Chương

Chuyên đề 20. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình nghiệm nguyên là phương trình có nhiều ẩn số, tất cả các hệ số của phương trình đều là số nguyên. Các nghiệm cần tìm cũng là số nguyên. (Phương trình nghiệm nguyên còn gọi là phương trình Diophantus - mang tên nhà toán học cổ Hy Lạp vào thế kỷ thứ II).

2. Phương trình nghiệm nguyên không có công thức giải tổng quát, chỉ có cách giải của một số dạng. Trong chuyên đề này được giới thiệu qua một số ví dụ và bài tập cụ thể.

3. Cách giải phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng, đòi hỏi học sinh phân tích, dự đoán, đối chiếu và tư duy sáng tạo, lôgic để tìm nghiệm.

B. Một số ví dụ

1. Dạng phương trình bậc nhất 2 ẩn $ax+by=c$ ($a,b,c\in \mathbb{Z}$; a, b không đồng thời bằng 0).

Ta có định lý sau: Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax+by=c$ $(a,b,c\in \mathbb{Z}; a,b\neq 0)$ có nghiệm nguyên là ước số chung lớn nhất của a và b là ước của c. (tức là $(a,b)|c$).

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x-3y=5$. (1); b) $2x-5y=20$. (2);

c) $3x-7y=24$. (3); d) $20x-11y=-49$. (4).

** Tìm cách giải:* Câu a) hệ số của ẩn x là 1, ta có thể tính ngay ẩn x theo y. Khi đó y lấy các giá trị nguyên thì chắc chắn x nguyên. Câu b); c) về giá trị tuyệt đối thì hệ số của x nhỏ hơn hệ số của y. Do đó ta tính x theo y. Ta tách phần nguyên, đặt phần phân số bằng ẩn số mới và đưa về phương trình mới có các hệ số nhỏ hơn hệ số của phương trình ban đầu. Tiếp tục cách giải như trên cho đến khi có một ẩn số có hệ số bằng 1 và được tính theo ẩn số kia có hệ số nguyên. Sau đó tính x, y theo ẩn số mới cuối cùng bằng cách tính ngược từ dưới lên.

d) Về giá trị tuyệt đối thì hệ số của y nhỏ hơn hệ số của x. Do đó ta tính y theo x. Tiếp tục làm như b).

Giải

a) Từ (1) ta có: $x=5+3y$. Nếu $y=t\in \mathbb{Z}$ thì [redacted].

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x=5+3t \\ y=t \end{cases} (t\in \mathbb{Z})$

(Muốn tìm các nghiệm nguyên bằng số cụ thể thì ta chỉ việc cho t các giá trị nguyên cụ thể:

Thí dụ với t = 2 thì (x = 11; y = 2); với t = - 3 thì (x = - 9; y = - 3),...)

b) Từ (2) ta có $2x=5y+20 \Leftrightarrow x=10+2y+\dfrac{y}{2}$

Để [redacted] thì $y\in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{y}{2}\in \mathbb{Z}$. Do đó đặt $\dfrac{y}{2}=t(t\in \mathbb{Z})$ ta sẽ có $y=2t$ và $x=10+2.(2t)+t=10+5t$

Vậy phương trình (2) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x=10+5t \\ y=2t \end{cases} (t\in \mathbb{Z})$

c) Cách 1: Tương tự b)

Cách 2: Nhận xét: ƯCLN(3;24) = 3 nên đặt $y=3t(t\in \mathbb{Z})$

Ta có $3x-7y=24 \Leftrightarrow 3x-21t=24 \Leftrightarrow x-7t=8 \Leftrightarrow x=8+7t$

Do đó phương trình (3) có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x=8+7t \\ y=3t \end{cases} (t\in \mathbb{Z})$

d) $20x-11y=-49 \Leftrightarrow 11y=20x+49 \Leftrightarrow y=\dfrac{20x+49}{11}$

Tách phần nguyên ta có: $y=x+4+\dfrac{9x+5}{11}$

Để $y\in \mathbb{Z}$ thì và $\dfrac{9x+5}{11}\in \mathbb{Z}$. Đặt $\dfrac{9x+5}{11}=t(t\in \mathbb{Z})$

Ta có $9x+5=11t \Leftrightarrow x=\dfrac{11t-5}{9}=t+\dfrac{2t-5}{9}$. Đặt $\dfrac{2t-5}{9}=u,(u\in \mathbb{Z})$

Ta có $2t-5=9u \Leftrightarrow t=\dfrac{9u+5}{2}=4u+2+\dfrac{u+1}{2}$. Đặt $\dfrac{u+1}{2}=v,(v\in \mathbb{Z})$

Ta có $u+1=2v \Leftrightarrow u=2v-1$

Ta thấy $v\in \mathbb{Z}; u\in \mathbb{Z}$ và [redacted]. Từ đó và $y\in \mathbb{Z}$.

Tính ngược từ dưới lên ta được $t=4(2v-1)+2+v=9v-2$.

$x=t+u=(9v-2)+(2v-1)=11v-3$

$y=x+4+t=(11v-3)+4+(9v-2)=20v-1$.

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x=11v-3 \\ y=20v-1 \end{cases} (v\in \mathbb{Z})$

Chú ý: Qua bốn thí dụ trên ta có thể rút ra phương pháp giải sau:

Bước 1. Tính ẩn có giá trị tuyệt đối của hệ số nhỏ hơn theo ẩn kia.

Bước 2. Ta tách phần nguyên, đặt phần phân số bằng ẩn số mới và đưa về phương trình mới có các hệ số nhỏ hơn hệ số của phương trình ban đầu. Tiếp tục cách giải như trên cho đến khi có một ẩn số có hệ số bằng 1 và được tính theo ẩn số kia có hệ số nguyên. (Việc tách phần nguyên cần linh hoạt sao cho giá trị tuyệt đối của hệ số của ẩn trong phần phân số nhỏ nhất)

Bước 3. Sau đó tính x, y theo ẩn số mới cuối cùng bằng cách tính ngược từ dưới lên.

(Nếu một trong hai hệ số và hệ số tự do có ƯSCLN = k > 1; $\begin{cases} x=11v-3 \\ y=20v-1 \end{cases} (v\in \mathbb{Z})$ thì ta có thể đặt một ẩn bằng ẩn mới $kt\ (t\in \mathbb{Z})$ - (xem ví dụ 1c) để rút ngắn các bước giải phương trình.)

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $7x+3y=65$.(1); b) $5x+4y=12$. (2); c) $3x-8y=13$. (3).

*** Tìm cách giải:** Trước hết ta tìm nghiệm nguyên tổng quát của các phương trình. Sau đó dựa vào biểu thức nghiệm, lý luận, giải tìm ra giá trị nguyên của ẩn số mới cuối cùng để x > 0 và y > 0.

