ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

MÔN: TOÁN LỚP 8

Năm học: 2010-2011

Bài 1. (3 điểm)

Tìm x biết:

$a) x^2 - 4x + 4 = 25$

$b) \dfrac{x-17}{1990} + \dfrac{x-21}{1986} + \dfrac{x+1}{1004} = 4$

$c) 4^x - 12.2^x + 32 = 0$

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \dfrac{yz}{x^2 + 2yz} + \dfrac{xz}{y^2 + 2xz} + \dfrac{xy}{z^2 + 2xy}$

Bài 3. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

a) Tính tổng $\dfrac{HA'}{AA'} + \dfrac{HB'}{BB'} + \dfrac{HC'}{CC'}$
b) Gọi AI là phân giác của tam giác $ABC; IM, IN$ thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$
c) Chứng minh rằng: $\dfrac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Tính đúng $x = 7; x = -3$

b) Tính đúng $x = 2007$

c)

$$4^x - 12.2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow 2^x.2^x - 4.2^x - 8.2^x + 4.8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x.\left(2^x - 4\right) - 8.\left(2^x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2^x - 8\right)\left(2^x - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 8 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bài 2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 0 \Leftrightarrow xy + yz + xz = 0 \Rightarrow yz = -xy - xz$$

$$x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = x\left(x - y\right) - z\left(x - y\right) = \left(x - y\right)\left(x - z\right)$$

Tương tự: $y^2 + 2xz = \left(y - x\right)\left(y - z\right); z^2 + 2xy = \left(z - x\right)\left(z - y\right)$

Do đó: $A = \dfrac{yz}{(x - y)(x - z)} + \dfrac{xz}{(y - x)(y - z)} + \dfrac{xy}{(z - x)(z - y)}$

Tính đúng $A = 1$

Bài 3.

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm , $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \le a, b, c, d \le 9; a \ne 0$

Ta có: $\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} \left(k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 100\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$$

Do đó: $m^2 - k^2 = 1353$

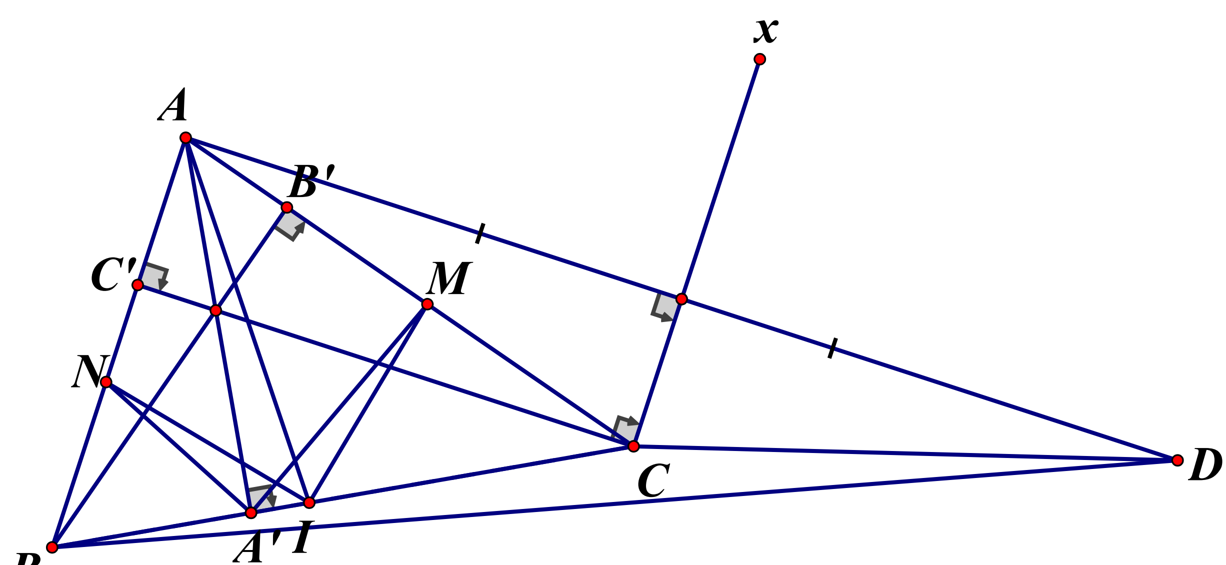
$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123.11 = 41.33 (k+m<200)$

$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=67 \\ k=56 \end{cases} \\ \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases} \end{array} \right.$

Kết luận đúng: $\overline{abcd} = 3136$

Bài 4.



a) $\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}HA'.BC}{\dfrac{1}{2}.AA'.BC} = \dfrac{HA'}{AA'}$

Tương tự: $\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{HC'}{CC'}; \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \dfrac{HB'}{BB'}$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$$\frac{BI}{IC}=\frac{AB}{AC};\frac{AN}{NB}=\frac{AI}{BI};\frac{CM}{MA}=\frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC}.\frac{AN}{NB}.\frac{CM}{MA}=\frac{AB}{AC}.\frac{AI}{BI}.\frac{IC}{AI}=\frac{AB}{AC}.\frac{IC}{BI}=1$$

$$\Rightarrow BI.AN.CM=BN.IC.AM$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

Chứng minh được góc BAD vuông, $CD=AC, AD=2.CC'$

Xét 3 điểm B,C,D ta có : $BD \le BC+CD$

ΔBAD vuông tại A nên : $AB^2+AD^2=BD^2$

$$\Rightarrow AB^2+AD^2 \le (BC+CD)^2$$

$$AB^2+4CC'^2 \le (BC+AC)^2$$

$$4CC'^2 \le (BC+AC)^2-AB^2$$

Tương tự:

$$4AA'^2 \le (AB+AC)^2-BC^2$$

$$4BB'^2 \le (AB+BC)^2-AC^2$$

Chứng minh được: $4\left(AA'^2+BB'^2+CC'^2\right) \le (AB+BC+AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB+BC+AC)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2} \ge 4$$

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow BC=AC, AC=AB, AB=BC \Leftrightarrow AB=AC=BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều