SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Người biên soạn: Nguyễn Thị Huế, Nguyễn Thị Phương Thảo
Đơn vị công tác: Trường THPT Chuyên Bắc Ninh

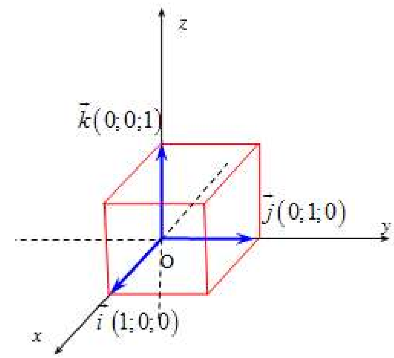
I. Hệ thống kiến thức liên quan.

Mở đầu về hình học giải tích trong không gian

1. Hệ tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian:
   Cho ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz hoặc đơn giản là hệ tọa độ Oxyz.

   Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ:



   a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

   b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in R$

   - $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
   - $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
   - $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
   - $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
   - $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = k\vec{b}\ \ (k \in R)$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\ \ (b_1,\ b_2,\ b_3 \neq 0)$$

   - $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
   - $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
   - $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
   - $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
   - $\cos(\vec{a},\ \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(với $\vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Tọa độ của điểm:

   a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

   Chú ý: • *M ∈ (Oxy) ⇔ z = 0; M ∈ (Oyz) ⇔ x = 0; M ∈ (Oxz) ⇔ y = 0*
   • *M ∈ Ox ⇔ y = z = 0; M ∈ Oy ⇔ x = z = 0; M ∈ Oz ⇔ x = y = 0*

   b) Tính chất: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

   - $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
   - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
   - Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số *k (k≠1)*: $M\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$

- Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

- Toaï ñoä troïng taâm G cuûa töù dieän ABCD:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ:

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a}=(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\, b_2,\, b_3)$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

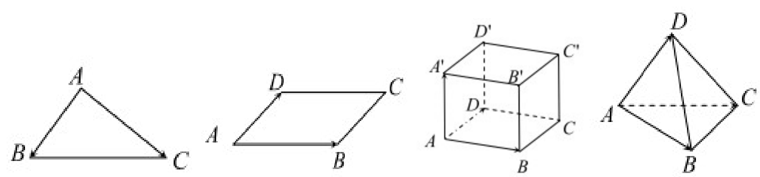
Chú ý: Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

b) Tính chất:

- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $[\vec{a},\, \vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a},\, \vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\vec{a},\, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a},\, \vec{b}]=\vec{0}$

c) Ứng dụng của tích có hướng:

- *Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:* $\vec{a},\, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\, \vec{b}].\vec{c}=0$
- *Diện tích hình bình hanh ABCD:* $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- *Diện tích tam giác ABC:* $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- *Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D':* $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- *Thể tích tứ diện ABCD:* $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$



Chú ý:

– Tích vô hướng của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai vecto vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– Tích có hướng của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, khối hộp; chứng minh các vecto đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vecto cùng phương.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\\ \vec{a}\ \textit{và}\ \vec{b}\ \textit{cùng phương}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}\\ \vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\ \textit{đồng phẳng}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0\end{array}}$$

5. Phương trình mặt cầu:

- Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;\, b;\, c)$, bán kính R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

- Phương trình $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$ bán kính $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Phương trình mặt phẳng

1. Vectơ pháp tuyến – Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

   • Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là VTPT của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).

   • Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp VTCP của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).

   Chú ý: • *Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của (α).*

   • *Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp VTCP của (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một VTPT của (α).*

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0}$$

   • Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT của (α).

   • Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

3. Các trường hợp riêng

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
D = 0	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc toạ độ O
A = 0	$By + Cz + D = 0$	(α) // Ox hoặc (α) ⊃ Ox
B = 0	$Ax + Cz + D = 0$	(α) // Oy hoặc (α) ⊃ Oy
C = 0	$Ax + By + D = 0$	(α) // Oz hoặc (α) ⊃ Oz
A = B = 0	$Cz + D = 0$	(α) // (Oxy) hoặc (α) ≡ (Oxy)
A = C = 0	$By + D = 0$	(α) // (Oxz) hoặc (α) ≡ (Oxz)
B = C = 0	$Ax + D = 0$	(α) // (Oyz) hoặc (α) ≡ (Oyz)

   Chú ý: • *Nếu trong phương trình của (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.*

   • *Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

   (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)

4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

   Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình: (α): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

   (β): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

   • *(α), (β) cắt nhau* $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

   • *(α) // (β)* $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ • *(α) ≡ (β)* $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

   • *(α) ⊥ (β)* $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

5. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng *(α): Ax + By + Cz + D = 0*

$$\boxed{d\left(M_0, (\alpha)\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Phương trình đường thẳng

1. Phương trình tham số của đường thẳng

 - Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$\boxed{(d):\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_o+a_3t \end{cases} \quad (t\in R)}$$

 - Nếu $a_1a_2a_3\neq 0$ thì $\boxed{(d):\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}}$ *đgl phương trình chính tắc của d.*

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

 Cho hai đường thẳng d, d' có phương trình tham số lần lượt là:

$$d:\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases} x=x_0'+t'a_1' \\ y=y_0'+t'a_2' \\ z=z_0'+t'a_3' \end{cases}$$

$$\bullet\ d\,//\,d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ \text{hệ}\begin{cases} x_0+ta_1=x_0'+t'a_1' \\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2' \\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3' \end{cases} (\text{ẩn } t,t') \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ M_0(x_0;y_0;z_0)\notin d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ \vec{a},\overrightarrow{M_0M_0'} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{a},\vec{a}'\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{a},\overrightarrow{M_0M_0'}\right]\neq\vec{0} \end{cases}$$

$$\bullet\ d\equiv d' \Leftrightarrow \text{hệ}\begin{cases} x_0+ta_1=x_0'+t'a_1' \\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2' \\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3' \end{cases} (\text{ẩn } t,t') \text{ có vô số nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ cùng phương} \\ M_0(x_0;y_0;z_0)\in d' \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M_0'} \text{ đôi một cùng phương}$$

$$\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{a}'\right]=\left[\vec{a},\overrightarrow{M_0M_0'}\right]=\vec{0}$$

$$\bullet\ d,\ d' \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \text{hệ}\begin{cases} x_0+ta_1=x_0'+t'a_1' \\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2' \\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3' \end{cases} (\text{ẩn } t,\ t') \text{ có đúng một nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ không cùng phương} \\ \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M_0'} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{a},\vec{a}'\right]\neq\vec{0} \\ \left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{M_0M_0'}=0 \end{cases}$$

$$\bullet\ d,\ d' \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ không cùng phương} \\ \text{hệ}\begin{cases} x_0+ta_1=x_0'+t'a_1' \\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2' \\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3' \end{cases} (\text{ẩn } t,t') \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M_0'} \text{ không đồng phẳng} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\neq 0$$

$$\bullet\ d\perp d' \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{a}' \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}'=0$$

3. Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

 Cho mặt phẳng (α): $Ax+By+Cz+D=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}$

Xét phương trình: $A(x_0+ta_1)+B(y_0+ta_2)+C(z_0+ta_3)+D=0$ (ẩn t) (*)

- *d // (α) $\Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm*
- *d cắt (α) $\Leftrightarrow$ (*) có đúng một nghiệm*
- *$d \subset (\alpha)$ $\Leftrightarrow$ (*) có vô số nghiệm*

4. Vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một mặt cầu

Cho đường thẳng *d*: $\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}$ (1) và mặt cầu *(S)*: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (2)

Để xét VTTĐ của *d* và *(S)* ta thay (1) vào (2), được một phương trình (*).

- *d và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d(I, d) > R*
- *d tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow$ (*) có đúng một nghiệm* $\Leftrightarrow$ *d(I, d) = R*
- *d cắt (S) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow$ *d(I, d) < R*

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng *(chương trình nâng cao)*

Cho đường thẳng *d* đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$ và điểm M.

$$\boxed{d(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}}$$

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *(chương trình nâng cao)*

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$

$$\boxed{d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1.

7. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α).

8. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

$$\cos\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)=\frac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$$

9. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α).

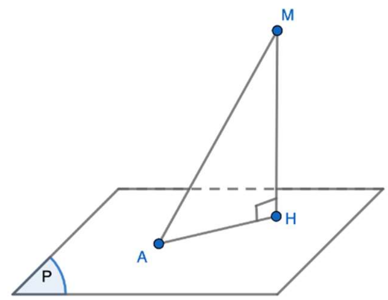
$$\boxed{\sin\left(\widehat{d,(\alpha)}\right)=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}}$$

II. Các dạng bài câu thường gặp

Để giải nhanh bài toán cực trị trong hình học tọa độ $Oxyz$, chúng ta cần tìm được vị trí đặc biệt của nghiệm hình để cực trị (số đo góc, khoảng cách, độ dài) xảy ra. Khi biết vị trí đặc biệt đó, việc tính toán chỉ còn vài dòng đơn giản là ra kết quả. Sau đây là các bài toán cực trị thường gặp, bản chất hình học của nó và công thức giải nhanh các bài toán đó.

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng

Bài toán 1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và cách điểm M (khác A) một khoảng lớn nhất.



Gợi ý: Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P). Suy ra khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) chính là MH. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ M một khoảng lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $MA \perp (P)$.

Suy ra vecto pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{AM}$.

Ví dụ 1: Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất?

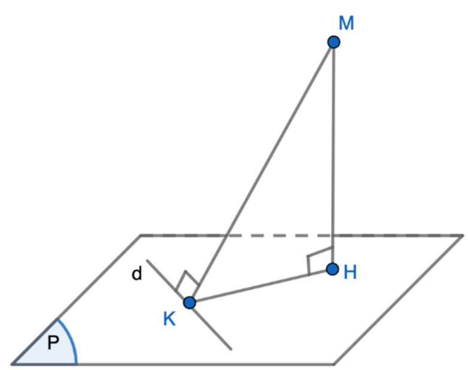
A. $(1;3;-1)$ **B.** $(0;2;1)$ **C.** $(1;2;-1)$ **D.** $(1;1;-1)$

Gợi ý: Chọn A

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{AM}(1;1;-3)$. Do đó phương trình mặt phẳng cần tìm là $1(x-1)+1(y-0)-3(z+2)=0 \Leftrightarrow x+y-3z-7=0$.

Bài toán 2: Viết phương trình mặt phẳng đi qua một đường thẳng d và cách một điểm $M \notin d$ một khoảng lớn nhất.

Gợi ý:



Gọi hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng cần tìm và d lần lượt là H, K. Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng là đoạn $MH \leq MK$. Vậy MH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng K hay mặt phẳng thỏa mãn điều kiện bài toán phải chứa d và vuông góc với mặt phẳng chứa M và d. Mặt phẳng cần tìm có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{u_d}\right]$. Trong đó $A \in d$ và $\overrightarrow{u_d}$ là vecto chỉ phương của d.

Ví dụ 2: Biết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất là $ax + by + cz + d = 0$. Giá trị của $a + b + c - d$ bằng

A. 0 **B.** 10 **C.** -1 **D.** 2

Gợi ý: Chọn A

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2;1;-1)$, $A(1;0;-2) \in d$. Suy ra $\overrightarrow{AM}(1;1;3)$. Vậy $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AM}\right],\overrightarrow{u_d}\right] = (6;6;18)$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $(x-1) + y + 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z + 5 = 0$.

Ví dụ 3: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;-2;1)$, song song với đường thẳng $d: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất.

A. $11x + 16y + 10z + 11 = 0$ **B.** $11x - 16y - 10z - 33 = 0$

C. $11x - 16y + 10z - 53 = 0$ **D.** $2x + 2y + z + 1 = 0$

Gợi ý: Chọn C.

$\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{OA}\right],\overrightarrow{u_d}\right]$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $11x - 16y + 10z - 53 = 0$.

Ví dụ 4: Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + z - 1 = 0$ và cách điểm $M\left(\dfrac{1}{2};0;2\right)$ một khoảng lớn nhất.

A. $(0;3;-1)$ **B.** $(1;1;1)$ **C.** $(1;2;1)$ **D.** $(-1;2;1)$

Gợi ý: Chọn A. Bản chất mặt phẳng cần tìm vẫn đi qua đường thẳng cố định qua O và vuông góc với (P). Nên mặt phẳng cần tìm có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(Q)}};\overrightarrow{OM}\right],\overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (-3;3;9)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x - y - 3z = 0$.

Ví dụ 5: Số giá trị của a để khoảng cách từ điểm $M(1;2;-2)$ đến mặt phẳng $(P): (1-a)x + (2-3a)y + az + 1 - a = 0$ lớn nhất.

A. 1 **B.** 2 **C.**3 **D.** 4

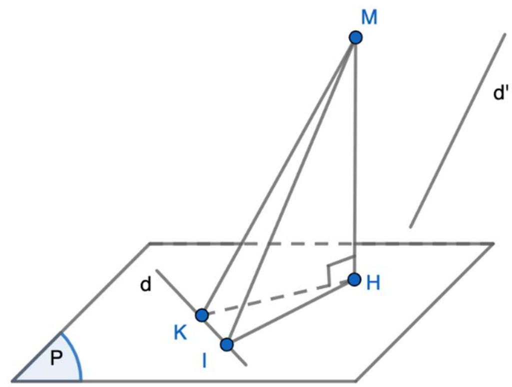
Gợi ý: Chọn A.

Ta có thể áp dụng công thức tính khoảng cách trực tiếp hoặc theo cách sau đây.

Mặt phẳng đã cho chứa đường thẳng cố định là $d: \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$ có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}(2;-1;-1)$ và đi qua điểm $A(-1;0;0)$. Suy ra khoảng cách từ M đến mặt phẳng đã cho lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AM}\right],\overrightarrow{u_d}\right]$. Từ đó tìm được $a = 2$.

Bài toán 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, tạo với đường thẳng d' (d' không song song với d) một góc lớn nhất.

Gợi ý:



Lấy K là điểm thuộc d, vẽ đường thẳng $Kt\,//\,d'$. Lấy điểm $M \in Kt$ ($M \neq K$) và gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d.

Khi đó $\sin(d';(P)) = \cos\widehat{KMH} = \dfrac{MH}{KM} \leq \dfrac{MI}{KM}$.

Vậy góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv I$, hay (P) là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vecto pháp tuyến, hay (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng chứa d và song song với d'. Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm là $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right];\overrightarrow{u_d}\right]$.

Ví dụ 6: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và tạo với đường thẳng $d': \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ một góc lớn nhất.

A. $x - 4y + z - 7 = 0$ **B.** $2x - y + z = 0$
C. $x - 4y - z - 3 = 0$ **D.** $2x + 2y + z = 0$

Gợi ý: Chọn A.

Ta có (P) đi qua $A(1;-1;2)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right];\overrightarrow{u_d}\right] = (-3;12;-3)$.

Suy ra phương trình (P) là: $(x-1) - 4(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 7 = 0$.

Ví dụ 7: Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x + y - z = 0$ và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

A. $2x - y + 3z = 0$ **B.** $x + y + 3z = 0$
C. $2x - 5y - z = 0$ **D.** $x - y + z = 0$

Gợi ý: Chọn C.

Bản chất bài toán vẫn không thay đổi, mặt phẳng cần tìm có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\vec{j}\right];\overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (-2;5;1)$ với $\vec{j}$ là vecto đơn vị của trục Oy).

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x - 5y - z = 0$.

Ví dụ 8: Biết phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ, song song với đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ và tạo với mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$ một góc nhỏ nhất là $ax + by + cz = 0$. Giá trị của $a + b + c$ là

A. 22 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 17

Gợi ý: Chọn A.

Bản chất bài toàn vẫn là tìm phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng a (qua O và song song với d) và tạo với đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) một góc lớn nhất.

Vậy vecto pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là: $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_{(P)}}\right];\overrightarrow{u_d}\right] = (12;27;-17)$.

Nên phương trình mặt phẳng cần tìm là $12x+27y-17z=0$.

Ví dụ 9: Cho mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1);B(2;1;3)$ và tạo với trục Ox một góc lớn nhất có một vecto pháp tuyến là $\vec{n}(a;1;c)$. Giá trị $a+c$ bằng

A. 13 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 14

Gợi ý: Chọn A.

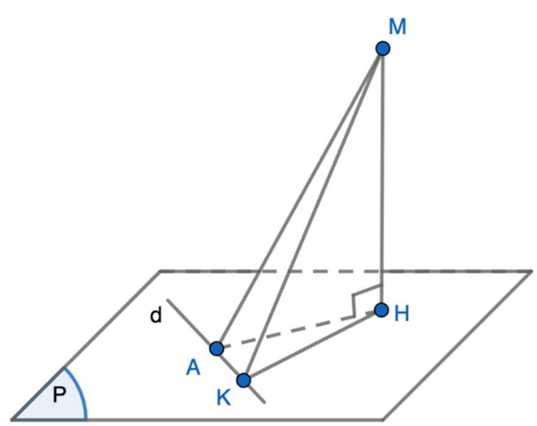
Mặt phẳng cần tìm đi qua hai điểm A,B cũng là mặt phẳng chứa đường thẳng AB cố định cho trước.

Vậy vecto pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{AB};\vec{i}\right];\overrightarrow{AB}\right] = (17;1;-4)$ với $\vec{i}$ là vecto đơn vị của trục Ox.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng

Bài toán 4: Viết phương trình đường thẳng d đi qua một điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước và cách một điểm M cho trước một khoảng nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)).

Gợi ý:



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d.

Dễ thấy $d(M;d) = MK \ge MH$. Khoảng cách này nhỏ nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$. Hay d là đường thẳng đi qua A và hình chiếu H của M trên (P).

Vecto chỉ phương của đường thẳng d cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{AM}\right];\overrightarrow{n_{(P)}}\right]$.

Ví dụ 10: Cho đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x-y+z=0$ và cách điểm $M(1;2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Biết $\overrightarrow{u_d}(a;b;5)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị $2a-b$ bằng

A. 21 **B.** 12 **C.** -5 **D.** -3

Gợi ý: Chọn C.

Ta có vecto chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{OM}\right]; \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (4;13;5)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{13} = \dfrac{z}{5}$.

Ví dụ 11: Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$, vuông góc với đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ và cách gốc tọa độ O một khoảng nhỏ nhất. Biết $\overrightarrow{u_d} = (1;b;c)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị của $b+c$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 2

Gợi ý: Chọn C.

Bản chất d vẫn là đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng cố định (qua A và vuông góc với Δ). Nên vecto chỉ phương vẫn là $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{OA}\right]; \overrightarrow{u_\Delta}\right] = (-3;3;0)$.

Ví dụ 12: Cho đường thẳng d đi qua O và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ và cách điểm $M(1;-1;2)$ một khoảng nhỏ nhất. Biết $\overrightarrow{u_d} = (1;b;c)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị của $b+c$ bằng

A. 0 **B.** $-\dfrac{9}{2}$ **C.** -1 **D.** 2

Gợi ý: Chọn D.

Bản chất d vẫn là đường thẳng đi qua O và nằm trong mặt phẳng cố định (qua O và song song với (P)). Nên vecto chỉ phương vẫn là: $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{OM}\right]; \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (4;-5;13)$.

Ví dụ 13: Cho cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn khoảng cách từ O đến đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + a + at \\ y = 2 + b + bt \\ z = 1 + 2a - b + (2a - b)t \end{cases}$ $(a \neq 0)$ là nhỏ nhất. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 0 **B.** 30 **C.** 19 **D.** 20

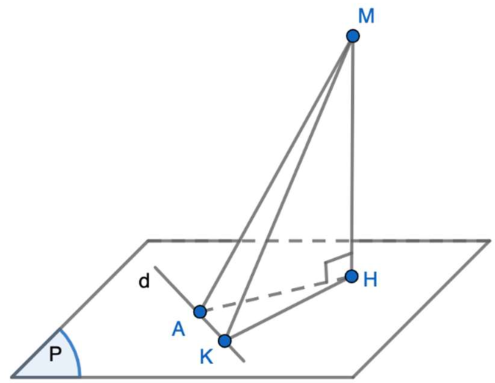
Gợi ý: Chọn B.

Đường thẳng d đã cho đi qua điểm cố định $A(1;2;1)$ và do $\overrightarrow{u_d}(a;b;2a-b)$ vuông góc với $\vec{n}(2;-1;-1)$ nên d nằm trong mặt phẳng (P) qua A và có vecto pháp tuyến $\vec{n}$.

Vậy vecto chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\vec{n}, \overrightarrow{OA}\right]; \vec{n}\right] = (-8;-11;-5)$. Suy ra $\dfrac{a}{8} = \dfrac{b}{11} = \dfrac{2a-b}{5}$. Vậy $a = 8; b = 11$.

