

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 15. PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình:

- * Một phương trình một ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x
- * Nghiệm của phương trình: Giá trị của biến thỏa mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho
- * Giải phương trình: Tìm tập nghiệm của phương trình.
- * Hai phương trình tương đương: có cùng một tập nghiệm.

2. Hai quy tắc biến đổi phương trình:

- Quy tắc chuyển vế: Trong một phương trình ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
 - Quy tắc nhân với một số: Trong một phương trình ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với (cho) cùng một số khác 0.
- * Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

3. Phương trình bậc nhất một ẩn:

- * Phương trình có dạng $ax + b = 0$ với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$
- * Phương trình $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) luôn có nghiệm duy nhất: $x = -\frac{b}{a}$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho các phương trình

$$5x^2 - 3y + 4 = 3x - 8y; 2,5x - 10 = 0 \text{ và } 4x^2 - 6x = 5x + 108$$

Trong các phương trình trên:

- Phương trình nào là phương trình một ẩn?
- Phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn?
- Số nào trong tập $S = \{-4; 0; 4\}$ là nghiệm của phương trình một ẩn?

Giải

- Các phương trình $2,5x - 10 = 0$ và $4x^2 - 6x = 5x + 108$ là phương trình một ẩn.
- Phương trình $2,5x - 10 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn.
- Lần lượt thay các giá trị $x = -4; 0; 4$ vào từng phương trình một ẩn ta có:
 - * Với $x = 4$ thì $2,5 \cdot 4 - 10 = 0$
nên $x = 4$ là nghiệm của phương trình $2,5x - 10 = 0$
 - * Với $x = -4$ thì $4x^2 - 6x = 4 \cdot (-4)^2 - 6 \cdot (-4) = 64 + 24 = 88$

$$\text{Và } 5x + 108 = 5 \cdot (-4) + 108 = 88$$

Vậy $x = -4$ là nghiệm của phương trình $4x^2 - 6x = 5x + 108$

Nhận xét: Muốn xem một số có phải là nghiệm của phương trình ta xét xem giá trị đó của ẩn thỏa mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho bằng cách thay vào từng vế của phương trình. Nếu hai vế có cùng giá trị thì số đó là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Cho bốn phương trình:

$$2x - 6 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (2)$$

$$(x - 1)(x + 5) - 2x^2 = 15x - 47 \quad (3)$$

$$(5x - 15)(x^2 + 1) = 0 \quad (4)$$

a) Chứng tỏ rằng $x = 3$ là nghiệm chung của cả bốn phương trình.

b) Chứng tỏ rằng $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1) và (3).

c) Hai phương trình (1) và (2) có tương đương không. Tại sao?

Giải

a) Với $x = 3$

- Thay vào phương trình (1) ta có $2 \cdot 3 - 6 = 6 - 6 = 0$

- Thay vào phương trình (2) ta có $3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

- Thay vào phương trình (3) ta có:

$$\text{Vế trái } (3 - 1)(3 + 5) - 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 9 = 16 - 18 = -2$$

$$\text{Vế phải } 15 \cdot 3 - 47 = 45 - 47 = -2$$

- Thay vào phương trình (4) ta có $(5 \cdot 3 - 15)(3^2 + 1) = (15 - 15) \cdot 10 = 0 \cdot 10 = 0$

$x = 3$ nghiệm đúng cả bốn phương trình nên là nghiệm chung của bốn phương trình.

b) Với $x = -1$

- Thay vào phương trình (1) ta có $2 \cdot (-1) - 6 = -2 - 6 = -8 \neq 0$

- Thay vào phương trình (2) ta có: $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

- Thay vào phương trình (3): $(x - 1)(x + 5) - 2x^2 = 15x - 47$ ta có:

$$\text{Vế trái } (-1 - 1)(-1 + 5) - 2 \cdot (-1)^2 = (-2) \cdot 4 - 2 = -10$$

$$\text{Vế phải } 15 \cdot (-1) - 47 = -15 - 47 = -62$$

Vậy $x = -1$ nghiệm đúng phương trình (2) nhưng không nghiệm đúng phương trình (1) và (3) nên là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1) và (3).

c) Hai phương trình (1) và (2) không tương đương vì không cùng tập nghiệm.

