)

Nhập hàm: $f(X) = \frac{2^{\cos 2X} + (X^2 + 1) \cdot \sin X + 3}{X^2 - X + 1}$ $\square$

Start? 0 $\square$

End? 1 $\square$

Step? 0,04 $\square$

Suy ra $\min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 5$

AC

Start? 0,44 $\square$

End? 0,56 $\square$

Step? 0,005 $\square$

AC

Start? 0,48 $\square$

End? 0,5 $\square$

Step? 0,001 =

Suy ra $\max_{[0;1]} f(x) = 6,7389$

Bài 4.

a) Điều kiện: n nguyên dương, $n \leq 13$.

Khai báo : $X = X + 1: A_{13}^X + C_{2X+1}^X - P_{X+1} - X^{X-2} - (2X+3)^6 - 33772562$

CALC 0 → A $\square\square$... cho đến khi biểu thức bằng 0, ứng với $X = 11$

b) Điều kiện: n nguyên dương, $n \leq 15$.

* Khai báo: $Y = Y + 1: C_{16}^{Y+1} - C_{15}^Y - 7(Y+3)$

CALC 0 → Y $\square\square$... cho đến khi biểu thức bằng 0, ứng với $Y = 12 = n$

$$\ast \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^{-3})^{12-k} (x^{\frac{5}{2}})^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^{-36 + \frac{11k}{2}}$$

$$\bullet -36 + \frac{11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = \frac{44.2}{11} = 8. \text{ Hệ số của } x^8 \text{ là: } C_{12}^8 = 495$$

$$\bullet -36 + \frac{11k}{2} = 19 \Leftrightarrow k = \frac{55.2}{11} = 10. \text{ Hệ số của } x^{19} \text{ là: } C_{12}^{10} = 66$$

Bài 5. + Chứng minh và tính toán:

* Đặt: $AB = a, AD = b, SA = c$

* **Dựng C'**: Trong $(ABCD)$, gọi: $O = AC \cap BD$

Trong (SBD) , gọi: $I = SO \cap B'D'$

Trong (SAC) : $AI \cap SC = C'$

* $BC \perp AB, AB \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB)$
 $\Rightarrow BC \perp AB', \text{ mà: } AB' \perp SB \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC \text{ (1)}$

Tương tự $AD' \perp SC \text{ (2)}$

(1) & (2) $\Rightarrow SC \perp (AB'C'D') \Rightarrow SC \perp AC'$

$$\ast \frac{V_{S,AB'C'}}{V_{S,ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}; \frac{V_{S,AC'D'}}{V_{S,ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD}$$

$$\ast V_{S,ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} abc = V_{S,ACD}$$

$$\ast \Delta SAB \text{ vuông tại A có: } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + c^2} \text{ và } SA \cdot AB = AB' \cdot SB \Leftrightarrow AB' = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow SB' = \sqrt{SA^2 - AB'^2} = \sqrt{c^2 - \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{c^4}{a^2 + c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\ast \text{Tương tự: } SD' = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}; SC' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Do đó:

$$\bullet V_{S,AB'C'} = V_{S,ABC} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{abc^5}{6(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)} \bullet V_{S,AC'D'} = V_{S,ACD} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{abc^5}{6(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2)}$$

$$\text{Vậy: } V_{S,AB'C'D'} = V_{S,AB'C'} + V_{S,AC'D'} = \frac{abc^5}{6(a^2 + b^2 + c^2)} \left(\frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} \right) = \frac{abc^5(a^2 + b^2 + 2c^2)}{6(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}$$

$$+ \text{ **Khai báo: } \frac{A \cdot BC^5(A^2 + B^2 + 2C^2)}{6(A^2 + B^2 + C^2)(A^2 + C^2)(B^2 + C^2)}**$$

$$\text{CALC } 3,54 \rightarrow A; 4,35 \rightarrow B; 5,22 \rightarrow C$$

$$+ \text{ **Kết quả: } V_{S,AB'C'D'} \approx 7,9297 \text{ (cm}^3\text{)}**$$

Bài 6. Khai báo: $A = A - 1; B = \sqrt{20 + 12\sqrt{A + B}}$

CALC 20122010 $\rightarrow A, 0 \rightarrow B$... cho đến khi $A = 20122001$ thì dừng, đọc kết quả ở B

Kết quả: 2088,5103

$$\text{**Bài 7.}** } f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x; \quad f''(x) = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 2^2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2^2 \cdot \sin\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad \dots f^{(30)}(x) = 2^{29} \cdot \sin\left(2x + 29 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{(30)}\left(201209 \frac{\pi}{5}\right) = 2^{29} \cdot \sin\left(2 \cdot 201209 \frac{\pi}{5} + 29 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbf{165902235,9}$$