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow 3y=65-7x$ hay $y=\dfrac{65-7x}{3}$

Tách phần nguyên $y=21-2x+\dfrac{2-x}{3}$. Đặt $\dfrac{2-x}{3}=t,(t\in\mathbb{Z})$

Ta có $x=2-3t$ và $y=21-2(2-3t)+t=17+7t$

Do đó phương trình (1) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=2-3t\\ y=17+7t\end{cases},(t\in\mathbb{Z})$

Để x>0 và y>0 ta phải có $\begin{cases}2-3t>0\\ 17+7t>0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{17}{7}<t<\dfrac{2}{3}$

Từ đó có t = 0; - 1; - 2 ta có các nghiệm nguyên dương của phương trình (1) là:

$\begin{cases}x=2\\ y=17\end{cases};\begin{cases}x=5\\ y=10\end{cases};\begin{cases}x=8\\ y=3\end{cases}$

b) Do ƯCLN(4; 12) = 4. Do đó ta đặt $x=4t,(t\in\mathbb{Z})$

Ta có $20t+4y=12\Leftrightarrow 5t+y=3\Leftrightarrow y=3-5t$

Do đó phương trình (3) có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases}x=4t\\ y=3-5t\end{cases},(t\in\mathbb{Z})$

Để x > 0 và y > 0 ta phải có $\begin{cases}4t>0\\ 3-5t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\dfrac{3}{5}$ không có giá trị nguyên nào của t thỏa mãn.

Vậy phương trình (2) không có nghiệm nguyên dương.

c) Ta có: $3x-8y=13\Leftrightarrow 3x=8y+13\Leftrightarrow x=\dfrac{8y+13}{3}$

Tách phần nguyên được $x=3y+4+\dfrac{1-y}{3}$. Đặt $\dfrac{1-y}{3}=t,(t\in\mathbb{Z})$

Ta có $y=1-3t$ và $x=3(1-3t)+4+t=7-8t$.

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases}x=7-8t\\ y=1-3t\end{cases},(t\in\mathbb{Z})$

Để x > 0 và y > 0 ta phải có: $\begin{cases}7-8t>0\\ 1-3t>0\end{cases}$

Với $7-8t>0\Leftrightarrow t<\dfrac{7}{8}$ và $1-3t>0\Leftrightarrow t<\dfrac{1}{3}$

Kết hợp được $t < \frac{1}{3}$ (*). Lần lượt cho t lấy các giá trị nguyên 0; - 1; - 2; - 3... thỏa mãn (*) ta tìm được các giá trị tương ứng của x và y là nghiệm của phương trình (3). Vậy phương trình (3) có vô số nghiệm nguyên dương.

2. Dạng phương trình bậc nhất nhiều ẩn $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$ ***(***$a_1; a_2; ...; a_n; c \in \mathbb{Z};\ \ a_1; a_2; ...; a_n$ ***không đồng thời bằng 0).***

Ta có định lý sau: Điều kiện cần và đủ để phương trình $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c(a_1; a_2; ...; a_n; c \in \mathbb{Z};$ $a_1; a_2; ...; a_n \neq 0)$ có nghiệm nguyên là ước số chung lớn nhất của a_1; a_2;...; a_n là ước của c. (Tức là $(a_1, a_2, ..., a_n) | c$).

Ví dụ 3. Giải phương trình trên tập số nguyên:

$9x + 13y + 5z = 6$. (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow x + 5(y+z) + 8(x+y) = 6$

Đặt $u = y + z;\ v = x + y$ khi đó $(1) \Leftrightarrow x + 5u + 8v = 6$

$\Leftrightarrow x = 6 - 5u - 8v;\ y = v - x = v - 6 + 5u + 8v = 5u + 9v - 6$

Và $z = u - y = u - 5u - 9v + 6 = 6 - 4u - 9v$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là $\begin{cases} x = 6 - 5u - 8v \\ y = -6 + 5u + 9v, (u \in \mathbb{Z}; v \in \mathbb{Z}) \\ z = 6 - 4u - 9v \end{cases}$

3. Dạng phương trình bậc cao một ẩn

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $2x^2 + x - 21 = 0$. (1); b) $x^3 - 5x = 2(x-3)$. (2);

c) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 8x = 12$. (3).

*** Tìm cách giải:** Ta chuyển vế đưa về dạng $A(x) = 0$ sau đó phân tích $A(x)$ thành nhân tử.

Giải

a) $2x^2 + x - 21 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 7x - 21 = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) + 7(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+7) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3,5 (loại) \\ x = 3 \end{array}\right.$

Nghiệm nguyên của (1) là x = 3

b) $x^3 - 5x = 2(x-3) \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) + x(x-1) - 6(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x-6\right)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ x-2=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Tập nghiệm nguyên của (2) là $S=\{-3;1;2\}$

c) $x^4+2x^3-x^2-8x=12$

$\Leftrightarrow x^4-4x^2+2x^3-8x+3x^2-12=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x^2+2x+3\right)=0$.

Do $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0, \forall x$ nên nghiệm nguyên của phương trình (3) là $x=\pm 2$.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}+\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+6}=\dfrac{7}{6}$ (1)

b) $(x+3)^3+(x+4)^3+(x+5)^3=(x+6)^3$. (2)

*** Tìm cách giải:** a) Ta thấy tử và mẫu các phân thức đều có x^2+4x giống nhau, ta đặt ẩn phụ để giải. Hơn nữa $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ và $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$ đều dương với mọi x nên ĐKXĐ là $x \in \mathbb{R}$.

b) Dùng khai triển $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Giải

Đặt $x^2+4x+5=y(\in \mathbb{Z})$ ta được phương trình

$\dfrac{y-1}{y}+\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow \dfrac{(y-1)(y+1)+y^2}{y(y+1)}=\dfrac{7}{6}$

$\Rightarrow 6\left(y^2-1+y^2\right)=7\left(y^2+y\right)$

$\Leftrightarrow 5y^2-7y-6=0 \Leftrightarrow (5y+3)(y-2)=0$

Ta tìm được $y=-\dfrac{3}{5}$ (loại) và $y=2 \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x^2+4x+5=2 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Nghiệm nguyên của phương trình là x = - 1 và x = - 3.

b) Ta có $(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$;

$(x+4)^3=x^3+12x^2+48x+64$

$(x+5)^3=x^3+15x^2+75x+125;\ (x+6)^3=x^3+18x^2+108x+216$

Do đó $(x+3)^3+(x+4)^3+(x+5)^3=(x+6)^3 \Leftrightarrow 2x^3+18x^2+42x=0$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2+9x+21)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ do } x^2+9x+21=\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x$$

Nghiệm nguyên của phương trình là x = 0.

4. Dạng phương trình bậc cao nhiều ẩn

Ví dụ 6. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5(x+y)=xy$;

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2(x+y+9)=3xy$.

** Tìm cách giải:* Các bài thuộc dạng này thường dùng phương pháp phân tích, tức là biến đổi một vế thành một tích, còn vế kia là một số. Viết số thành tích các thừa số và cho tương ứng với các thừa số của tích kia ta sẽ tìm được các giá trị nguyên của ẩn.

Giải

a) Ta có $5(x+y)=xy \Leftrightarrow xy-5x-5y+25=25$

$\Leftrightarrow x(y-5)-5(y-5)=25 \Leftrightarrow (x-5)(y-5)=25$

Vì $x;y>0 \Rightarrow x-5>-5$ và $y-5>-5$ nên $25=5.5=1.25=25.1$

Giải các cặp ta tìm được các nghiệm nguyên dương sau:

$$\begin{cases}x-5=5\\y-5=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\y=10\end{cases};\begin{cases}x-5=1\\y-5=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\y=30\end{cases};\begin{cases}x-5=25\\y-5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=30\\y=6\end{cases}$$

b) $2(x+y+9)=3xy \Leftrightarrow 3xy-2x-2y-18=0$

$\Leftrightarrow 9xy-6x-6y=54 \Leftrightarrow 9xy-6x-6y+4=54+4$

$\Leftrightarrow 3x(3y-2)-2(3y-2)=58 \Leftrightarrow (3x-2)(3y-2)=58$

Ta biết $58=1.58=58.1=2.29=29.2=(-1).(-58)=(-58).(-1)=(-2).(-29)=(-29).(-2)$

Do đó giải từng cặp ta có nghiệm nguyên của phương trình trên là: $(x;y)=(1;20);(20;1);(0;-9);(-9;0)$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $2(x+y+z)+9=3xyz$.(1)

b) $2(t+x+y+z)+7=3txyz$.(2)

** Tìm cách giải:* a) Ta có $2x+2y+2z+9=3xyz$. Đây là phương trình mà vai trò các ẩn như nhau, ta dùng phương pháp cực hạn. Ta giả sử $1 \le x \le y \le z$ và chia hai vế của phương trình vừa lập cho *xyz* rồi lập luận so sánh để tìm nghiệm.

b) Tương tự dùng phương pháp cực hạn.

Giải

a) Do vai trò của x, y, z như nhau nên không mất tổng quát ta giả sử $1 \le x \le y \le z$.

Chia hai vế của (1) cho số dương xyz ta có $\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{xy}+\frac{9}{xyz}=3$.

Do $1\le x\le y\le z$ nên $x^2\le xy\le xz\le yz\le xyz$

Do đó ta có: $3=\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{xy}+\frac{9}{xyz}\le\frac{15}{x^2}\Rightarrow x^2\le 5\Rightarrow x=1;2$

Với x = 1: Thay x = 1 vào (1) ta có:

$2y+2z+11=3yz\ (1a)\Leftrightarrow 3yz-2y-2z=11\Leftrightarrow 9yz-6y-6z=33$

$\Leftrightarrow 3y(3z-2)-2(3z-2)=37\Leftrightarrow (3y-2)(3z-2)=37=1.37$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3y-2=1\\3z-2=37\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\z=13\end{array}\right.$. Ta có nghiệm $(x,y,z)=(1;1;13)$

Với x = 2: Thay x = 2 vào (l) ta có:

$4+2y+2z+9=6yz\Leftrightarrow 6yz-2y-2z=13\Leftrightarrow 36yz-12y-12z=78$

$\Leftrightarrow 6y(6z-2)-2(6z-2)=82\Leftrightarrow (6y-2)(6z-2)=82=1.82=2.41$

$\left[\begin{array}{l}6y-2=1\\6z-2=82\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}6y-2=2\\6z-2=41\end{array}\right.$ đều không có giá trị nguyên dương

Vậy: Do vai trò của x, y, z như nhau nên phương trình có 3 nghiệm nguyên dương là $(x,y,z)=(1;1;13)$ và các hoán vị của nó là $(1;13;1)$; $(13;1;1)$.

Chú ý: Khi giải phương trình $2y+2z+11=3yz$ ta giải bằng phương pháp phân tích. Ta có thể tiếp tục giải bằng phương pháp cực hạn cũng được:

Do $1<y<z$ nên từ $2y+2z+11=3yz\Rightarrow 3=\frac{2}{z}+\frac{2}{y}+\frac{11}{yz}\le\frac{15}{y}\Rightarrow 3y\le 15$

$\Rightarrow y=1;2;3;4;5$. Lần lượt thay vào phương trình (2) ta nhận được khi y = 1 thì z = 13 còn với y = 2; 3; 4; 5 ta không tìm được số nguyên dương z.

b) $2(t+x+y+z)+7=3txyz$. (2)

Do vai trò của x, y, z, t như nhau nên không mất tổng quát ta giả sử $1\le t\le x\le y\le z$

Từ (2) $\Rightarrow 3=\frac{2}{xyz}+\frac{2}{xzt}+\frac{2}{xyt}+\frac{2}{yzt}+\frac{7}{xyzt}\le\frac{15}{t^3}$

$\Rightarrow t^3\le 5\Rightarrow t=1$.

Với t = 1 thì $2(x+y+z)+9=3xyz$. Đây chính là phương trình trong câu a). Ta tìm được nghiệm là $(x,y,z)=(1;1;13)$.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình (2) là

$(t,x,y,z)=(1;1;1;13);(1;1;13;1);(1;13;1;1);(13;1;1;1)$.

Ví dụ 8. a)Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 100 = y(6x - 13y)$

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$1! + 2! + 3! + ... + x! = y^2$

* *Tìm lời giải*: Ta dùng phương pháp loại trừ để giải các bài toán dạng này.

Câu a) biến đổi phương trình được $(x - 3y)^2 = 2^2.(25 - y^2)$.

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $(x - 3y)^2$ là số chính phương. Do đó $(25 - y^2) > 0$ và là số chính phương. Lý luận ấy dùng để loại trừ dần các giá trị của y và tìm x.

Câu b) ta biết $x! = 1.2.3........x$

Giải

a) $x^2 - 100 = y(6x - 13y) \Leftrightarrow x^2 - 6xy + 9y^2 = 100 - 4y^2$

$\Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 2^2.(25 - y^2) \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 5$ và $25 - y^2$ là số chính phương.

+ Với y = 0 thì $x = \pm 10$

+ Với y = ± 1 thì $25 - y^2 = 24$ không chính phương.

+ Với y = ±2 thì $25 - y^2 = 21$ không chính phương.

+ Với y = ±3 thì $25 - y^2 = 25 - 9 = 16$ là số chính phương.

Khi ấy $(x - 3y)^2 = 4.16 = 64 = 8^2$. Do đó x - 3y = 8 hoặc x - 3y = -8.

Với y = - 3 thì x = -17 hoặc x = -1

Với y = 3 thì x = 17 hoặc x = 1.

+ Tương tự với y = ± 4 ta có:

Với y = - 4 thì x = - 6 hoặc x = - 18

Với y = 4 thì x = 18 hoặc x = 6.

+ Tương tự với y = ± 5 ta có:

Với y = - 5 thì x = - 15; Với y = 5 thì x = 15.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình trên là:

$$(x, y) = (10; 0); (-10; 0); (-17; -3); (-1; -3); (17; 3); (1; 3); (-6; -4);$$
$$(-18; -4); (18; 4); (6; 4); (-15; -5); (15; 5)$$

b) Với $x \geq 5$ thì $x! \vdots 10$

nên $y^2 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + x! = 33 + 5! + ... + x!$ có tận cùng là 3, mà không có số chính phương nào có tận cùng là 3. Vậy x < 5.

Với x = 1 thì $1! = y^2 \Rightarrow y = 1$.

Với x = 2 thì $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2$ không có giá trị nguyên dương của y.

Với x = 3 thì $1!+2!+3!=y^2 \Rightarrow 9=y^2 \Rightarrow y=3$.

Với x = 4 thì $1!+2!+3!+4!=y^2 \Rightarrow 33=y^2$ cũng không có có giá trị nguyên dương của y thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x,y)=(1;1);(3;3)$.

Ví dụ 9. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3-5y^3-25z^3=0$.

**Tìm cách giải:* Ta sử dụng tính chất chia hết và phương pháp xuống thang để giải.

Giải

Giả sử $(x_0;y_0;z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình tức là

$x_0^3-5y_0^3-25z_0^3=0$ (2), khi đó $x_0 \vdots 5$. Đặt $x_0=5x_1$. Thay vào phương trình (2) ta được $125x_1^3-5y_0^3-25z_0^3=0$ hay là $25x_1^3-y_0^3-5z_0^3=0$ (3).

Chứng tỏ $y_0 \vdots 5$. Đặt $y_0=5y_1$. Thay vào (3) ta lại có $5x_1^3-25y_1^3-z_0^3=0$ (4)

Chứng tỏ $z_0 \vdots 5$. Đặt $z_0=5z_1$. Thay vào (4) ta lại có $x_1^3-5y_1^3-25z_1^3=0$ (5)

Như vậy $(x_1;y_1;z_1)=\left(\frac{x_0}{5};\frac{y_0}{5};\frac{z_0}{5}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình

Cứ tiếp tục mãi ta có $\left(\frac{x_0}{5^k};\frac{y_0}{5^k};\frac{z_0}{5^k}\right)\in\mathbb{Z},\forall k\in\mathbb{Z}$. Do đó $x_0=y_0=z_0=0$

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên duy nhất là $(0;0;0)$

Ví dụ 10. Tìm số $\overline{abc}$ với a ≠ 0 thỏa mãn $\overline{abc}+\overline{acb}=\overline{ccc}$.

** Tìm cách giải:* Ta sử dụng cấu tạo số và tính chất chia hết để giải.

Giải

$\overline{abc}+\overline{acb}=\overline{ccc} \Leftrightarrow 100a+10b+c+100a+10c+b=111c$

$\Leftrightarrow 200a+11b=100c \Leftrightarrow 100(c-2a)=11b \vdots 100$

Mà b là chữ số, $b\in\mathbb{N}; 0\le b\le 9$ nên b = 0. Khi đó c = 2a

Như vậy a = 1; 2; 3; 4 và c = 2; 4; 6; 8.

Ta có các số sau thỏa mãn 102; 204; 306; 408

C. Bài tập vận dụng

Dạng phương trình hậc nhất 2 ẩn: $ax+by=c$

1.1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $8x-y=15$;
b) $5x+12y=33$;
c) $14x-9y=21$;
d) $29x+15y=20$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a/ Hệ số của ẩn y là -1. Đáp số $\begin{cases}x=t\\y=8t-15\end{cases}, t\in\mathbb{Z}$

b/ Về giá trị tuyệt đối thì hệ số của x nhỏ hơn hệ số của y. Do đó ta tính x theo y. Sau đó tách phần nguyên.

Đáp số: $\begin{cases} x = 12u + 9 \\ y = 5u + 1 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}$

c/ Ta có: $(14;21) = 7$ nên $y \vdots 7$. Đặt $y = 7t$ ta có phương trình $2x - 9t = 3$. Tiếp tục làm như câu b) ta tìm được $\begin{cases} x = 9u - 3 \\ y = 14u - 7 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}$

d) Cách 1: Phương trình đã cho (viết tắt là PT):

$$29x + 15y = 20 \Leftrightarrow y = \frac{20 - 29x}{15} = \frac{15 - 30x + 5 + x}{15} = 1 - 2x + \frac{5 + x}{15}$$

Đặt $\frac{5 + x}{15} = u, (u \in \mathbb{Z})$ ta có $x = 15u - 5$

Nghiệm nguyên tổng quát của PT là $\begin{cases} x = 15u - 5 \\ y = 11 - 29u \end{cases}$

Cách 2: Ta có $(15; 20) = 5$ nên $x \vdots 5$

Đặt $x = 5t$ ta có phương trình $29t + 3y = 4$

Tiếp tục làm như b) ta tìm được $\begin{cases} x = 15u - 5 \\ y = 11 - 29u \end{cases}; u \in \mathbb{Z}$

1.2. Chứng minh rằng nếu ước chung lớn nhất của a và b không chia hết c (tức là $c \not\vdots (a,b)$) thì phương trình $ax + by = c(a; b \neq 0)$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử phương trình $ax + by = c\ (a; b \neq 0)$ có nghiệm nguyên là $(x_0; y_0)$ tức là $ax_0 + by_0 = c$. Gọi $(a;b) = d$ thì $a = dm; b = dn\ \ (m, n \in \mathbb{Z})$.

Ta có: $dmx_0 + dny_0 = c \Rightarrow mx_0 + ny_0 = \frac{c}{d}$

Do $c \not\vdots d$ nên $\frac{c}{d} \notin Z \Rightarrow mx_o + ny_o \notin Z$ điều này vô lý vì $m, n; x_0; y_0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.3. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $4x + 5y = 19$;

b) $3(x + y + 1) = 4(12 - y)$;

c) $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{5}{2}$;

d) $(5 - x)(5 + x) = y(2x + y)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a/ Nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 3 - 4t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}$. Nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (1; 3)$

b/ Biến đổi phương trình thành $3x + 7y = 45$. Do $(3; 45) = 3$ nên $y \vdots 3$

Phương trình có nghiệm nguyên tổng quát là $\begin{cases} x = 15 - 7t \\ y = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

Để x > 0 và y > 0 ta phải có $0 < t < \frac{15}{7}$ Vậy t = 1; 2. Phương trình có 2 nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (8; 3); (1; 6)$

c) Biến đổi phương trình thành $8x - 9y = 30$

Nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = 9t + 6 \\ y = 8t + 2 \end{cases}; t \in \mathbb{Z}$ và t = 0; 1; 2; 3; …

Phương trình có vô số nghiệm nguyên dương $(x; y) = (6; 2); (15; 10); (24; 18); ...$

d) Biến đổi phương trình thành $x^2 + 2xy + y^2 = 25 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 5^2$

hay $|x + y| = 5$.