Nhận xét: Ta thay các số đã cho vào từng vế của phương trình để xét xem các số đó có phải là các nghiệm của phương trình. Từ đó xác định tập nghiệm của các phương trình.

b) $x = -1$ là nghiệm của phương trình (2) vì thay vào làm 2 vế cùng có giá trị 0.

Nhưng không là nghiệm của phương trình (1) và (3) vì khi thay vào 2 phương trình làm hai vế có giá trị khác nhau.

c) Tương tự cách 1.

Ví dụ 3: Cho phương trình với a là tham số: $(a^2 + 3a - 10)x^2 = a - 2$ (1)

Chứng minh rằng:

a) Với $a = 2$ phương trình (1) nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

b) Với $a = -5$ phương trình (1) vô nghiệm.

c) Với $a = -5$ phương trình (1) tương đương với phương trình

$$(a + 5)x + 2016 = 0 \quad (2)$$

* *Tìm cách giải:* Với mọi giá trị của ẩn x :

- Nếu hai vế của phương trình luôn có giá trị bằng nhau thì phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x ($\forall x$). Tập nghiệm là \mathbb{R} .
- Nếu hai vế của phương trình luôn có giá trị khác nhau thì phương trình vô nghiệm. Tập nghiệm là \emptyset .
- Hai phương trình cùng vô nghiệm được coi là hai phương trình tương đương.

Giải

a) Với $a = 2$ phương trình (1) có dạng $(2^2 + 3 \cdot 2 - 10)x^2 = 2 - 2$

hay $0x^2 = 0$. Phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x$.

b) Với $a = -5$ phương trình (1) có dạng $(25 - 15 - 10)x^2 = -5 - 2$

hay $0x^2 = -7$. Phương trình vô nghiệm vì hai vế của phương trình luôn có giá trị khác nhau $\forall x$. Tập nghiệm của phương trình là \emptyset .

c) Với $a = -5$ phương trình (2) trở thành

$(-5 + 5)x + 2016 = 0$ hay $0x + 2016 = 0$. Phương trình này cũng vô nghiệm vì vế trái khác 0, $\forall x$. Tập nghiệm của phương trình là \emptyset cùng tập nghiệm với phương trình $0x^2 = -7$. Do đó hai phương trình $0x + 2016 = 0$ và $0x^2 = -7$ tương đương.

Ví dụ 4: Bằng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân hãy giải các phương trình:

a) $(x + 2) + (2x + 4) + (3x + 6) + \dots + (50x + 100) = -2550$ (1)

b) $|2x - 6| = 4 + 3x$ (2)

* *Tìm cách giải:*

Câu a) lưu ý sử dụng công thức tính tổng các số hạng của dãy số cộng (từ số thứ hai, các số đều bằng số liền trước cộng với cùng một số):

$$\text{Tổng} = \frac{1}{2}(\text{số hạng đầu} + \text{số hạng cuối}) \times \text{Số số hạng.}$$

Câu b) sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối: nếu $|A| = \begin{cases} A \text{ neu } A \geq 0 \\ -A \text{ neu } A < 0 \end{cases}$.

Sau khi giải xong cần kiểm tra để xác định kết quả tìm được có thoả mãn điều kiện hay không.

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow (x + 2x + 3x + \dots + 50x) + (2 + 4 + 6 + \dots + 100) = -2550$
 $\Leftrightarrow (1 + 2 + 3 + \dots + 50)x + (2 + 4 + 6 + \dots + 100) = -2550$
 $\Leftrightarrow \frac{(1+50).50}{2}x + \frac{(2+100).50}{2} = -2550 \Leftrightarrow 1275x + 2550 = -2550$
 $\Leftrightarrow 1275x = -2550 - 2550 \Leftrightarrow 1275x = -5100 \Leftrightarrow x = -5100 : 1275$
 $\Leftrightarrow x = -4.$

b) $|2x - 6| = 4 + 3x$

* Nếu $x \geq 3$ thì $2x - 6 \geq 0 \Rightarrow |2x - 6| = 2x - 6$

Phương trình trở thành $2x - 6 = 4 + 3x \Leftrightarrow 2x - 3x = 4 + 6 \Leftrightarrow x = -10$ (loại vì không thoả mãn điều kiện)

* Nếu $x < 3$ thì $2x - 6 < 0 \Rightarrow |2x - 6| = -2x + 6$

Phương trình trở thành $-2x + 6 = 4 + 3x \Leftrightarrow -2x - 3x = 4 - 6$

$\Leftrightarrow -5x = -2 \Leftrightarrow x = 0,4.$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 0,4$.

Ví dụ 5: Xét xem các cặp phương trình sau có tương đương không? Giải thích.

a) $-5x + 5 = 2x - 7$ và $-7x + 12 = 0$;

b) $9x - 15 = 12x + 27$ và $3x - 5 = 4x + 9$;

c) $(5x - 15)(x^2 + 1) = 0$ và $3x - 20 = -11$;

d) $5x - 9 = 11$ và $a(5x - 9) = 11a$ với a là một số.

* *Tìm cách giải:* Để xét các cặp phương trình có tương đương hay không, ngoài so sánh các tập nghiệm ta còn sử dụng hai quy tắc biến đổi phương trình.

Giải

a) $-5x + 5 = 2x - 7 \Leftrightarrow -7x + 12 = 0$ vì theo quy tắc chuyển vế
 $-5x + 5 = 2x - 7 \Leftrightarrow -5x + 5 - 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow -7x + 12 = 0.$

b) $9x - 15 = 12x + 27 \Leftrightarrow 3x - 5 = 4x + 9$ vì theo quy tắc nhân.

$9x - 15 = 12x + 27 \Leftrightarrow (9x - 15) \cdot \frac{1}{3} = (12x + 27) \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x - 5 = 4x + 9.$

c) Phương trình $(5x - 15)(x^2 + 1) = 0$ có $x^2 + 1 \neq 0 \forall x$

nên $(5x - 15)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Phương trình $3x - 20 = -11 \Leftrightarrow 3x = -11 + 20 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$

Tập nghiệm của phương trình $(5x - 15)(x^2 + 1) = 0$ là $S = \{3\}$

Tập nghiệm của phương trình là $3x - 20 = -11$ là $S = \{3\}$

Hai phương trình có cùng tập nghiệm nên

$$(5x - 15)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 20 = -11.$$

d) Nếu $a \neq 0$ thì $5x - 9 = 11 \Leftrightarrow a(5x - 9) = 11a$ theo quy tắc nhân.

Nếu $a = 0$ thì $a(5x - 9) = 11a$ trở thành $0x - 0 = 0$ phương trình này nghiệm đúng với mọi x nên không tương đương với phương trình $5x - 9 = 11$ có một nghiệm duy nhất là $x = 4$.

* Nhận xét:

b) Để ý rằng nhân hai vế với $\frac{1}{3}$ nghĩa là chia cả hai vế cho 3.

c) Khi áp dụng quy tắc nhân phải lưu ý số nhân (hay chia) phải khác 0.

Ví dụ 6. Cho phương trình $(m^2 - 9)x^2 + 2(m - 3)x + 49 = 0$ với m là số đã cho.

a) Tìm giá trị của m để phương trình trở thành phương trình bậc nhất có một ẩn số và giải phương trình bậc nhất ẩn vừa tìm được;

b) Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm là $x = 2$.

* *Tìm cách giải:* a) Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax + b = 0, (a \neq 0)$. Để phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất một ẩn thì hệ số của x^2 là $m^2 - 9 = 0$ và hệ số của x là $m - 3 \neq 0$.

b) $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu $A(x_0) = B(x_0)$

Giải

$$a) \text{ Ta có } \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 3)(m + 3) = 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \Leftrightarrow m = -3 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Với $m = -3$ phương trình trở thành $(9 - 9)x^2 + 2(-3 - 3)x + 49 = 0$ hay $0x^2 - 12x + 49 = 0$ hay $-12x + 49 = 0$ là phương trình bậc nhất có một ẩn số.

Nghiệm của phương trình là $x = -\frac{49}{-12} = 4\frac{1}{12}$.

b) Để phương trình có nghiệm là $x = 2$ ta phải có:

$$(m^2 - 9).2^2 + 2(m - 3).2 + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 36 + 4m - 12 + 49 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$(x - 1) + (x - 2) + (x - 3) + \dots + (x - 2015) = 0.$$

* *Tìm cách giải:* Vế trái của phương trình là tổng của 2015 các hạng tử, mỗi hạng tử là một hiệu giữa x và một số tự nhiên từ 1 đến 2015. Vậy ta có $2015x$ còn tổng đại số $-1 - 2 - 3 - \dots - 2015$ ta viết thành

$-(1 + 2 + 3 + \dots + 2015)$ và sử dụng công thức tính tổng của n số tự nhiên khác 0 đầu tiên $S_n = \frac{(1 + n)n}{2}$ để

tính.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + (x-2015) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2015x - (1+2+3+\dots+2015) = 0 \\ \Leftrightarrow & 2015x - \frac{(1+2015) \cdot 2015}{2} = 0 \Leftrightarrow 2015x - 1008 \cdot 2015 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2015x = 1008 \cdot 2015 \Leftrightarrow x = 1008. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{99} + \frac{x-2}{98} + \frac{x-3}{97} + \frac{x-4}{96} = 4. \quad (1)$$

* *Tìm cách giải:* Ở phương trình (1), nếu ta quy đồng mẫu số ở hai vế thì mẫu số chung rất lớn: 99.98.97.96. Để ý rằng nếu mỗi hạng tử (phân thức) ở vế trái được bớt đi 1 (thêm vào -1) rồi quy đồng từng cặp thì xuất hiện $(x-100)$ ở tử. Vì vậy ta chuyển 4 tử về phải sang thành -4 rồi tách $-4 = -1 - 1 - 1 - 1$ và ghép mỗi số -1 với một hạng tử. (Cũng có thể coi cộng vào hai vế cùng một số -4).

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (1) \Leftrightarrow & \left(\frac{x-1}{99} - 1 \right) + \left(\frac{x-2}{98} - 1 \right) + \left(\frac{x-3}{97} - 1 \right) + \left(\frac{x-4}{96} - 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-100}{99} + \frac{x-100}{98} + \frac{x-100}{97} + \frac{x-100}{96} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-100) \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \frac{1}{96} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\text{Do } \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \frac{1}{96} \neq 0. \text{ Nên } x-100=0 \Leftrightarrow x=100.$$

C. Bài tập vận dụng

1. Phương trình một ẩn

15.1. Chứng tỏ rằng phương trình $8a - x - 3 = ax - 11$ luôn nhận $x=8$ là nghiệm dù a lấy bất kỳ giá trị nào.

Hướng dẫn giải – đáp số

(Vế trái viết tắt là VT; vế phải viết tắt là VP)

$$\text{Với } x=8 \text{ ta được: } VT = 8a - 8 - 3 = 8a - 11; VP = 8a - 11$$

Như vậy $VT = VP, \forall a$. Vậy phương trình luôn nhận $x=8$ là nghiệm dù a lấy bất kỳ giá trị nào.

15.2. Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đều nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn:

$$\text{a) } 6(x-1) = 6x - 6;$$

$$\text{b) } (y-3)^2 - 3y = 9 - 9y + y^2;$$

$$\text{c) } \frac{z^3 - 10 - 5z^2 + 2z}{z^2 + 2} = z - 5.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{a) Hai vế đều bằng } 6x - 6;$$

$$\text{b) Hai vế đều bằng } 9 - 9y + y^2;$$

$$c) VT = \frac{z^2(z-5) + 2(z-5)}{z^2+2} = \frac{(z^2+2)(z-5)}{z^2+2} = z-5 = VP$$

15.3. Chứng minh rằng phương trình $2016x - |2016x| = 0$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$\forall x \geq 0$ thì $|2016x| = 2016x$. Khi đó $2016x - |2016x| = 0$

$\Leftrightarrow 2016x - 2016x = 0 \Leftrightarrow 0x = 0$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.

15.4. Chứng minh rằng mỗi phương trình sau vô nghiệm:

a) $5(x+4) = 5x+15$;

b) $(2y-3)^2 = -\sqrt{5} - y^2$;

c) $2z-5 = \frac{2z^2+7z-15}{z+5}$;

d) $-t^2 - 10 = 3|t-2|$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $\forall x$ VT luôn lớn hơn VP 5 đơn vị;

b) $\forall y$ $VT \geq 0; VP < 0$

c) Khi $z = -5$ về phải không có nghĩa.

Khi $z \neq -5$

$$VP = \frac{2z^2+7z-15}{z+5} = \frac{2z^2+10z-3z-15}{z+5} = \frac{(2z-3)(z+5)}{z+5} = 2z-3 = (2z-5)+2;$$

Về phải luôn lớn hơn về trái 2 đơn vị.

d) $\forall t$ thì $VT < 0$ còn $VP \geq 0$.

15.5. Cho phương trình $(m^2 - 9m + 20)x^2 = m - 4$ chứng minh rằng:

a) Với $m = 4$ phương trình nghiệm đúng $\forall x$;

b) Với $m = 5$ phương trình vô nghiệm;

c) Với $m = 0$ phương trình vô nghiệm;

d) Với $m = 6$ phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $m = 4$ phương trình có dạng $0x^2 = 0$ nghiệm đúng $\forall x$.

b) Với $m = 5$ phương trình có dạng $0x^2 = 1$ vô nghiệm.

c) Với $m = 0$ phương trình có dạng $20x^2 = -4$ vô nghiệm vì $20x^2 \geq 0, \forall x$

d) Với $m = 6$ phương trình có dạng $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

2. Phương trình tương đương

15.6. Các cặp phương trình nào sau đây tương đương. Tại sao?

a) $2x - 5 = 0$ và $x = 2,5$;

b) $x - 6 = 0$ và $(x - 6)(x + 6) = 0$;

c) $(x - 1)^2 + 4 = 0$ và $3(x + 5) = 3x - 2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Tương đương vì cùng tập nghiệm $S = \{2, 5\}$

b) Phương trình $(x - 6)(x + 6) = 0$ ngoài nghiệm $x = 6$ còn có nghiệm $x = -6$ nên hai phương trình không tương đương vì không cùng tập nghiệm.

c) Tương đương vì cùng vô nghiệm.

15.7. Các cặp phương trình sau đây có tương đương không. Tại sao?

a) $x^3 + 3x = (x + 1)^2$ và $x = -2$;

b) $y + 5 = 0$ và $|y| = 5$;

c) $z^2 - 9 = 0$ và $|z| = 3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Không tương đương vì $x = -2$ không phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x = (x + 1)^2$

b) Không tương đương vì $y = 5$ là nghiệm $|y| = 5$ nhưng không là nghiệm của $y + 5 = 0$.

c) Tương đương vì chúng cùng tập nghiệm $S = \{-3, 3\}$.

15.8. Cho ba phương trình: $3x - 9 = 6$ (1); $(x - 5)(3x + 1) = 0$ (2) và $2x^2 - 10x = 0$ (3).

a) Chứng tỏ rằng cả ba phương trình có một nghiệm chung là $x = 5$.

b) Các cặp phương trình (1) và (2); (1) và (3); (2) và (3) có tương đương không.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Thay $x = 5$ vào cả ba phương trình đều nghiệm đúng.

b) Các cặp phương trình (1) và (2); (1) và (3); (2) và (3) đều không tương đương vì đều không cùng tập nghiệm.

