|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **THỪA THIÊN THUẾ**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC** | **ĐỀ ĐỀ XUẤT KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐBBB NĂM 2023**  **Đề thi môn: Toán lớp 10**  **Thời gian làm bài: 180 phút** |

**Câu 1 (4,0 điểm).** Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn

 với mọi .

**Câu 2 (4,0 điểm).** Cho  là các số thực thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**Câu 3 (4,0 điểm).** Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn , *BC* cố định, *A* thay đổi. Đường tròn nội tiếp  của tam giác *ABC* tiếp xúc với ba cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F*. Gọi *K, M, N* lần lượt là giao điểm của *EF, FD, DE* với *BC, CA, AB*. Đường tròn đường kính *KD, EM, FN* lần lượt cắt  tại .

a. Chứng minh  đồng quy tại một điểm .

b. Gọi *T* là trung điểm của *EF*. Chứng minh *JT* luôn đi qua một điểm cố định khi *A* thay đổi.

**Câu 4 (4,0 điểm).** Cho  là một số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu tồn tại  nguyên dương sao cho  thì  là số chẵn.

**Câu 5 (4,0 điểm).** Cho một bảng hình chữ nhật kích thước  chứa  ô vuông. Tồn tại cách tô màu cho tất cả các ô vuông của bảng bằng hai màu trắng hoặc đen sao cho bất kì hình chữ nhật kích thước  đều có đúng hai ô trắng. Tính số ô trắng.