Do x > 0 và y > 0 nên $x + y = 5$ và phương trình có 4 nghiệm $(x; y) = (1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 1)$.

Dạng phương trình bậc nhất nhiều ẩn $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$

1.4. Giải phương trình trên tập số nguyên: $-4x + 3y + 8z = 9$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $-4x + 3y + 8z = 9 \Leftrightarrow x + 8(y + z) - 5(x + y) = 9$

Đặt $u = y + z; v = x + y$

Nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x = 9 - 8u + 5v \\ y = -9 + 8u - 4v \\ z = 9 - 7u + 4v \end{cases} (u \in \mathbb{Z}; v \in \mathbb{Z})$

Dạng phương trình bậc cao 1 ẩn

1.5. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $3x^2 - 14x = 5$;

b) $x(2x^2 + 9x + 7) = 6$;

c) $x^4 + 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60 = 0$;

d) $(x^4 - 13x^2 + 36)(x^2 + 2x) = 65x^2 - 5x^4 - 180$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chuyển vế đưa về dạng $A(x) = 0$ sau đó phân tích $A(x)$ thành nhân tử bằng tách và thêm bớt các hạng tử.

a) $3x^2-14x=5\Leftrightarrow 3x^2+x-15x-5=0\Leftrightarrow (x-5)(3x+1)=0$

Nghiệm nguyên của phương trình là $x=5$

b) $x(2x^2+9x+7)=6\Leftrightarrow 2x^3+9x^2+7x-6=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(2x-1)=0$

Tập nghiệm là $S=\{-3;-2\}$

c) $x^4+2x^3-19x^2+8x+60=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+3)(x-5)=0$

Tập nghiệm $S=\{-3;-2;2;5\}$

d) $(x^4-13x^2+36)(x^2+2x)=65x^2-5x^4-180$

$\Leftrightarrow (x^4-13x^2+36)(x^2+2x+5)=0\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-9)(x^2+2x+5)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+3)(x-3)(x^2+2x+5)=0$

Do $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0,\forall x$ nên nghiệm nguyên của phương trình phương trình là $x=\pm 2;\ x=\pm 3$

1.6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{12}$

b) $\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)^2+1}+\dfrac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2+2}=\dfrac{1}{2}$

c) $(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3=(x+5)^3-(x+4)^3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) ĐKXĐ: $x\neq -1;\ x\neq -2;\ x\neq -3$

Phương trình biến đổi thành $\dfrac{1}{x^2+4x+3}-\dfrac{1}{x^2+4x+4}=\dfrac{1}{12}$

Đặt $x^2+4x+3=y$ phương trình trở thành $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{12}$ suy ra

$y^2+y-12=0\Leftrightarrow (y-3)(y+4)=0$

* $x^2+4x+3-3=0\Leftrightarrow x(x+4)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$

* $x^2+4x+3+4=0\Leftrightarrow (x+2)^2+3=0$ vô nghiệm vì vế trái $>0\ \forall x$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là 0 và – 4.

b) Các mẫu đều dương nên ĐKXĐ là $x\in \mathbb{R}$. Biến đổi phương trình thành

$\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}+\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+6}=\frac{1}{2}$.

Đặt $x^2+4x+5=y$ ta có $\frac{y-1}{y}+\frac{y}{y+1}=\frac{1}{2}$ suy ra $3y^2-y-2=0 \Leftrightarrow (y-1)(3y+2)=0$

Từ đây tìm được nghiệm của phương trình là $x=-2$

c) Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Ta có $(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3-(x+5)^3=0 \Leftrightarrow 3x^3+15x^2+15x=25$

Vế trái chia hết cho 3; vế phải không chia hết cho 3. Phương trình không có nghiệm nguyên.

Chú ý: Câu c) có thể đặt $x+3=y(\in \mathbb{Z})$ Phương trình trở thành

$(y-2)^3+(y-1)^3+y^3+(y+1)^3-(y+2)^3=0$ rút gọn thành $3y^3-12y^2+6y=16$

Dạng phương trình bậc cao nhiều ẩn

1.7. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6(x+y)=xy+33$;

b) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $3(x+y)=2xy$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $6(x+y)=xy+33 \Leftrightarrow (x-6)(y-6)=3$

Vì $3=1.3=3.1=(-1)(-3)=(-3)(-1)$

Giải các cặp ta tìm được các nghiệm nguyên sau: $(x;y)=(7;9);(9;7);(5;3);(3;5)$.

b) $3(x+y)=2xy \Leftrightarrow 4xy-6x-6y=0 \Leftrightarrow (2x-3)(2y-3)=9$

Ta biết $9=1.9=9.1=(-1)(-9)=(-9)(-1)=3.3=(-3)(-3)$

Giải từng cặp ta có nghiệm tự nhiên của phương trình trên là: $(x;y)=(2;6);(6;2);(3;3);(0;0)$

1.8. a) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng bằng tích;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $5(x+y+z+t)+4=6xyzt$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Gọi ba số nguyên dương là x; y; z. Theo đầu bài $x+y+z=xyz$. Do vai trò x, y, z như nhau nên giả sử $1 \le x \le y \le z$. Chia 2 vế của phương trình cho xyz ta có $1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy} \le \frac{3}{x^2}$ hay $x^2 \le 3 \Rightarrow x=1$

Thay x = 1 vào phương trình ta có $1+y+z=yz \Leftrightarrow yz-y-z=1 \Leftrightarrow (y-1)(z-1)=2=1.2$ Từ đó tìm được $y=2;\ z=3$

Nghiệm nguyên dương của phương trình là: $(x;y;z)=(1;2;3);(1;3;2);(2;3;1);(2;1;3);(3;2;1);(3;1;2)$

b) Giả sử $x \ge y \ge z \ge t \ge 1$, chia 2 vế của phương trình cho *xyzt* ta có

$$6=\frac{5}{xyz}+\frac{5}{xzt}+\frac{5}{xyt}+\frac{5}{yzt}+\frac{4}{xyzt}\le\frac{24}{t^3}\Rightarrow t^3\le 4\Rightarrow t=1$$

Thay t = 1 vào phương trình ta có $5(x+y+z)+9=6xyz$

Ta cũng có $6=\frac{5}{yz}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{xy}+\frac{9}{xyz}\le\frac{24}{z^2}\Rightarrow z^2\le 4\Rightarrow z=1;2$

+ Với z = 1 thì $5(x+y)+14=6xy\Leftrightarrow 6xy-5x-5v=14$

$$\Leftrightarrow 36xy-30x-30y+25=109\Leftrightarrow(6x-5)(6y-5)=109.1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x-5=109\\6x-5=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=19\\y=1\end{array}\right.$$

+ Với z = 2 giải tương tự, không có nghiệm nguyên dương.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x;y;z;t)=(19;1;1;1)$ và các hoán vị $(1;1;1;19);(1;1;19;1);(1;19;1;1)$

1.9. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2(y^2-3)-2y^2(x-1)+6x=7$;

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy-27y+x=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $PT\Leftrightarrow x^2(y^2-3)-2y^2x+2y^2+6x=7$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2-3)-2x(y^2-3)+2(y^2-3)=1\Leftrightarrow(y^2-3)(x^2-2x+2)=1$$

Do $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $y^2-3\in\mathbb{Z};x^2-2x+2\in\mathbb{Z}$ Vì thế

$$\begin{cases}y^2-3=1\\x^2-2x+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4\\(x-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-2\end{array}\right.\\x=1\end{cases}$$

Và $\begin{cases}y^2-3=-1\\x^2-2x+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=2\\(x-1)^2+2=0\end{cases}$ (không có nghiệm nguyên)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(1;-2);(1;2)$

b) $xy^2+2xy-27y+x=0\Leftrightarrow x(y^2+2y+1)=27y$

$$\Leftrightarrow x(y+1)^2=27y\Rightarrow x=\frac{27y}{(y+1)^2}$$

Ta biết hai số nguyên dương y và y + 1 nguyên tố cùng nhau nên $y\not\vdots(y+1)^2$ vì thế $27\vdots(y+1)^2\Rightarrow(y+1)^2=1$ hoặc $(y+1)^2=9$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $(x;y)=(6;2)$

1.10. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $x^2+5y^2+1=2y(2x-1)$;

b) $x^2+2y^2+2xy+2x-2y+5=0$;

c) $2x^2+2y^2+z^2-6x+9=2y(x+z)$;

d) $x^2+3y^2+4z^2+2xy-4yz-12y+36=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Chú ý nếu $A^2+B^2+C^2=0$ thì $A=0;B=0$ và $C=0$

a) Biến đổi PT thành $(x-2y)^2+(y+1)^2=0$. Nghiệm $(x;y)=(-2;-1)$

b) Biến đổi PT thành $(x+y+1)^2+(y-2)^2=0$. Nghiệm $(x;y)=(-3;2)$

c) Biến đổi PT thành $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-3)^2=0$. Nghiệm $(x;y;z)=(3;3;3)$

d) Biến đổi PT thành $(x+y)^2+(y-2z)^2+(y-6)^2=0$. Nghiệm $(x;y;z)=(-6;6;3)$

1.11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+x^2+x^3=(y-1)(y^2+y+1)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi về dạng $1+x+x^2+x^3=y^3$. Ta xét các trường hợp:

1) x = 0 thì y = 1

2) x = - 1 thì y = 0

3) x = 1 thì $y\notin \mathbb{Z}$

4) Với $x>0$ $(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3>1+x+x^2+x^3=y^3>x^3$

Vậy $(1+x)^3>y^3>x^3$ hay $1+x>y>x$ điều này không thể xảy ra đối với số nguyên dương

5) Với $x<-1$. Đặt $t=-1-x$ thì $t>0$ và $x=-1-t$. Thay vào phương trình ta có

$1+(-1-t)+(t^2+2t+1)-(t^3+3t^2+3t+1)=y^3$

Hay $-(t^3+2t^2+2t)=y^3\Rightarrow y<0$ hay $t^3+2t^2+2t=(-y)^3$

Đặt $-y=z$ ta có $t^3+2t^2+2t=z^3$ với $z>0$

Ta có $(t+1)^3=t^3+3t^2+3t+1>t^3+2t^2+2t=z^3>t^3$

Hay $(t+1)^3>z^3>t^3\Rightarrow t+1>z>t$ điều này vô lý

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm $(x;y)=(0;1);(-1;0)$

1.12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9)=y^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

* Với y = 0 thì $x=-1;-2;-8;-9$

* Với $y\neq 0$ ta có $\left(x^2+10x+9\right)\left(x^2+10x+16\right)=y^2$

Đặt $x^2+10x+9=z\in\mathbb{Z}$ do [redacted]. Ta có $z\left(z+7\right)=y^2$ hay $z^2+7z=y^2$

Nếu $z>9$ thì $z^2+6z+9<z^2+7z=y^2<z^2+8z+16$

Hay $\left(z+3\right)^2<z^2+7z=y^2<\left(z+4\right)^2$ vô lý. Vậy $z\leq 9$

$x^2+10x+9\leq 9\Leftrightarrow x\left(x+10\right)\leq 0\Leftrightarrow -10\leq x\leq 0$. Lần lượt thay các giá trị của x ta có nghiệm:

$\left(x;y\right)=\left(-1;0\right);\left(-2;0\right);\left(-8;0\right);\left(-9;0\right);\left(-5;-12\right);\left(-5;12\right);(-10;-12);(-10;12)$

1.13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3-2y^3-4z^3=0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta sử dụng tính chất chia hết và phương pháp xuống thang để giải.

Giả sử $\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ là nghiệm nguyên của phương trình tức là $x_0^3-2y_0^3-4z_0^3=0$ (2) khi đó $x\,\vdots\,2$. Đặt $x_0=2x_1$ ta lại có $4x_1^3-y_0^3-2z_0^3=0$; Đặt $y_0=2y_1$ ta lại có $2x_1^3-4y_1^3-z_0^3=0$; Đặt $z_0=2z_1$ ta lại có $x_1^3-2y_1^3-4z_1^3=0$; như vậy $\left(x_1;y_1;z_1\right)=\left(\frac{x_0}{2};\frac{y_0}{2};\frac{z_0}{2}\right)$ cũng là nghiệm của phương trình . Cứ tiếp tục mãi ta có $\left(\frac{x_0}{2^k};\frac{y_0}{2^k};\frac{z_0}{2^k}\right)\in\mathbb{Z},\forall k\in\mathbb{Z}$ do đó $x_0=y_0=z_0=0$

Vậy phương trình (1) có nghiệm nguyên duy nhất là $\left(0;0;0\right)$

1.14. Tìm số có hai chữ số mà số ấy là bội của tích hai chữ số đó.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số có hai chữ số đó là $\overline{xy}\left(x,y\in\mathbb{N};0<x,y\leq 9\right)$

Ta có $\overline{xy}=10x+y=kxy\left(k\in\mathbb{N}^*\right)\Rightarrow y=x\left(ky-10\right)\,\vdots\,x$ do đó $y=mx$

$\Rightarrow mx=x\left(kmx-10\right)\Rightarrow m=kmx-10\Rightarrow 10=m\left(kx-1\right)\Rightarrow m=1;2;5$

Với m = 1 thì $kx=11\Rightarrow x=y=1$

Với m = 2 thì $kx=6\Rightarrow x=1;2;3$ tương ứng với $y=2;4;6$

Với m = 5 thì $kx=3\Rightarrow x=1$ tương ứng có $y=5$

Số cần tìm là $\overline{xy}=11;12;24;36;15$

1.15. Tìm tất cả các hình chữ nhật với độ dài các cạnh là số nguyên dương có thể cắt thành 11 hình vuông bằng nhau sao cho mỗi cạnh hình vuông là một số nguyên dương không lớn hơn 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là x và y. Cạnh hình vuông cần cắt ra là z.

Ta có $x;y;z\in\mathbb{Z}^+$ $x\geq y;z\leq y$ và $z\leq 3$

Ta có $xy=11z^2$ (1) .Từ (1) $\Rightarrow$ x hoặc y chia hết cho 11. Vai trò của x và y trong phương trình như nhau nên ta giả sử $x\vdots 11$ tức là $x=11d$

$\Rightarrow 11dy=11z^2\Rightarrow dy=z^2$. Ta xét các trường hợp có thể của z:

Với z = 1 chỉ có thể $d=1;y=1\Rightarrow x=11$

Với z = 2 chỉ có thể $d=1;y=4\Rightarrow x=11$

$d=2;y=2\Rightarrow x=22$

$d=4;y=1\Rightarrow x=44$

Với z = 3 chỉ có thể $d=1;y=9\Rightarrow x=11$

$d=3;y=3\Rightarrow x=33$

$d=9;y=1\Rightarrow x=99$

Trong 7 nghiệm của phương trình vừa tìm chỉ có 3 nghiệm thỏa mãn bài toán đó là

$(x;y)=(11;1);(22;2);(33;3)$

1.16. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\dfrac{xy}{3z}+\dfrac{yz}{3x}+\dfrac{zx}{3y}=1$;

b) Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{11}{12}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vai trò x; y; z như nhau. Ta giả sử $x\geq y\geq z\geq 1$

Ta có: $\dfrac{xy}{3z}+\dfrac{yz}{3x}+\dfrac{zx}{3y}=1\Leftrightarrow \dfrac{xy}{3z}+\dfrac{z}{3}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=1$

Với $x,y>0$ thì $(x-y)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$

Do đó $1=\dfrac{xy}{3z}+\dfrac{z}{3}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)\geq\dfrac{z}{3}+\dfrac{2z}{3}=z\Rightarrow z=1\Rightarrow y=x=1$

Vậy $(x;y;z)=(1;1;1)$

b) Gọi ba số nguyên dương cần tìm là x; y; z. Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12}$

Vai trò x; y; z như nhau. Ta giả sử $x\geq y\geq z>1$. Ta có $\dfrac{3}{z}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12}\Rightarrow z\leq\dfrac{36}{11}\Rightarrow z=2;3$

Với z = 2 thay vào và lý luận tương tự ta tìm được $(y=3;x=12);(y=4;x=6)$

Với z = 3 ta tìm được $(y=3;x=4)$

Nghiệm thỏa mãn bài toán là $(x;y;z)=(12;3;2);(6;4;2);(4;3;3)$ cùng các hoán vị của chúng.

1.17. Chứng minh phương trình $2x^2 - 9y^2 = 11$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên là $(x_0; y_0)$ ta có

$2x_0^2 - 9y_0^2 = 11 \Rightarrow y_0$ lẻ tức là $y_0 = 2k+1 (k \in \mathbb{N}*)$.

Ta có $2x_0^{\ 2} - 9(2k+1)^2 = 11 \Rightarrow x^2 - 18k(k+1) = 10 \Rightarrow x_0$ chẵn tức là $x_0 = 2m (m \in \mathbb{N}^*)$. Tức là

$4m^2 - 18k(k+1) = 10 \Rightarrow 2m^2 - 9k(k+1) = 5$ vô lý vì $k(k+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên chẵn. Vế trái chẵn, vế phải lẻ

Do đó phương trình $2x^2 - 9y^2 = 11$ không có nghiệm nguyên.

1.18. Chứng minh phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2016}$ có môt số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

Vai trò x; y; z như nhau ta giả sử $0 < x \le y \le z$. Ta có $\frac{1}{x} < \frac{1}{2016} \Rightarrow x > 2016$

Ta có $\frac{1}{2016} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow 2016 < x \le 3.2016$

Vậy có hữu hạn số nguyên dương x. Ứng với mỗi giá trị của x ta có:

$\frac{1}{2016} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le \frac{2.2016x}{x - 2016} \le \frac{2.2016x}{1} \le 2.2016^2$

Vậy y hữu hạn $\Rightarrow$ z hữu hạn. Do đó phương trình có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

1.19. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$

(Đề thi tuyển sinh THPT khối chuyên Toán và chuyên Tin ĐHQG Hà Nội, năm 2006)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy \Leftrightarrow 8xy(xy - 1) + (x - y)^2 = 0$ (*)

Do $(x - y)^2 \ge 0$ nên nếu x, y là nghiệm nguyên của phương trình thì $xy(xy - 1) \le 0 \Rightarrow 0 \le xy \le 1$

Do x, y nguyên nên chỉ có hai khả năng:

- Nếu xy = 0 thì từ (*) ta có $x = y = 0$

- Nếu xy = 1 thì từ (*) ta có $x = y = \pm 1$.

Phương trình có 3 nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0;0);(1;1);(-1;-1)$

1.20. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số đó cho 2005 thì được dư là 23 còn khi chia số đó cho 2007 thì được dư 32.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên cần tìm là n. Ta có

$n = 2005x + 23 = 2007y + 32 = 2005y + 2y + 32\ (x; y \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 2y + 9 = 2005(x - y) = 2005k\ (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow y = \dfrac{2005k - 9}{2}$

n nhỏ nhất khi y nhỏ nhất, y nhỏ nhất là 998 khi k = 1.

Vậv số tự nhicn nhỏ nhất cần tìm là $n = 2007.998 + 32 = 2003018$

1.21. Một đoàn học sinh đi cắm trại bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 người thì thừa 1 người. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều tất cả các học sinh lên các ô tô còn lại. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi cắm trại và có bao nhiêu ô tô? Biết rằng mỗi ô tô chỉ chở không quá 30 người.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 Thừa Thiên - Huế, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số ô tô lúc đầu là x ($x \in \mathbb{N}$ và $x \ge 2$), số học sinh đi cắm trại sẽ là $22x + 1$.

Theo giả thiết nếu số xe là $x - 1$ thì số học sinh phân phối đều cho tất cả các xe.

Khi đó mỗi xe chở y học sinh ($y \in \mathbb{N}$ và $30 \ge y > 0$), ta có

$(x - 1)y = 22x + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{22x + 1}{x - 1} = 22 + \dfrac{23}{x - 1}$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x - 1$ phải là ước số của 23, 23 nguyên tố nên:

* $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ suy ra $y = 22 + 23 = 45$ (trái giả thiết)

* $x - 1 = 23 \Leftrightarrow x = 24$ suy ra $y = 22 + 1 = 23 < 30$.