Bài toán 5: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước, nằm trong mặt phẳng (P) và cách điểm M (M khác A, MA không vuông góc với (P)) một khoảng lớn nhất.

Gợi ý:



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d. Khi đó ta thấy $d(M;d) = MK \le MA$. Khoảng cách $d(M;d)$ lớn nhất khi và chỉ khi $K \equiv A$, hay d là đường thẳng nằm trong (P), đi qua A và vuông góc với AM. Đường thẳng d cần tìm có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{AM}\right]$.

Ví dụ 14: Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;-1)$ cho trước, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z = 0$ và cách điểm $M(0;2;1)$ một khoảng lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d?

A. $(0;-2;0)$ **B.** $(2;4;0)$ **C.** $(3;4;-2)$ **D.** $(4;1;-3)$

Lời giải: Chọn A.

Ta có vecto chỉ phương đường thẳng d cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{AM}\right] = (1;3;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Ví dụ 15: Cho đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất. Biết $\overrightarrow{u_d} = (a;b;1)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. 0 **B.** $-\dfrac{5}{4}$ **C.** -1 **D.** 2

Gợi ý: Chọn C.

Vecto chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{OM}\right] = (-1;6;-4)$.

Ví dụ 16: Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 1 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d?

A. $(3;3;1)$ **B.** $(2;4;0)$ **C.** $(3;4;-2)$ **D.** $(4;1;-3)$

Gợi ý: Chọn A.

Vecto chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{OA}\right] = (-2;-3;1)$.

Phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Ví dụ 17: Cho a thỏa mãn đường thẳng $d:\begin{cases} x=1-2a+at \\ y=-2+2a+\left(1-a\right)t \\ z=1+t \end{cases}$ (t là tham số) cách điểm $M\left(\frac{1}{2};1;4\right)$ một khoảng lớn nhất. Biết $a=\frac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{Z};n>0\right)$ là một phân số tối giản. Giá trị $2m-n$ bằng

A. 0 **B.** 11 **C.** -1 **D.** 5

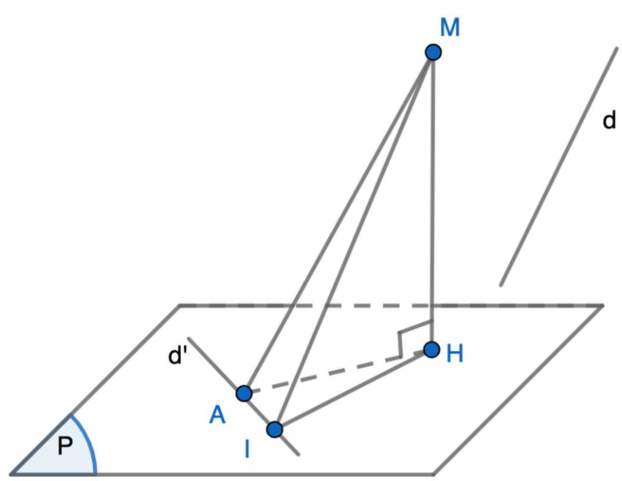
Gợi ý: Chọn D.

Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng d đã cho ta thấy d đi qua điểm cố định $A\left(1;0;3\right)$ (ứng với $t=2$) và vuông góc với đường thẳng có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(1;1;-1\right)$. Do đó khi khoảng cách từ M đến d lớn nhất thì vecto chỉ phương của nó là

$\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{AM}\right]=\left(2;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Vậy ta có $\frac{a}{2}=\frac{1-a}{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}\Rightarrow a=\frac{4}{3}$.

Bài toán 6: Cho mặt phẳng $\left(P\right)$ và điểm A thuộc $\left(P\right)$ và đường thẳng d (d cắt $\left(P\right)$ và d không vuông góc với $\left(P\right)$). Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A, nằm trong $\left(P\right)$ và tạo với d một góc nhỏ nhất.

Gợi ý:



Từ A vẽ đường thẳng $At//d$. Lấy $M\in At\left(M\neq A\right)$ và gọi H,I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên $\left(P\right)$ và d'. Ta có $\sin\left(d;d'\right)=\sin\widehat{MAI}=\frac{MI}{AM}\geq\frac{MH}{MA}$.

Vậy góc $\left(d;d'\right)$ bé nhất khi và chỉ khi $I\equiv H$ hoặc d' đi qua A và H, hay d' đi qua A và song song với hình chiếu vuông góc của d trên $\left(P\right)$. Vecto chỉ phương của đường thẳng d' cần tìm là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{u_d}\right]\right]$.

Ví dụ 18: Cho đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ O, nằm trong mặt phẳng $\left(P\right):2x+y-z=0$ và tạo với đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ một góc nhỏ nhất. Điểm nào sau đây thuộc d'?

A. $(10;-7;13)$ **B.** $(2;4;0)$ **C.** $(-5;4;-2)$ **D.** $(11;-2;8)$

Gợi ý: Chọn A.

Vecto chỉ phương của đường thẳng d' cần tìm là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{u_d}\right]\right]=(-10;7;-13)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x}{-10}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{-13}$.

Ví dụ 19: Cho đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ và tạo với mặt phẳng $(P):x-y+2z-1=0$ một góc lớn nhất. Biết $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;b;c)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị của $b+c$ bằng

A. 0 **B.** $\dfrac{3}{5}$ **C.** -1 **D.** 3

Gợi ý: Chọn B.

Bản chất vẫn là bài toán 6 với vecto chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}=\left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_{(P)}}\right];\overrightarrow{u_d}\right]=(5;-13;16)$.

Ví dụ 20: Cho đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, cắt đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và tạo với trục Oy một góc nhỏ nhất. Biết $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;1;c)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị của $a+c$ bằng

A. 0 **B.** $\dfrac{3}{5}$ **C.** -1 **D.** 3

Gợi ý: Chọn A.

Bản chất đường thẳng cần tìm đi qua O và nằm trong mặt phẳng $(O;d)$. Do đó vecto chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}=\left[\left[\overrightarrow{n_{(O;d)}};\vec{j}\right];\overrightarrow{n_{(O;d)}}\right]$ với $\vec{j}$ là vecto đơn vị của trục Oy.

Bài toán 7: Cho mặt phẳng (P) và điểm A thuộc (P), đường thẳng d cắt (P) tại điểm M khác A. Viết phương trình đường thẳng d' nằm trong (P), đi qua A và khoảng cách giữa d và d' lớn nhất.

Gợi ý: Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với d'. Khi đó $d(d;d')=d((Q);d')=d(A;(Q))$. Theo bài toán 2 , khoảng cách này lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{u_d};\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AB}\right]\right], B\in d$. Khi đó do $d'//(Q)$ và $d'\subset(P)$ nên $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_{(Q)}};\overrightarrow{n_{(P)}}\right]$.

Vecto chỉ phương của đường thẳng d' cần tìm là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{u_d};\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AB}\right]\right]\right]$, $B\in d$.

Ví dụ 21: Cho mặt phẳng $(P):2x+y+z-3=0,\ A(0;2;1)$ và đường thẳng $d':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Biết đường thẳng d đi qua điểm A, nằm trong (P) và khoảng cách giữa d và d' lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d?

A. $(1;5;-8)$ **B.** $(2;4;0)$ **C.** $(-5;4;-2)$ **D.** $(11;-2;8)$

Gợi ý: Chọn A.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d' và cách A một khoảng lớn nhất. Khi đó ta có $B(1;0;0) \in d'$,

$\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_{d'}};\left[\overrightarrow{u_{d'}};\overrightarrow{AB}\right]\right] = (-10;4;2)$, vecto chỉ phương của đường thẳng d cần tìm là

$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(Q)}};\overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (2;14;-18)$. Phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z-1}{-9}$.

Bài toán 8: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d song song với mặt phẳng (P). Viết phương trình đường thẳng d' song song với d và cách d một khoảng nhỏ nhất.

Gợi ý: Gọi A là điểm thuộc d, A' là hình chiếu của A trên (P). Khi đó đường thẳng d' cần tìm đi qua A' và song song với d.

Ví dụ 22: Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Cho đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), song song với mặt phẳng $(Q): x - 2y + z + 2 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng nhỏ nhất. Biết $\overrightarrow{u_d} = (a;1;c)$ là một vecto chỉ phương của d. Giá trị của $a + c$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 2

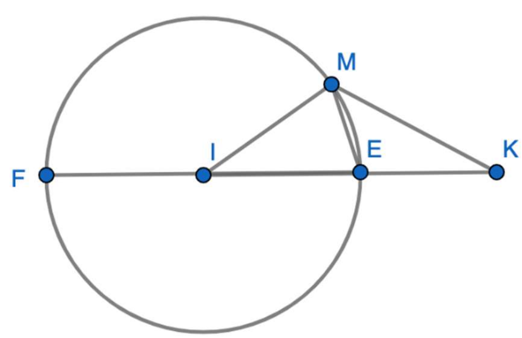
Gợi ý: Chọn D.

Đường thẳng d cần tìm đi qua hình chiếu O' của O trên mặt phẳng (P) và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (1;-1;-3)$.

Bài toán 9: Các bài toán đòi hỏi chúng ta cần có trực giác hình học để giải nhanh.

Ví dụ 23: Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' song song với d, cách d một khoảng bằng 3 và cách điểm $K(-3;4;3)$ một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất.

Gợi ý: Giả sử mặt phẳng (P) qua K và vuông góc với d cắt d tại I, cắt d' tại M. Khi đó ta có $IM = 3$, trong mặt phẳng (P): ta cần tìm M thuộc đường trong tâm I, bán kính $R = 3$ cách K một khoảng lớn nhất.



Gọi $I(1+2t;t;1+2t)$. Suy ra $\overrightarrow{KI} = (4+2t;t-4;1+2t)$. Mà $\overrightarrow{u_d} = (2;1;2)$.

Khi đó $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy $I(1;0;1)$ và $IK = 6 > 3$. Dễ thấy KM nhỏ nhất khi M trùng E, KM lớn nhất khi M trùng F.

Để tìm $E\left(x;y;z\right)$ ta dùng hệ thức $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$. Suy ra $E\left(-1;2;2\right)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' cách K một khoảng nhỏ nhất là $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}$.

Tương tự phương trình đường thẳng d' cách K một khoảng lớn nhất là $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

Ví dụ 24: Cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' song song với d, cách d một khoảng bằng $\sqrt{3}$ và cách đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{x-1}{1}$ một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất).