**---------Hết---------**

**ĐÁP ÁN, THANG ĐIỂM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | Nội dung trình bày | **Điểm** |
| **1** | Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn  với mọi . | **4,0** |
|  | Giả sử có  để . Trong đề bài, thay  và so sánh, ta có ngay  Suy ra  đơn ánh.  Trong đề, thay  ta có  nên  .  Từ tính đơn ánh, ta có  hay  với mọi | **1,0** |
|  | Thay  vào đề, ta có  nên đặt  thì .  Thay  vào đề, ta có  hay  , nên  Do đó, ta có  và | **0,5** |
|  | Thay  vào đề, ta có  nên  ,  dùng tính đơn ánh, ta có  hay  với mọi  (1)  Thay  vào đề, ta có  nên  toàn ánh trên , mà  lẻ nên  toàn ánh trên | **0,5** |
|  | Thay  vào đề, ta có  nên  với mọi  (2)  Tiếp tục thay  vào (2), ta có . Kết hợp với (1) thì  hay  với mọi  Do  lẻ nên cũng có  với mọi  Từ (1), ta có  nên thay  ta có ngay | **0,5** |
|  | Từ (2), ta có  (\*) nên thay vào đề thì  hay  .  Do  toàn ánh nên có thể viết lại thành  với mọi  (3)  Trong (3), thay  ta có . | **0,5** |
|  | Trong (3), thay  thì  hay  .  Suy ra , với  thì . Suy ra  , kết hợp với (\*) thì  hay  .  Từ đó ta có ngay  với mọi  Thử lại thấy thỏa mãn. | **1,0** |
| **2** | Cho  là các số thực thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức . | **4,0** |
|  | Với mọi  ta có: .  Trường hợp 1:  Nếu tồn tại thì . Khi đó . | **1,0** |
|  | Trường hợp 2:  Nếu . Ta có:    Ta lại có: . | **1,5** |
|  | Suy ra: .  Do đó: .  Vậy giá trị lớn nhất của là . Dấu bằng xảy ra khi  hoặc . | **1,5** |
| **3** | Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn , *BC* cố định, *A* thay đổi. Đường tròn nội tiếp  của tam giác *ABC* tiếp xúc với ba cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F*. Gọi *K, M, N* lần lượt là giao điểm của *EF, FD, DE* với *BC, CA, AB*. Đường tròn đường kính *KD, EM, FN* lần lượt cắt  tại .  a. Chứng minh  đồng quy tại một điểm .  b. Gọi *T* là trung điểm của *EF*. Chứng minh *JT* luôn đi qua một điểm cố định khi *A* thay đổi. | **3,0** |
| **3a** |  | **2,0** |
|  | Gọi tâm của 3 đường tròn đường kính *KD, EM, FN* lần lượt là . Dễ chứng minh tâm của các đường tròn đường kính thuộc trục đẳng phương của  và  nên chúng thẳng hàng. | **1,0** |
|  | Có  là cực của  đối với  ,  là cực của  đối với ,  là cực của  đối với .  Lại có  thẳng hàng nên suy ra  đồng quy tại *J*. | **1,0** |
| **3b** |  | **2,0** |
|  | Gọi  lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc *A, B, C* của tam giác *ABC*, khi đó  là đường tròn *Euler* của tam giác .  +, Kẻ đường kính *DD’* của . Theo kết quả quen thuộc, ta có: thẳng hàng, từ đây suy ra . Tương tự ta có . | **1,0** |
|  | +, Tam giác  và  có các cạnh tương ứng song song, từ đây suy ra *J* là tâm của phép vị tự biến tam giác  thành . Do *T* là trung điểm của *EF* nên  là trung điểm của , từ đây suy ra *X* là điểm chính giữa cung *BAC* của  suy ra *JT* luôn đi qua điểm *X* cố định. | **1,0** |
| **4** | Cho  là một số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu tồn tại  nguyên dương sao cho  thì  là số chẵn. | **4,0** |
|  | Từ giả thiết suy ra tồn tại  nguyên dương thỏa mãn  (1). Không mất tổng quát, giả sử . Từ (1) suy ra  (2). | **1,0** |
|  | Vì  nên , do đó  (3). | **1,0** |
|  | Nếu  thì , do đó  (\*). Mặt khác, từ  và (\*) suy ra | **1,0** |
|  | Nếu  thì , do đó  (\*\*). Vì  nên (\*\*) suy ra . Khi đó .  Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có . | **1,0** |
| **5** | Cho một bảng hình chữ nhật kích thước  chứa  ô vuông. Tồn tại cách tô màu cho tất cả các ô vuông của bảng bằng hai màu trắng hoặc đen sao cho bất kì hình chữ nhật kích thước  đều có đúng hai ô trắng. Tính số ô trắng. | **4,0** |
|  | Ta cần chứng minh mỗi hình chữ nhật  chỉ chứa đúng 1 ô trắng.  Giả sử tồn tại một hình chữ nhật  chứa hai ô trắng hoặc không chứa ô trắng nào.  Nếu tồn tại hình chữ nhật  không chứa ô trắng nào thì hình chữ nhật  cạnh nó phải chứa hai ô trắng. Vậy ta chỉ cần chứng minh tồn tại hình chữ nhật chứa hai ô trắng. | **1,0** |
|  | Xét trường hợp hai ô trắng nằm kề nhau như hình sau:   |  |  |  | | --- | --- | --- | | A | B | C | | D | E | F | | G | H | I |   Giả sử hai ô A, B được tô trắng thì khi đó 4 ô D, E, G, Hphải tô đen. Suy ra ô F, I phải tô trắng.  Khi đó hình chữ nhật  chứa các ô B, C, E, F, H, I chứa 3 ô trắng.  Vậy trường hợp này không thỏa mãn. | **1,0** |
|  | Xét trường hợp hai ô trắng không nằm kề nhau như hình sau:   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | A | B | C | D | | E | F | G | H | | I | K | L | M |   Giả sử hai ô A, C được tô trắng thì khi đó 4 ô I, Lphải tô trắng. Suy ra ô B, F, K, D, H, M phải tô đen.  Khi đó hình chữ nhật  chứa các ô B, C, D, F, G, H chỉ chứa 1 ô trắng.  Vậy trường hợp này không thỏa mãn. | **1,0** |
|  | Vậy mỗi hình chữ nhật  chỉ chứa đúng 1 ô màu trắng. Ta chia bảng thành  hình chữ nhật . Vậy có  ô trắng. | **1,0** |