3. Phương trình bậc nhất có một ẩn số

15.9. Cho ba phương trình:

$12,6 - 3x = 0$ (1); $3x + 2 = 7x - 10$ (2) và $5 - kx = 8$ (3). Biết mỗi phương trình nhận một trong ba giá trị là $x = -2$; $x = 3$ và $x = 4,2$ làm nghiệm. Tìm k .

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $12,6 - 3x = 0 \Leftrightarrow -3x = -12,6 \Leftrightarrow x = -12,6 : (-3) \Leftrightarrow x = 4,2$ và

$3x + 2 = 7x - 10 \Leftrightarrow 3x - 7x = -10 - 2 \Leftrightarrow -4x = -12 \Leftrightarrow x = 3$

Như vậy $x = 4,2$ là nghiệm của phương trình (1); $x = 3$ là nghiệm của phương trình (2). Vậy nghiệm phương trình (3) là $x = -2$.

Do đó $5 - k \cdot (-2) = 8 \Leftrightarrow 2k = 8 - 5 \Leftrightarrow k = 3 : 2 \Leftrightarrow k = 1,5$;

15.10. Cho phương trình $(m^2 - 9) \cdot 2x + 3 = m$ trong đó m là một số. Giải phương trình trên trong mỗi trường hợp sau:

a) $m = 3$;

b) $m = -3$;

c) $m = 5$;

d) $m = 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $m = 3$ ta có $0x + 3 = 3$ nghiệm đúng $\forall x$;

b) Với $m = -3$ ta có $0x + 3 = -3 \Leftrightarrow 0x = -6$ vô nghiệm;

c) Với $m = 5$ ta có $32x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$;

d) Với $m = 0$ ta có $-18x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

15.11. Cho phương trình $5x + 2n - 8 = 2x - 7$ với n là một số.

a) Biết $x = -3$ là nghiệm của phương trình. Tìm n ;

b) Giải phương trình trên khi $n = -2017$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x = -3$ là nghiệm của phương trình nên

$$-15 + 2n - 8 = -6 - 7 \Leftrightarrow 2n = 15 + 8 - 6 - 7 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5.$$

b) Khi $n = -2017$ ta có phương trình $5x - 4034 - 8 = 2x - 7$.

$$\Leftrightarrow 5x - 2x = -7 + 4034 + 8 \Leftrightarrow 3x = 4035 \Leftrightarrow x = 1345.$$

15.12. Giải các phương trình:

$$(x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (50x+99) = 5050.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Vế trái là tổng của 50 hạng tử, mỗi hạng tử chứa trong dấu () là một tổng 2 số hạng, một số hạng chứa x và hệ số của x lần lượt là thứ tự của các hạng tử, số hạng kia lần lượt là các số lẻ từ 1 đến 99. Số các số lẻ cũng là 50 số.

$$\text{Do đó } (x+1) + (2x+3) + (3x+5) + \dots + (50x+99) = 5050$$

$$\Leftrightarrow x + 2x + 3x + \dots + 50x + 1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 5050.$$

$$\Leftrightarrow x(1 + 2 + 3 + \dots + 50) + (1 + 3 + 5 + \dots + 99) = 5050$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+50).50}{2}x + \frac{(1+99).50}{2} = 5050 \Leftrightarrow 1275x + 2500 = 5050$$

$$\Leftrightarrow 1275x = 5050 - 2500 \Leftrightarrow 1275x = 2550 \Leftrightarrow x = 2.$$

15.13. Cho phương trình $(x+1) + (2x+4) + (3x+7) + \dots + (nx+61) = 420$.

a) Tính n ;

b) Giải phương trình.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta biết dãy số cộng (từ số thứ hai, các số đều bằng số liền trước cộng với cùng một số; số được cộng vào ta gọi là khoảng cách) có cách tính số số hạng là: $[\text{số cuối} - \text{số đầu}] : \text{khoảng cách} + 1$

Vế trái của phương trình sẽ có $1 + 4 + 7 + \dots + 61$ là tổng các số hạng của dãy số cộng có khoảng cách (hay công sai) là 3. Do đó số số hạng của tổng sẽ là $(61 - 1) : 3 + 1 = 21$.

$$\text{Ta có: } (x+1) + (2x+4) + (3x+7) + \dots + (nx+61) = 420$$

$$\Leftrightarrow (x + 2x + 3x + \dots + nx) + (1 + 4 + 7 + \dots + 61) = 420$$

a) n chính là số số hạng của tổng $1 + 4 + 7 + \dots + 61$; $n = \frac{61-1}{3} + 1 = 21$.

b) Phương trình trở thành:

$$(1+2+3+\dots+21)x+(1+4+7+\dots+61)=420$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+21).21}{2}x+\frac{(1+61).21}{2}=420 \Leftrightarrow 231x+651=420$$

$$\Leftrightarrow 231x=-231 \Leftrightarrow x=-1.$$

15.14. Giải các phương trình:

a) $\frac{2x+1}{9}+\frac{2x+2}{8}+\frac{2x+3}{7}+\dots+\frac{2x+8}{2}+\frac{2x+9}{1}+9=0;$

b) $\frac{x-1}{2015}+\frac{x-2}{2014}+\frac{x-3}{2013}+\dots+\frac{x-2014}{2}+x=4030.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $9 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{9 \text{ số } 1}$ và ghép mỗi số 1 với một số hạng còn lại được:

$$\left(\frac{2x+1}{9}+1\right)+\left(\frac{x+2}{8}+1\right)+\left(\frac{x+3}{7}+1\right)+\dots+\left(\frac{x+9}{1}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+10}{9}+\frac{2x+10}{8}+\frac{2x+10}{7}+\dots+\frac{2x+10}{1}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+10)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)=0$$

$$\text{Do } \frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2}+1 \neq 0$$

$$\text{Nên } 2x+10=0 \Leftrightarrow 2x=-10 \Leftrightarrow x=-5.$$

b) Biến đổi thành $\frac{x-1}{2015}+\frac{x-2}{2014}+\dots+\frac{x-2014}{2}+\frac{x-2015}{1}-2015=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2015}-1\right)+\left(\frac{x-2}{2014}-1\right)+\dots+\left(\frac{x-2014}{2}-1\right)+\left(\frac{x-2015}{1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2016}{2015}+\frac{x-2016}{2015}+\dots+\frac{x-2016}{2}+\frac{x-2016}{1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2016)\left(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)=0;$$

$$\text{Do } \frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+\dots+\frac{1}{2}+1 \neq 0. \text{ Nên } x-2016=0 \Leftrightarrow x=2016.$$

4. Bài tập vận dụng tổng hợp

15.15. Cho phương trình $mx(x-5)-(x-4)(x+1)=22$ với m là một số.

a) Tìm giá trị của m để phương trình trở thành phương trình bậc nhất một ẩn.

Giải phương trình bậc nhất đó;

b) Chứng minh rằng phương trình vô nghiệm khi $m=0$;

c) Tìm x khi $m=2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Sau khi khai triển và rút gọn phương trình đã cho ta được phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$. Muốn trở thành phương trình bậc nhất một ẩn ta phải có $a = 0$ và $b \neq 0$.

$$\text{Ta có: } mx(x-5) - (x-4)(x+1) = 22$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 5mx - x^2 - x + 4x + 4 - 22 = 0 \Leftrightarrow (m-1)x^2 - (5m-3)x - 18 = 0$$

a) Để phương trình trở thành phương trình bậc nhất có một ẩn thì ta phải có:

$$\begin{cases} m-1=0 \\ 5m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \neq \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

$$\text{Khi } m=1 \text{ phương trình trở thành } (1-1)x^2 - (5-3)x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 18 = 0 \Leftrightarrow -2x = 18 \Leftrightarrow x = -9.$$

b) Khi $m=0$ phương trình trở thành: $(0-1)x^2 - (0-3)x - 18 = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 18 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{4} = 0$$

$$\text{Do } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{4} > 0 \quad \forall x \text{ nên phương trình vô nghiệm.}$$

c) Khi $m=2$ phương trình trở thành $(2-1)x^2 - (10-3)x - 18 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow x(x-9) + 2(x-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-9)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x=9 \text{ hoặc } x=-2.$$

15.16. Cho phương trình với x là ẩn số và m là một số (tham số)

$$(m^2 - 25)x^2 + 10(m+5)x + 5025 = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 197.$$

a) Tìm giá trị của m để phương trình trở thành phương trình bậc nhất có một ẩn số và giải phương trình bậc nhất một ẩn vừa tìm được;

b) Tìm nghiệm của phương trình khi $m=10$;

c) Chứng minh phương trình vô nghiệm khi $m=-5$;

d) Chứng minh $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình với mọi giá trị của m .

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax + b = 0$. Để phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất một ẩn thì hệ số của x^2 là $m^2 - 25 = 0$ và hệ số của x là $m + 5 \neq 0$. Ta có $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 197$ là tổng các số hạng của dãy số cộng có khoảng cách (hay công sai) là 4.

$$\text{Ta có số số hạng của tổng ở vế phải sẽ là } (197 - 1) : 4 + 1 = 50$$

$$\text{và } 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 197 = (1 + 197) \cdot 50 : 2 = 4950$$

$$\text{Khi ấy phương trình trở thành } (m^2 - 25)x^2 + 10(m+5)x + 5025 = 4950$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 25)x^2 + 10(m+5)x + 75 = 0$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 5)(m + 5) = 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$$

Với $m = 5$ phương trình trở thành $\Leftrightarrow (25 - 25)x^2 + 10(5 + 5)x + 75 = 0$

hay $0x^2 + 100x + 75 = 0$ hay $100x + 75 = 0$ là phương trình bậc nhất có một ẩn số. Nghiệm của

$$\text{phương trình là } x = -\frac{75}{100} = -0,75.$$

b) $x = n$ là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu $A(n) = B(n)$

Do đó khi $m = 10$ ta có $(10^2 - 25)x^2 + 10(10 + 5)x + 75 = 0$

$$\Leftrightarrow 75x^2 + 150x + 75 = 0 \Leftrightarrow 75(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 75(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

c) Khi $m = -5$ phương trình trở thành $0x^2 + 0x + 75 = 0$. Vô nghiệm vì $\forall x$ giá trị VT là 75 còn VP là 0.

d) Khi $x = 1$ ta có $(m^2 - 25).1^2 + 10(m + 5).1 + 75 = 0$

$VT = m^2 - 25 + 10m + 50 + 75 = m^2 + 10m + 25 + 75 = (m + 5)^2 + 75 > 0$. $\forall m$. $VT \neq VP$ nên $x = 1$ không là nghiệm của phương trình $\forall m$

15.17. Giải phương trình $|x - 1| = 2x + 3$.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 huyện Thường Tín, Hà Tây, năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $x \geq 1$ phương trình thành $x - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa mãn ĐK)

Với $x < 1$ phương trình thành $1 - x = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (loại).

Nghiệm của phương trình là $x = -4$.

15.18. Giải phương trình $\frac{x+1}{99} + \frac{x+2}{98} = \frac{x+3}{97} + \frac{x+4}{96}$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{x+1}{99} + \frac{x+2}{98} = \frac{x+3}{97} + \frac{x+4}{96} \Leftrightarrow \frac{x+1}{99} + 1 + \frac{x+2}{98} + 1 = \frac{x+3}{97} + 1 + \frac{x+4}{96} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{98} - \frac{1}{97} - \frac{1}{96} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -100 \text{ do } \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{98} - \frac{1}{97} - \frac{1}{96} \right) \neq 0$$

15.19. Giải phương trình $\frac{2-x}{2013} - 1 = \frac{1-x}{2014} - \frac{x}{2015}$.

(Thi kiểm tra chất lượng học sinh giỏi lớp 8 huyện Thường Tín – Hà Nội, năm học 2014 -2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{2-x}{2013} - 1 = \frac{1-x}{2014} - \frac{x}{2015} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2013} + 1 = \frac{1-x}{2014} + 1 - \left(\frac{x}{2015} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (2015 - x) \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2015$$