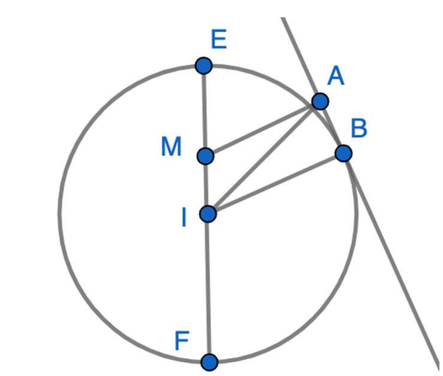
Lời giải: Đường thẳng d' cần tìm là một đường sinh của mặt trụ tròn xoay có trục là d, bán kính $R=\sqrt{3}$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa Δ và song song với d. Dễ dàng thấy ngay, d' là giao mặt trụ trên với mặt phẳng $\left(Q\right)$ chứa d và vuông góc với $\left(P\right)$ (trong trường hợp $\left(P\right)$ không cắt mặt trụ). Mặt phẳng $\left(P\right)$ có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=\left(3;3;3\right)$. Phương trình mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z-3=0$. Lấy $I\left(3;3;3\right)\in d$, hình chiếu của I trên $\left(P\right)$ là $H\left(1;1;1\right), IH=2\sqrt{3}$.

Gọi $M\left(x;y;z\right)$ là giao điểm của IH với mặt trụ (gần $\left(P\right)$) nhất. Ta có $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IH}\Rightarrow M\left(2;2;2\right)$.

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm đi qua M là $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$.

Ví dụ 25: Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=2+t\end{cases}$. Viết phương trình $\left(P\right)$ song song với d, cách d một khoảng bằng $2\sqrt{2}$ và cách $M\left(0;1;2\right)$ một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất).

Lời giải:



Gọi $\left(Q\right)$ là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d tại I. Giả sử đường thẳng qua M vuông góc với $\left(P\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại A.

Gọi B là hình chiếu của I trên $\left(P\right)$. Ta thấy các điểm I,M,B,A thuộc mặt phẳng $\left(Q\right)$ và $IB=d\left(d;\left(P\right)\right)=2\sqrt{2}$, $d\left(M;\left(P\right)\right)=MA$.

Ta tìm được $I\left(1;1;1\right)$ và $IM=\sqrt{2}<2\sqrt{2}$. Trong mặt phẳng $\left(Q\right)$ đường tròn tâm I, bán kính $R=2\sqrt{2}$ cắt đường IM tại E và F (M nằm giữa I,E).

Dễ thấy $MA+MI\geq IE=IB\Rightarrow MA\geq IB-MI$, MA nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\equiv B\equiv E$.

Để tìm E ta sử dụng hệ thức $\overrightarrow{IE}=2\overrightarrow{IM}$. Suy ra $E\left(-1;1;3\right)$.

Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm E và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{IM}\right]=\left(2;-2;2\right)$ nên có phương trình là $2\left(x+1\right)-2\left(y-1\right)+2\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow x-y+z-1=0$.

Trường hợp khoảng cách từ M đến $\left(P\right)$ lớn nhất xảy ra khi mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm F và có vecto pháp tuyến như trên.

Nhận xét: Nếu $IM>2\sqrt{2}$ thì khoảng cách từ M đến $\left(P\right)$ lớn nhất khi và chỉ khi $\left(P\right)$ đi qua M và khoảng cách lớn nhất khi $\left(P\right)$ đi qua điểm F.

Dạng 3. Tìm tọa độ điểm

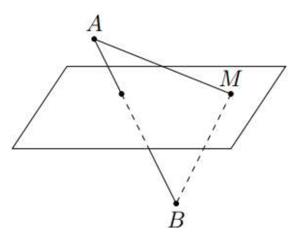
Bài toán 10. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A,B. (với $d(A,(P))\neq d(B,(P))$.)

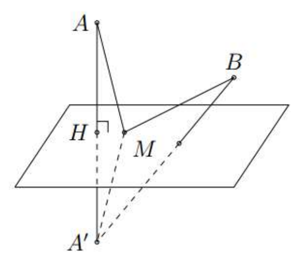
Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA-MB|$ lớn nhất

Phương pháp giải.

1. Ta xét các trường hợp sau





- TH 1: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó: $AM+BM\geq AB$

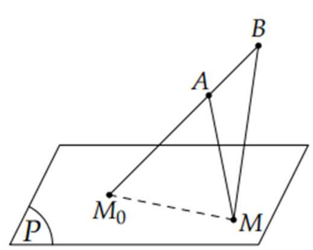
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

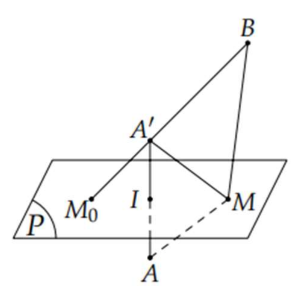
- TH 2: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P).

Khi đó: $AM+BM=A'M+BM\geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

2. Ta xét các trường hợp sau





- TH 1: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó: $|AM-BM|\leq AB$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- TH 2: Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua $\left(P\right)$.

Khi đó: $|AM - BM| = \left|A'M - BM\right| \le A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Ví dụ 26: Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x - y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A\left(4;-1;2\right), B\left(-2;11;-1\right)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $\left(P\right)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

<u>A.</u> $M\left(2;3;1\right)$. **B.** $M\left(1;2;1\right)$. **C.** $M\left(1;4;2\right)$. **D.** $M\left(3;4;1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét: $x_A - y_A + 2z_A - 1 = 8 > 0; x_B - y_B + 2z_B - 1 = -16 < 0$ nên A, B khác phía so với $\left(P\right)$. Theo bài toán 1 thì $MA + MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của AB và mp $\left(P\right)$.

Đường thẳng AB đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB} = \left(2;-4;1\right)$ làm vtcp nên có phương trình:

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Gọi điểm $M\left(4 + 2t; -1 - 4t; 2 + t\right) \in AB$. Vì $M \in \left(P\right)$ nên suy ra

$$4 + 2t - \left(-1 - 4t\right) + 2\left(2 + t\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Vậy $M\left(2;3;1\right)$.

Ví dụ 27: Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x + 2y - z - 5 = 0$ và hai điểm $A\left(4;8;-3\right), B\left(13;5;-18\right)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $\left(P\right)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

A. $M\left(3;1;0\right)$. **<u>B.</u>** $M\left(3;-1;-4\right)$. **C.** $M\left(1;2;0\right)$. **D.** $M\left(2;2;1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét: $x_A + 2y_A - z_A - 5 = 18 > 0; x_B + 2y_B - z_B - 5 = 30 > 0$ nên A, B cùng phía so với $\left(P\right)$. Theo bài toán 1 thì $MA + MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của $A'B$ và mp $\left(P\right)$ trong đó A' đối xứng với A qua mp$\left(P\right)$.

Ta có: AA' đi qua $A\left(4;8;-3\right)$ và có vtcp là $\overrightarrow{u_{A'A}} = \overrightarrow{n_{(P)}} = \left(1;2;-1\right)$ nên có phương trình

$$\text{là: } \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 8 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}.$$

Gọi $H\left(4 + t; 8 + 2t; -3 - t\right)$ là trung điểm của AA'. Vì $H \in \left(P\right)$ suy ra

$\left(4 + t\right) + 2\left(8 + 2t\right) - \left(-3 - t\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow H\left(1;2;0\right)$.

Suy ra điểm $A'\left(-2;-4;3\right)$.

Đường thẳng $A'B$ đi qua A' và nhận $\overrightarrow{A'B}=\left(15;9;-21\right)$ làm vtcp nên có phương trình:

$\begin{cases}x=-2+5t\\y=-4+3t\\z=3-7t\end{cases}$.

Gọi điểm $M\left(-2+5m;-4+3m;3-7m\right)\in A'B$. Vì $M\in\left(P\right)$ nên suy ra

$$-2+5m+2\left(-4+3m\right)-\left(3-7m\right)-5=0\Leftrightarrow m=1$$

Vậy $M\left(3;-1;-4\right)$.

Ví dụ 28: Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(3;2;1\right),B\left(-1;4;-3\right)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ sao cho $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất.

A. $M\left(5;-1;0\right)$ **B.** $M\left(5;1;0\right)$. **C.** $M\left(-5;-1;0\right)$. **D.** $M\left(-5;1;0\right)$

Lời giải

Chọn B.

Phương trình mặt phẳng $\left(Oxy\right):z=0$.

Xét $z_A.z_B<0$ nên A,B nằm khác phía so với $\left(Oxy\right)$.

Gọi A' đối xứng với A qua $\left(Oxy\right)$ suy ra $A'\left(3;2;-1\right)$.

Ta có: $\left|MA-MB\right|=\left|MA'-MB\right|\le A'B$.

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng $\left(Oxy\right)$.

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'\left(3;2;-1\right)$ và nhận $\overrightarrow{A'B}=\left(-4;2;-2\right)$ làm vtcp nên có phương trình:

$$\begin{cases}x=3-2t\\y=2+t\\z=-1-t\end{cases}.$$

Gọi điểm $M\left(3-2t;2+t;-1-t\right)\in A'B$. Vì $M\in\left(P\right)$ nên suy ra

$$-1-t=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow M\left(5;1;0\right).$$

Vậy $M\left(5;1;0\right)$.

Ví dụ 29: (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$. Cho biết $\left|MA-MB\right|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Tính tích số $x_0y_0z_0$.

A. 16. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $M=(a;b;c)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=34$

Mặt khác $\overrightarrow{MA}=(-8-a;1-b;1-c)$, $\overrightarrow{BC}=(4;3;-3)$

Suy ra $4(-8-a)+3(1-b)-3(1-c)=34 \Leftrightarrow -4a-3b+3c-66=0$.

Vậy $M \in (P)$ có phương trình $-4x-3y+3z-66=0$.

Ký hiệu $f(M)=f(x;y;z)=-4x-3y+3z-66$, với $M(x;y;z)$

Ta có :

$f(A).f(B)=(-4(-8)-3.1+3.1-66)((-4.2-3.1+3.3-66)=(-34).(-68)=2312>0$

Suy ra điểm $A(-8;1;1)$ và điểm $B(2;1;3)$ nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (P).