Vậy ô tô là 24 và số học sinh là $22.24 + 1 = 529$.

1.22. Tìm cặp số tự nhiên (m; n) thỏa mãn hệ thức $m^2 + n^2 = m + n + 8$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $m, n \in \mathbb{N}$ nên $m^2 + n^2 = m + n + 8 \Leftrightarrow 4(m^2 + n^2) = 4(m + 11 + 8)$

$\Leftrightarrow (4m^2 - 4m + 1) + (4n^2 - 4n + 1) = 34 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 3^2 + 5^2$ (*)

Từ (*) $\Rightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2n - 1 = 3 \\ 2m - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 3 \end{cases}$

Có hai cặp số $(m; n)$ là $(2; 3)$ và $(3; 2)$

1.23. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $5x^2 + 8y^2 = 20412$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét: Với a, b là các số nguyên thỏa mãn $a^2 + b^2 \vdots 3$ thì $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$.

Ta có $5x^2 + 8y^2 = 20412 \Leftrightarrow (6x^2 + 9y^2) - (x^2 + y^2) = 28.9^3$

Suy ra $x^2 + y^2 \vdots 3 \Leftrightarrow x \vdots 3$ và $y \vdots 3$. Đặt $x = 3x_1; y = 3y_1\ (x_1; y_1 \in \mathbb{Z})$

Thay vào phương trình ta được $5x_1^2 + 8y_1^2 = 28.9^2$

Tương tự ta có $x_1 = 3x_2; y_1 = 3y_2\left(x_2; y_2 \in \mathbb{Z}\right)$ ta được $5x_2^2 + 8y_2^2 = 28.9$

Tương tự ta có $x_2 = 3x_3; y_2 = 3y_3\left(x_3; y_3 \in \mathbb{Z}\right)$ ta được $5x_3^2 + 8y_3^2 = 28$

Suy ra $y_3^2 \le \frac{28}{8} < 2^2$ nên $y_3^2 = 0$ hoặc $y_3^2 = 1$

* Với $y_3^2 = 0$ thì $x_3^2 = \frac{28}{5}$ (loại)

* Với $y_3^2 = 1$ thì $x_3^2 = 2^2 \Rightarrow x_2^2 = 9.2^2; y_2^2 = 9 \Rightarrow x_1^2 = 9^2.2^2; y_1^2 = 9^2 \Rightarrow x^2 = 9^3.2^2; y^2 = 9^3$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(54; 27); (54; -27); (-54; 27); (-54; -27)$

1.24. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2 + 5y^2 = 74$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ điều kiện đã cho $6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y$ chẵn và $x \neq 0; y \neq 0$

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ là một cặp số nguyên thỏa mãn điều kiện thì các cặp số $(x_0; -y_0); (-x_0; y_0); (-x_0; -y_0)$ cũng thỏa mãn điều kiện, do đó chỉ cần xét $x > 0, y > 0$. Từ điều kiện suy ra $5y^2 < 74 \Rightarrow y^2 < 15 \Rightarrow 0 < y < 4 \Rightarrow y = 2$ (vì y chẵn) $\Rightarrow x = 3$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện là $(3; 2); (3; -2); (-3; 2); (-3; -2)$.

1.25. Tìm các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x + y)^5 = 120y + 3$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh , năm học 2013 - 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $x; y \in \mathbb{N}^*$ nên ta có $(x + y)^5 = 120y + 3 < 120(x + y) \Rightarrow (x + y)^4 < 120 < 4^4 \Rightarrow x + y < 4$

Cũng do $x; y \in \mathbb{N}^*$ nên $2 \le x + y < 4$ mà $120y + 3$ là số lẻ $\Rightarrow x + y$ là số lẻ

Do đó $x + y = 3$. Vì vậy $3^5 = 120y + 3 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$

Nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y) = (1; 2)$

1.26. Tìm tất cả các số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $3^x - 2^y = 1$.

(Đề thi tuyên sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $3^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 2^y$ (1)

* Nếu x chẵn tức là $x = 2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$. Từ (1) ta có $\left(3^k + 1\right)\left(3^k - 1\right) = 2^y$

Do đó $\begin{cases}3^k+1=2^a\\3^k-1=2^b\end{cases}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}$ và $a>b$

Xét $2^a-2^b=(3^k+1)-(3^k-1)=2\Rightarrow 2^b(2^{a-b}-1)=2$ nên

$\begin{cases}2^{a-b}-1=1\\2^b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{a-b}=2\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

Do đó $\begin{cases}3^k+1=2^2\\3^k-1=2^1\end{cases}\Leftrightarrow 2.3^k=6\Leftrightarrow 3^k=3\Leftrightarrow k=1$ khi đó $x=2$

Từ (1) có $2^y=3^2-1=8=2^3\Rightarrow y=3$

* Nếu x lẻ tức là $x=2k+1(k\in\mathbb{N})$

Xét $3^{2k+1}-1=3(3^{2k}-1)+2=3(9^k-1)+2$ chia cho 8 dư 2

Vì $(9^k-1)\vdots(9-1)\Rightarrow 2^y$ chia cho 8 dư 2 $\Rightarrow 2^y=2\Rightarrow y=1$

Ta có $3^x-1=2^1\Rightarrow x=1$

Vậy tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ là $(2;3)$ và $(1;1)$

1.27. Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2y+xy-2x^2-3x+4=0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$4=x(2x+3-y-xy)\Rightarrow 4\vdots x\Rightarrow x\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ (*)

Từ phương trình $\Rightarrow xy(x+1)=2x^2+3x-4=(x+1)(2x+1)-5$

$\Rightarrow(x+1)(-xy+2x+1)=5\Rightarrow 5\vdots(x+1)\Rightarrow x\in\{-6;-2;0;4\}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow x\in\{-2;4\}$

Với x = -2 thì y = -1

Với x = 4 thì y = 2

Vậy có hai cặp $(x;y)$ thỏa mãn là $(-2;-1)$ và $(4;2)$

1.28. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

$3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0\Leftrightarrow 3x^2-6xy+xy-2y^2+x-2y=7$

$\Leftrightarrow 3x(x-2y)+y(x-2y)+(x-2y)=7\Leftrightarrow(x-2y)(3x+y+1)=7$

Ta có $7=7.1=1.7=(-7).(-1)=(-1).(-7)$

Do đó ta xét trường hợp sau: $x-2y=7$ (*) và $3x+y+1=1$ (**)

Từ $x-2y=7 \Leftrightarrow x=7+2y$ thay vào (**) ta có $3(7+2y)+y+1=1 \Leftrightarrow 21+7y=0 \Leftrightarrow y=-3$ thay $y=-3$ vào (*) ta có $x+6=7 \Leftrightarrow x=1$.

Tương tự với các trường hợp khác ta không tìm được x; y nguyên.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x;y)=(1;-3)$