Khi đó $\left|MA-MB\right| \le AB$ ra $\left|MA-MB\right|$ đạt giá trị lớn nhất khi M,A,B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB với (P).

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(10;0;2)$ và qua điểm $B(2;1;3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=2+5t \\ y=1 \\ z=3+t \end{cases}$.

Suy ra $-4(2+5t)-3.1+3(3+t)-66=0 \Leftrightarrow -17t=68 \Leftrightarrow t=-4$.

Vậy $M(-18;1;-1)$ hay $x_0y_0z_0=18$.

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $\left(S\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ (không có điểm chung). Tìm điểm M trên mặt cầu $\left(S\right)$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(P\right)$ là nhỏ nhất (lớn nhất).

Phương pháp giải.

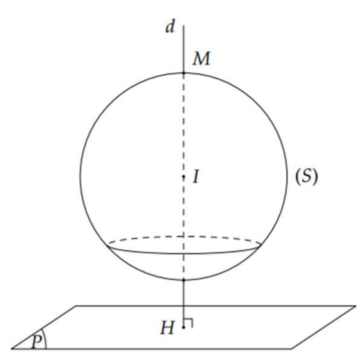
Giả sử mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm là I, bán kính R. Gọi H là hình chiếu của I trên $\left(P\right)$.

Với mọi điểm M trên mặt cầu $\left(S\right)$ thì $R+d\left(I,\left(P\right)\right) \le d\left(M;\left(P\right)\right) \le d\left(I,\left(P\right)\right)-R$

Như vậy:

+) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(P\right)$ là nhỏ nhất $d\left(I,\left(P\right)\right)-R$ là khi . . là giao điểm của đoạn thẳng IH với mặt cầu (S).

+) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất $d\left(I,(P)\right)+R$ là khi M là giao điểm của tia đối của tia IH với mặt cầu (S).



Chú ý: Để tìm các điểm này ta có thể làm như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với (P).
- Tìm giao điểm của d với mặt cầu (S) ta được 2 điểm M_1 và M_2.
- Tính và so sánh $d(M_1,(P)), d(M_2,(P))$ để xác định điểm M thỏa mãn đề.

Ví dụ 30. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $K=a+b+c$.

A. $K=1$. **B.** $K=2$. **C.** $K=-5$. **D.** $K=-2$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$.

Ta có: $d(I,(P))=\dfrac{|2.1-(-2)+2.(-1)-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4>R$. Suy ra mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung. Từ đó, điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách nhỏ nhất hoặc lớn nhất tới mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng qua I và vuông góc với (P).

Trước hết ta lập phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P).

+ Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.

+ Vì $d\perp(P)$ nên nhận $\vec{n}=(2;-1;2)$ làm véctơ chỉ phương.

+ Từ đó d có phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\end{cases}$ với $(t\in\mathbb{R})$.

Ta tìm giao điểm của d và (S). Xét hệ: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\\x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\\(1+2t)^2+(-2-t)^2+(-1+2t)^2-2(1+2t)+4(-2-t)+2(-1+2t)-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ 9t^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=1 \\ x=3 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$. Suy ra có hai giao điểm là $A(3;-3;1)$ và $B(-1;-1;-3)$.

Ta có: $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{\left|2.3-(-3)+2.1-14\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$;

$$d\left(B,(P)\right)=\dfrac{\left|2.(-1)-(-1)+2(-3)-14\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=7.$$

Suy ra $M\equiv B(-1;-1;-3)$. Từ đó $a=-1$; $b=-1$; $c=-3$.

Vậy $K=-5$.

Bài toán 12. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét véc tơ

$$\vec{w}=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$$

Trong đó $\alpha_1;\alpha_2...\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$.

1. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có đô dài nhỏ nhất.
2. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $|\vec{w}|$ có đô dài nhỏ nhất.
3. Tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho $|\vec{w}|$ có đô dài nhỏ nhất.

Phương pháp giải.

Gọi G là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ (điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\overrightarrow{MA_k}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_k}$ vói $k=1;2;\ldots;n$, nên

$\vec{w}=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}+\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$

Do đó: $|\vec{w}|=\left|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\right|\cdot|\overrightarrow{MG}|$

Vì $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

1. Với $M\in(P)$ thì điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).
2. Với $M\in d$ thì điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên đường phẳng d.
3. Với $M\in(P)$ thì điểm M cần tìm là giao điểm của đoạn thẳng GI và mặt cầu (S).

   (trong đó I là tâm mặt cầu, điểm G nằm ngoài mặt cầu).

Ví dụ 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;2)$, $B(2;1;-1)$, $C(0;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $2x-y-2z+2=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho độ dài véc tơ $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(\dfrac{34}{33};\dfrac{46}{33};\dfrac{1}{33}\right)$. **<u>B.</u>** $M\left(\dfrac{34}{33};\dfrac{46}{33};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{20}{33};\dfrac{34}{33};\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{20}{33};\dfrac{34}{33}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}=11\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+6\overrightarrow{IC}$

Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+6\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ từ đó ta có $I(\frac{8}{11};\frac{17}{11};\frac{7}{11})$

Khi đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}\right|=\left|11\overrightarrow{MI}\right|$ nên $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $\left|11\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất

Vì M thuộc (P) nên M là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (P)

Ta tìm được $M(\frac{34}{33};\frac{46}{33};\frac{1}{3})$.

Ví dụ 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1;0;1), B(-1;1;2)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+2b+4c$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ suy ra $I\left(-2;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Khi đó : $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|=\left|-2\overrightarrow{MI}\right|=2MI$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu của điểm I trên Δ.

Gọi điểm $M(2t;-1+t;1-t)\in\Delta$ là hình chiếu vuông góc của I trên Δ.

Ta có : $\overrightarrow{IM}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Với $t=-\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow a+2b+4c=2$.

Ví dụ 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;5;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=2$. Biết điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu (S) và thỏa mãn giá trị của $T=\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $P=x+y+z$ bằng:

A. $P=3$. **B.** $P=\frac{5}{2}$. **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=-3$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, khi đó $I\left(1;\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

$T=\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=6\left|\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

Do đó T nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là một trong hai giao điểm của đường thẳng qua IE và mặt cầu (S) với $E\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$ là tâm của (S).

$$(IE):\begin{cases}x=1\\ y=1+t\\ z=-\frac{1}{2}-t\end{cases}.\ M=IE\cap(\mathrm{S})\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M_1\left(1;2;-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow IM_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ M_2\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow IM_2=\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$$

Vậy $M_1\left(1;2;-\frac{3}{2}\right)$ là điểm cần tìm. $P=x+y+z=\frac{3}{2}$.

Bài toán 13. Trong không gian Oxyz, cho các diểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét biểu thức:

$$T=\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+\cdots+\alpha_n MA_n^2$$

Trong đó $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) (hoặc đường thẳng d hoặc mặt cầu (S)) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$.
2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$.

Phương pháp giải.

Gọi G là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\vec{GA_1}+\alpha_2\vec{GA_2}+\cdots+\alpha_n\vec{GA_n}=\vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA_k}=\vec{MG}+\vec{GA_k}$ với $k=1;2;\ldots;n$, nên

$$MA_k^2=\left(\overrightarrow{MG}+\vec{GA_k}\right)^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\vec{GA_k}+GA_k^2$$

Do đó

$$T=\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\right)MG^2+\alpha_1 GA_1^2+\alpha_2 GA_2^2+\cdots+\alpha_n GA_n^2$$

Vì $\alpha_1 GA_1^2+\alpha_2 GA_2^2+\cdots+\alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Nếu $M\in(P)$ thì MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Nếu $M\in d$ thì MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên đường phẳng d.

Nếu $M\in(S)$ thì MG nhỏ nhất khi điểm M là giao điểm của đoạn thẳng GI và mặt cầu (S).

(trong đó I là tâm mặt cầu, điểm G nằm ngoài mặt cầu).

Ví dụ 34. (Chuyên Thái Bình- Lần 5) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $\mathrm{A}(1;4;5);\ \mathrm{B}(3;4;0);\ \mathrm{C}(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\mathrm{P}):3\mathrm{x}-3\mathrm{y}-2\mathrm{z}-12=0$. Gọi $\mathrm{M}(\mathrm{a};\mathrm{b};\mathrm{c})$ thuộc (P) sao cho $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+3\mathrm{MC}^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}$

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\mathrm{I}(\mathrm{x};\mathrm{y};\mathrm{z})$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}+3\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\mathrm{x}-1+\mathrm{x}-3+3(\mathrm{x}-2)=0\\ \mathrm{y}-4+\mathrm{y}-4+3(\mathrm{y}+1)=0\\ \mathrm{z}-5+\mathrm{z}+3\mathrm{z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{x}=2\\ \mathrm{y}=1\\ \mathrm{z}=1\end{cases}\Rightarrow \mathrm{I}(2;1;1)$$

Ta có:

$$P = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$P = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 + 3MI^2 + 6\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} + 3IC^2$$

$$P = 5MI^2 + \underbrace{IA^2 + IB^2 + 3IC^2}_{\text{const}} + 2\overrightarrow{MI}.\underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}\right)}_{\vec{0}}$$

$\Rightarrow P_{min} \Leftrightarrow MI_{min}$

Khi đó M là hình chiếu của I trên (P)

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P)

$$\Rightarrow d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow M\left(3t+2; -3t+1; -2t+1\right)$$

$$M \in (P) \Rightarrow 3(3t+2) - 3(-3t+1) - 2(-2t+1) - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow a+b+c = 3$$

Ví dụ 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Tìm điểm M trên mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(1; \frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right)$ **B.** $M\left(1; \frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right)$ **C.** $M\left(-1; \frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right)$ **D.** $M\left(1; \frac{-8}{5}; \frac{1}{5}\right)$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = 1$.

Gọi J là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow J(1;4;-3)$

Ta có $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$= 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA})^2 + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})^2 + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})^2$

$= 6\overrightarrow{MJ}^2 + 2\overrightarrow{MJ}\left(3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}\right) + 3\overrightarrow{JA}^2 + 2\overrightarrow{JB}^2 + \overrightarrow{JC}^2$

$= 6MJ^2 + 3JA^2 + 2JB^2 + JC^2 = 6MJ^2 + 672$. Do đó $T_{min} \Leftrightarrow MJ_{min}$

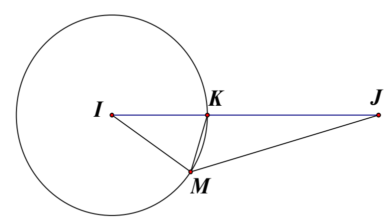
Có $IJ = 5 > 1 = R$ nên điểm J nằm ngoài mặt cầu.

Gọi K là giao điểm của đoạn IJ với mặt cầu.

Khi đó, $\forall M \in (S)$

luôn có $JM \ge IJ - IM = IJ - IK = JK$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.



Điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{IK} = \frac{IK}{IJ}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ} \Rightarrow K(1; \frac{8}{5}; \frac{1}{5})$.

Vậy $M(1; \frac{8}{5}; \frac{1}{5})$ là điểm cần tìm.

Bài toán 14. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm I bán kính R. Tìm điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ trên mặt cầu (S) sao cho biểu thức $A = ax_M + by_M + cz_M$ đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Phương pháp giải.

Ta có $A = ax_M + by_M + cz_M \Leftrightarrow ax_M + by_M + cz_M - A = 0$ suy ra $M \in (P): ax + by + cz - A = 0$, do đó điểm M là điểm chung của mặt cầu (S) với mặt phẳng (P).

Tồn tại điểm M khi và chỉ khi $d\left(I,(P)\right) \le R \Leftrightarrow m \le A \le M$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tiếp điểm của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) hay M là hình chiếu của I lên (P).

Ví dụ 36. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$. Tìm điểm M trên mặt cầu sao cho $A=2x_M-y_M+2z_M$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{17}{3}\right)$. **B.** $M\left(\frac{11}{3};\frac{2}{3};\frac{17}{3}\right)$. **C.** $M\left(\frac{17}{3};\frac{11}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $M\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A=2x_M-y_M+2z_M \Leftrightarrow 2x_M-y_M+2z_M-A=0$ suy ra $M\in(P):2x-y+2z-A=0$, do đó điểm M là điểm chung của mặt cầu (S) với mặt phẳng (P).

Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;3) và bán kính R = 4. Tồn tại điểm M khi và chỉ khi

$d_{(I;(P))} \le R \Leftrightarrow \frac{|6-A|}{3} \le 4 \Leftrightarrow -6 \le A \le 18.$

Do đó, với M thuộc mặt cầu (S) thì $A=2x_M-y_M+2z_M \le 18$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tiếp điểm của (P): $2x - y + 2z - 18 = 0$ với (S) hay M là hình chiếu của I lên (P).

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(2;-1;2)$ làm 1 vec tơ pháp tuyến; $\overrightarrow{IM}(x_M-1;y_M-2;z_M-3)$ suy ra $\overrightarrow{IM}$ cùng phương với $\vec{n} \Leftrightarrow \frac{x_M-1}{2}=\frac{y_M-2}{-1}=\frac{z_M-3}{2}$

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ $\begin{cases}\frac{x_M-1}{2}=\frac{y_M-2}{-1}=\frac{z_M-3}{2}\\ 2x_M-y_M+2z_M-18=0\end{cases} \Rightarrow M(\frac{11}{3};\frac{2}{3};\frac{17}{3})$

Vậy $M(\frac{11}{3};\frac{2}{3};\frac{17}{3})$ là điểm cần tìm.

Bài toán 15. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm I bán kính R và hai điểm A,B nằm ngoài (S). Tìm điểm $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ trên mặt cầu (S) sao cho $MA+kMB$ đạt giá trị nhỏ nhất. (với $k=\frac{IA}{R}$)

Phương pháp giải.

Ta tìm cách dựng điểm C sao cho $MA=kMC \Leftrightarrow \frac{MA}{MC}=k=\frac{IA}{R}=\frac{IA}{IM}$.

Ta lấy điểm C thuộc đoạn IA sao cho: $IC=\frac{R^2}{IA}$, khi đó $\frac{IC}{IM}=\frac{IM}{IA}$ suy ra hai tam giác IMC và IAM đồng dạng và khi đó: $\frac{MA}{MC}=\frac{IA}{IM} \Leftrightarrow MA=kMC.$

Ta có: $MA+kMB=k\left(MC+MB\right)\ge kBC$.

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn thẳng CB với mặt cầu (S).

Ví dụ 37. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(-1;2;0), B(2;5;0)$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ trên mặt cầu (S) sao cho $MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $a-b+c$ bằng

A. $4-\sqrt{3}$. **<u>B.</u>** $-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$, bán kính $R=2$; $IA=4 \Rightarrow \dfrac{IA}{R}=2$.

Ta lấy điểm C thuộc đoạn IA sao cho: $IC=\dfrac{R^2}{IA}=1$, khi đó $\dfrac{IC}{IM}=\dfrac{IM}{IA}$ suy ra hai tam giác IMC và IAM đồng dạng và khi đó: $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{IA}{IM} \Leftrightarrow MA=kMC.$

Ta tìm được điểm $C(2;2;0)$.

Khi đó: $MA+2MB=2(MC+MB)\geq 2BC=6$.

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn thẳng CB với mặt cầu (S).

Phương trình của $CB:\begin{cases} x=2 \\ y=5+3t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(2;5+3t;0)$.

Mà $M\in(S) \Rightarrow 1+9(t+1)^2=4 \Leftrightarrow t=-1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $M\left(2;2-\sqrt{3};0\right)$ hoặc $M\left(2;2+\sqrt{3};0\right)$.

Lại có M nằm giữa C và B nên $M\left(2;2+\sqrt{3};0\right)\Rightarrow a-b+c=-\sqrt{3}$.

Bài toán 16. Tìm điểm (đường thẳng, mặt phẳng) thỏa mãn điều kiện cực trị liên quan đến các yếu tố định lượng (chu vi, diện tích, thể tích, khoảng cách,…)

Phương pháp:

Với dạng toán này ta thường dùng phương pháp: sử dụng hàm số, bất đẳng thức,…

Phương pháp hàm số:

- Gọi một đại lượng biến thiên là x, tìm điều kiện của ẩn x.
- Tính đại lượng cần tính cực trị theo biến x, đặt là $f(x)$.
- Khảo sát hàm số $f(x)$ để tìm GTLN, GTNN.

Sử dụng bất đẳng thức:

- Gọi một (hoặc nhiều) đại lượng biến thiên là x (hoặc $(x,y,z...)$), tìm điều kiện của ẩn.
- Tính đại lượng cần tính cực trị theo ẩn.
- Sử dụng bất đẳng thức để đánh giá đại lượng đó tìm GTLN, GTNN.

Một số bất đẳng thức thường dùng:

Quan hệ góc và cạnh đối diện trong tam giác: Trong một tam giác cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn.

Quan hệ đường xiên và đường vuông góc: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Bất đẳng thức ba điểm (BĐT tam giác):

+) Với 3 điểm A,B,C bất kì, ta có: $|AB-BC|\leq AC\leq AB+BC$.

Tổng quát: Với n điểm $A_1,A_2,...,A_n$ bất kì thì $A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n\geq A_1A_n$.

+) Với hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bất kì ta luôn có: $\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

Tổng quát: Với n vecto $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ bất kì thì $\left|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+...+\overrightarrow{a_n}\right| \le \left|\overrightarrow{a_1}\right|+\left|\overrightarrow{a_2}\right|+...+\left|\overrightarrow{a_n}\right|$.

Bất đẳng thức Cauchy: Với x, y không âm ta có: $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Bất đẳng thức về tích vô hướng của hai vectơ: Với hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ bất kì ta luôn có: $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$.

Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $O=(0;0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $OM=1 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Đặt $x = OI \le OM \Rightarrow 0 < x \le 1$.

Khi đó $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OI.AB = OI\sqrt{R^2-OI^2} = x\sqrt{8-x^2} = f(x)$.

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\left(4-x^2\right)}{\sqrt{8-x^2}}\,(0<x\le 1)$, ta có bảng biến thiên

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{7}$

Vậy $\max S_{\Delta OAB} = \sqrt{7}$ khi $OI = 1$ hay $I \equiv M$.

Ví dụ 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;3)$, $B(0;3;3)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên đường thẳng Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a-b+c$.

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điểm M nằm trên đường thẳng Δ nên $M(t;t;t)$

Ta có:

$$MA+MB=\sqrt{(0-t)^2+(0-t)^2+(3-t)^2}+\sqrt{(0-t)^2+(3-t)^2+(3-t)^2}$$
$$=\sqrt{3}\left(\sqrt{t^2-2t+3}+\sqrt{t^2-4t+6}\right)$$

Đặt $f(t)=\sqrt{t^2-2t+3}+\sqrt{t^2-4t+6}$, $t\in\mathbb{R}$. (*)

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}}+\dfrac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2+2}}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}}=\dfrac{(2-t)}{\sqrt{(2-t)^2+2}}$

Đặt $g(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+2}}, u\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(u)=\dfrac{2}{\sqrt{(u^2+2)^3}}>0, \forall u$.

Do vậy $f'(t)=0 \Leftrightarrow g(t-1)=g(2-t) \Leftrightarrow t-1=2-t \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $3\sqrt{3}$ đạt được tại $t=\dfrac{3}{2}$ tức $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow a-b+c=\dfrac{3}{2}$.

Nhận xét:

+) Bên cạnh việc sử dụng phương pháp hàm số để đánh giá biểu thức $f(t)$ ta có thể sử dụng bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $ad=bc$.

Ta có: $f(t)=\sqrt{(t-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{(2-t)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\ge\sqrt{(t-1+2-t)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=3$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(t-1)\sqrt{2}=(2-t)\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$.

+) Câu hỏi này có thể diễn đạt bằng cách khác. Đó là: Tìm điểm M thuộc Δ sao cho chu vi tam giác MAB là nhỏ nhất.

Ví dụ 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P,Q,R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz sao cho $\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}+\dfrac{1}{OR^2}=\dfrac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác AOB là

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR).

Dễ thấy $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}$ suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{8}$ hay $OH=2\sqrt{2}$.

Khi đó suy ra mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $OM=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0}=1<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác OAB cân tại O nên $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OI.AB$.

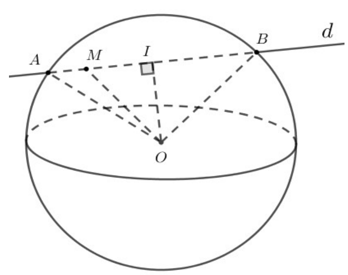
Đặt $OI=x$, vì $OI\le OM$ nên $0<x\le 1$ và $AB=2\sqrt{8-x^2}$.

Ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}x.2\sqrt{8-x^2}=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}$.

Xét hàm số $f(x)=8x^2-x^4$ với $0<x\le 1$.

Có $f'(x)=16x-4x^3=4x(4-x^2)>0$ với mọi $x\in(0;1]$ $\Rightarrow$ $f(x)\le f(1)=7$.

Suy ra diện tích của tam giác OAB lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB.



Cách 2. $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OI.AB=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}=\sqrt{7x^2+x^2(1-x^2)}\le\sqrt{7}$ với $\forall x\in(0;1]$.

Ví dụ 41. (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$, $(Q): -x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 5. **B.** 29. **C.** 13. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có M thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;1)$. Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(-1;1;1)$. Khi đó đường thẳng d đi qua $N(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(1;-2;3)$ nên có phương trình tham số là $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=1+3t\end{cases}$

suy ra $M(1+t;1-2t;1+3t)$.

$$MA+MB=\sqrt{(t+4)^2+4t^2+9t^2}+\sqrt{(t-4)^2+4t^2+9t^2}$$
$$=\sqrt{14t^2+8t+16}+\sqrt{14t^2-8t+16}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t)=\sqrt{14t^2+8t+16}+\sqrt{14t^2-8t+16}=\sqrt{14}\left[\sqrt{t^2+\frac{4}{7}t+\frac{8}{7}}+\sqrt{t^2-\frac{4}{7}t+\frac{8}{7}}\right]$$

$$=\sqrt{14}\left[\sqrt{\left(t+\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}+\sqrt{\left(t-\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}\right].$$

Đặt $\vec{u}=\left(t+\frac{2}{7};\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\vec{v}=\left(\frac{2}{7}-t;\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Khi đó $f(t)=\sqrt{14}\left[\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\right]\ge\sqrt{14}\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$. Suy ra $f(t)\ge\sqrt{14}.\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{8\sqrt{7}}{49}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng hay

$$\frac{t+\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}-t}=\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}>0\Rightarrow t=0.$$

Do đó $M(1;1;1)$. Vậy $T=a^2+b^2+c^2=3$.

Ví dụ 42. (THPT Quốc gia 2018 – 101) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B,C,D thuộc (S) sao cho AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

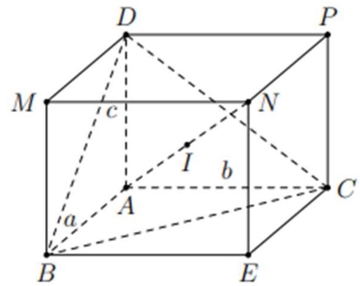
A. 72. **B.** 216. **C.** 108. **D.** 36.

Lời giải

Chọn D

Đặt $AB=a, AC=b, AD=c$.

AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau nên ta có thể coi tứ diện vuông $ABCD$ là một phần của hình hộp chữ nhật $ABEC.DMNP$ nội tiếp mặt cầu (S) (hình vẽ).



Ta có: $a^2+b^2+c^2=4R^2$.

Xét $V_{ABCD}=\frac{1}{6}abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $a^2;b^2;c^2$ ta được:

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow a^2b^2c^2\le\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3=\left(\frac{4R^2}{3}\right)^3$$

Suy ra $(6V_{ABCD})^2\le\left(\frac{4R^2}{3}\right)^3\Leftrightarrow V\le R^3.\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Với $R=IA=3\sqrt{3}$. Vậy thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ là 36 khi $a=b=c$.

Ví dụ 43. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với a,b,c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $\Rightarrow\frac{1}{d^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ với d là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC). Suy ra $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz : $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ với $a,b,c>0$; ta có

$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2}=3\Rightarrow d\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

III. Hệ thống câu hỏi ôn tập:

Câu 1: **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P):3x+3y+3z-10=0$. **B.** $(P):x+y+z-1=0$.

C. $(P):x+y+z-10=0$. **D.** $(P):x+y+z+10=0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $d\left(M,(P)\right) \le MA$

Nên $d\left(M,(P)\right)_{max} = MA$ khi A là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P).

Suy ra $AM \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

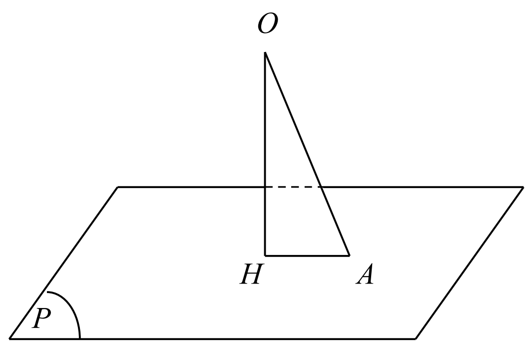
(P) đi qua $A(1;7;2)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình $-3(x-1)-3(y-7)-3(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+z-10=0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;\ 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất là:

A. $2x-y+z+6=0$. **B.** $2x-y+z-6=0$. **C.** $2x+y+z-6=0$. **D.** $2x+y-z-6=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P). Suy ra khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) chính là OH. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $OA \perp (P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{OA} = (2;\ -1;\ 1)$ làm một vectơ pháp tuyến: $2(x-2)-1(y+1)+1(z-1)=0$ hay $2x-y+z-6=0$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) sao cho góc giữa (P) và đường thẳng (d_2) là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

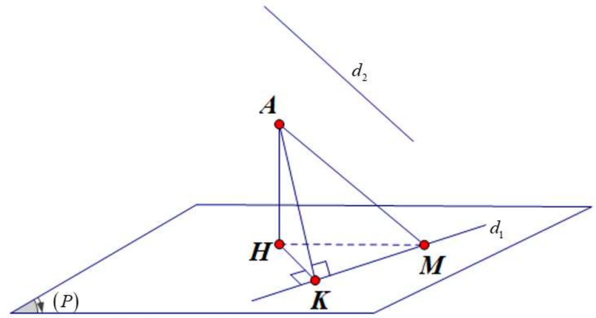
A. $T=0$. <u>**B.**</u> $T=3$. **C.** $T=-\dfrac{13}{4}$. **D.** $T=-6$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$.

Trước hết ta xét trường hợp d_1 và d_2 chéo nhau.



Gọi M là một điểm nào đó thuộc d_1, dựng đường thẳng qua M và song song với d_2. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng P, K là hình chiếu của A lên đường thẳng d_1.

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là $\widehat{AMH}$.

Ta có $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)=\sin\left(\widehat{HMA}\right)=\dfrac{AH}{AM}\le\dfrac{AK}{AM}$ (do $AH\le AK$). Góc $\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất khi $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất. Do $\dfrac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất $H\equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng (AKM), hay vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$ và $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.

Nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1},\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right]$.

Trường hợp d_1 và d_2 cắt nhau tại M, bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1},\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right]$.

Áp dụng vào bài 45 ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$; $\overrightarrow{u_2}=(2;-1;2)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(3;-4;-5)$ $\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1};\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\right]=(-14;2;-10)=-2(7;-1;5)$.

Mặt phẳng (P) chứa d_1 nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 7x-y+5z-9=0$. Suy ra $a+c+d=7+5-9=3$.

Câu 4: **(THPT HẢI HẬU A-2018)** Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;3)$ và tạo với trục Ox một góc lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(2;-7;1)$. **B.** $N(-2;7;1)$. **C.** $E(2;7;-1)$. **D.** $F(2;7;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Góc lớn nhất tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng là góc vuông suy ra mặt phẳng đang xét vuông góc với trục Ox.

Do đó VTPT của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0;4;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $4y+z-7=0$. Điểm thuộc mặt phẳng (P) là $E(2;7;-1)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Đường thẳng d qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;-2)$ và trục Oy có véc tơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$.

Gọi $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vì $d\subset(P)\Rightarrow \vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 1.A+(-1).B+(-2).C=0\Leftrightarrow A=B+2C \Rightarrow \vec{n}=(B+2C;B;C)$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{j}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{j}\right|}=\dfrac{|B|}{\sqrt{(B+2C)^2+B^2+C^2}}=\sqrt{\dfrac{B^2}{2B^2+4BC+5C^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2+4.\left(\dfrac{C}{B}\right)+5\left(\dfrac{C}{B}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{5\left(\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{6}{5}}}$ $(B\neq 0)$.

Vì hàm số $\sin\varphi$ tăng liên tục trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên φ đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\varphi$ lớn nhất

Lúc đó $5\left(\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{6}{5}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{6}{5}$ khi và chỉ khi $\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}=0$.

Chọn $B=5\Rightarrow C=-2;\ A=1\Rightarrow \vec{n}=(1;5;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;-2)$ là $1.(x-1)+5.(y+2)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x+5y-2z+9=0$.

Thế tọa độ $N(-1;-2;-1)$ vào phương trình mặt phẳng (P): $-1+5(-2)-2(-1)+9=0$ (luôn đúng).

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Cách 2:

Xét bài toán tổng quát: Cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

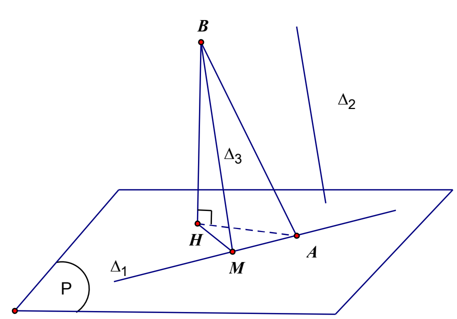
Phương pháp giải:

+) Vẽ một đường thẳng Δ_3 bất kỳ song song với Δ_2 và cắt Δ_1 tại M. Gọi B là điểm cố định trên Δ_3 và H là hình chiếu vuông góc của B lên mp (P), kẻ $BA\perp\Delta_1$

+) $\widehat{\left(\Delta_2,(P)\right)}=\widehat{BMH}$.

$\sin\widehat{BMH}=\dfrac{HB}{BM}\le\dfrac{BA}{BM}$ không đổi

Suy ra $\widehat{BMH}$ lớn nhất khi $H\equiv A$



Khi đó $\widehat{BMH} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ và (P) chứa Δ_1 và vuông góc với mặt phẳng (Δ_1, Δ_2).

Vậy (P) có VTPT là: $\left[\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right], \overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right]$

Áp dụng:

$\overrightarrow{u_d} = (1;-1;-2)$; $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}, \vec{j}\right], \overrightarrow{u_d}\right] = (1;5;-2)$. Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;5;-2)$ là $x + 5y - 2z + 9 = 0$

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 6: **(THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3;2;-1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $2x + y - 3z + 3 = 0$.

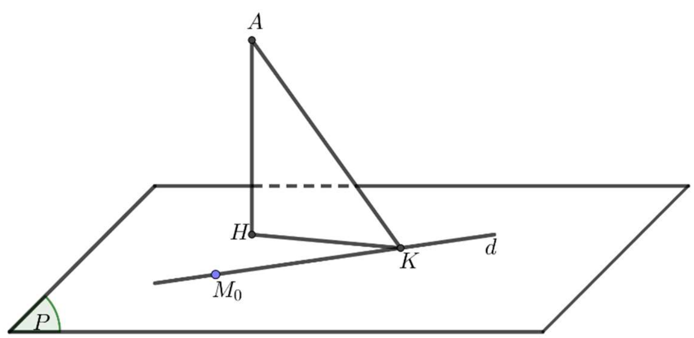
B. $x + 2y - z - 1 = 0$.

C. $3x + 2y - z + 1 = 0$.

D. $2x - y - 3z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn A.



+ d qua $M_0(0;0;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;1)$.

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d. Ta có:

$$d(A,(P)) = AH \le AK.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$.

Do đó $d(A,(P))_{\max} = AK$. Khi đó (P) đi $M_0(0;0;1)$ nhận $\overrightarrow{AK}$ làm vectơ pháp tuyến.

+ $K \in d$ nên $K(t,t,1+t)$ và $\overrightarrow{AK} = (t-3;t-2;t+2)$. Ta có:

$\overrightarrow{AK} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1.(t-3) + 1.(t-2) + 1.(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra: $\overrightarrow{AK} = (-2;-1;3)$.

Vậy $(P): -2(x-0) - 1.(y-0) + 3.(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z + 3 = 0$.

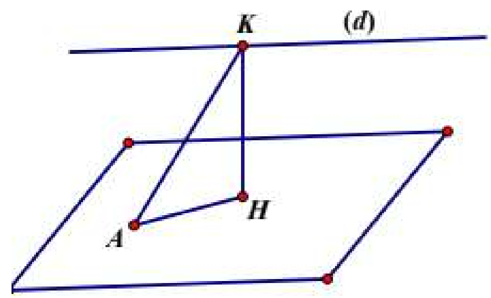
Câu 7: **(SỞ GD-ĐT THANH HÓA-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.

C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi $K(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d. Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}-x+1=y-1\\ y-1=-z+1\\ x-y+z-1=0\end{cases}\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow K(1;1;1).$$

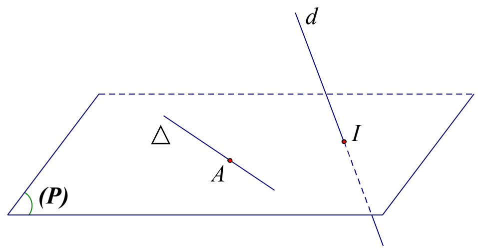
Ta có $d((d),(P))=d(K,(P))=KH\le KA=\sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overrightarrow{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overrightarrow{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng A'.

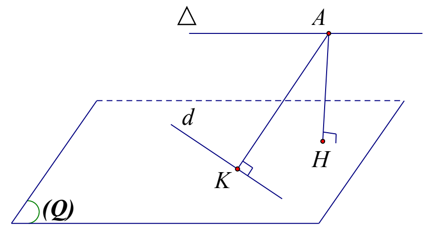
Câu 8: **(SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-4z=0$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;\,3;\,1)$ thuộc mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u}=(a;\,b;\,1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=-3$. **B.** $a+2b=0$. **C.** $a+2b=4$. **D.** $a+2b=7$.

Lời giải

Chọn A.





Đường thẳng d đi qua $M\left(1;\,-1;\,3\right)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(2;\,-1;\,1\right)$.

Nhận xét rằng, $A\notin d$ và $d\cap\left(P\right)=I\left(-7;\,3;\,-1\right)$.

Gọi $\left(Q\right)$ là mặt phẳng chứa d và song song với Δ. Khi đó $d\left(\Delta,d\right)=d\left(\Delta,\left(Q\right)\right)=d\left(A,\left(Q\right)\right)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên $\left(Q\right)$ và d. Ta có $AH\le AK$.

Do đó, $d\left(\Delta,d\right)$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $d\left(A,\left(Q\right)\right)$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH_{\max}$ $\Leftrightarrow H\equiv K$. Suy ra AH chính là đoạn vuông góc chung của d và Δ.

Mặt phẳng $\left(R\right)$ chứa A và d có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(R)}}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_1}\right]=\left(-2;\,4;\,8\right)$.

Mặt phẳng $\left(Q\right)$ chứa d và vuông góc với $\left(R\right)$ nên có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{n_{(R)}},\overrightarrow{u_1}\right]=\left(12;\,18;\,-6\right)$.

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng $\left(P\right)$ và song song với mặt phẳng $\left(Q\right)$ nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(R)}}\right]=\left(66;\,-42;\,6\right)=6\left(11;\,-7;\,1\right)$.

Suy ra, $a=11;\,b=-7$. Vậy $a+2b=-3$.

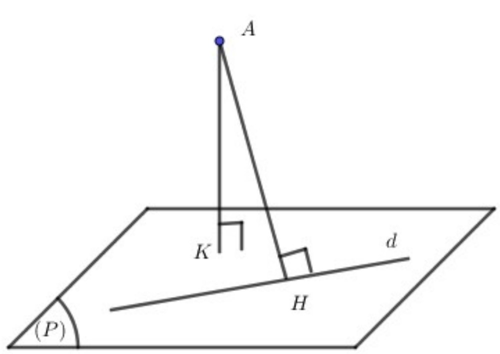
Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(2;1;1\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-t\end{cases}$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến $\left(P\right)$ lớn nhất có phương trình là

A. $x+2y+4z+7=0$. **B.** $4x-7y+z-2=0$.

C. $4x-5y+3z+2=0$. **D.** $x+y+3z+5=0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên $\left(P\right)$.

Ta có $d\left(A;(P)\right)=AK\le AH$ (không đổi)

$\Rightarrow d\left(A;(P)\right)$ lớn nhất khi $K\equiv H$.

Vì $H\in d$ nên $H\left(1+2t;t;-2-t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=\left(2t-1;t-1;-3-t\right)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(2;1;-1\right)$

Vì H là hình chiếu của A trên d nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow$ $2\left(2t-1\right)+1\left(t-1\right)+\left(3+t\right)=0\Leftrightarrow t=0$.

Vậy $H=\left(1;0;-2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(-1;-1;-3\right)$.

Mặt phẳng (P) qua H và vuông góc với AH nên (P) có phương trình $x+y+3z+5=0$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;2;3\right)$. Mặt phẳng $(P):x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tổng $A+B+C$ bằng

A. 6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $d\left(M;(P)\right)\le d\left(M;Oz\right)$.

Suy ra $d\left(M;(P)\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $d\left(M;Oz\right)=MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz.

Dễ có $H\left(0;0;3\right)$. Vậy (P) đi qua $H\left(0;0;3\right)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}\left(-1;-2;0\right)$.

$(P):-x-2y=0\Leftrightarrow x+2y=0\Rightarrow A=2;B=C=0\Rightarrow A+B+C=2$.

Câu 11: **(THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $(Oxyz)$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;\ 0;\ 2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất là

A. $(P):x+2y+3z+6=0$. **B.** $(P):x+2y+z-2=0$.

C. $(P):x-2y+z-6=0$. **D.** $(P):3x+2y+2z-4=0$.

Lời giải

Chọn B.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm $I\left(1;2;3\right)$, bán kính $R=3$.

$IA=\sqrt{6}<R$ nên A nằm trong mặt cầu.

Gọi r là bán kính đường tròn thiết diện, ta có $r=\sqrt{R^2-h^2}$.

Trong đó h là khoảng cách từ I đến (P).

Diện tích thiết diện là $\pi r^2=\pi\left(R^2-h^2\right)\ge\pi\left(R^2-IA^2\right)$ (Do $h\le IA$).

Vậy diện tích hình tròn (C) đạt nhỏ nhất khi $h=IA$. Khi đó $\overrightarrow{IA}$ là véc tơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là $1\left(x-0\right)+2\left(y-0\right)+\left(z-2\right)=0\Leftrightarrow x+2y+z-2=0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz+3=0$ đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

.

A. $T=-\frac{3}{4}$. **B.** $T=\frac{33}{5}$. **C.** $T=\frac{27}{4}$. **D.** $T=\frac{31}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Đường thẳng AB đi qua điểm B, có một VTCP là $\overrightarrow{BA}=(1;2;3)\Rightarrow$

$$AB:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=1+3t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

$\overrightarrow{IB}=(1;-1;1)\Rightarrow IB=\sqrt{3}<R\Rightarrow(P)$ luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C)

(C) có bán kính nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và AB, ta có:

$d(I,(P))=IH\le IK$

Do đó $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$ hay mặt phẳng (P) vuông góc với IK

Tìm $K:K\in AB\Rightarrow K(t;2t;1+3t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t+1;2t-1;3t+1)$

Ta có $IK\perp AB\Leftrightarrow\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{7}\Rightarrow\overrightarrow{IK}\left(\frac{6}{7};-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)=\frac{1}{7}(6;-9;4)$

Mặt phẳng (P) đi qua $B(0;0;1)$, có một VTPT là $\vec{n}=(6;-9;4)$

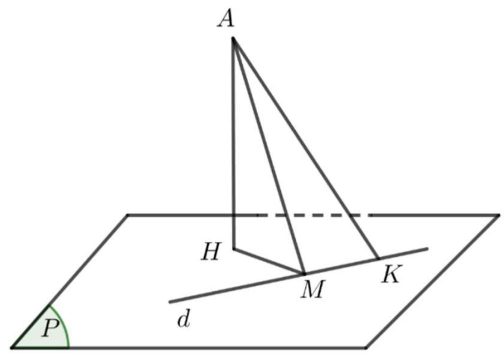
$\Rightarrow(P):6x-9y+4z-4=0\Leftrightarrow-\frac{9}{2}x+\frac{27}{4}y-3z+3=0$. Vậy $T=-\frac{3}{4}$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-;3;4)$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Ta có:

d đi qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(2;1;2)$.

(S) có tâm $I(3;2;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Ta có: $d(A;(P))\le d(A;d)$. Dấu "$=$" xảy ra khi (P) chứa d và vuông góc với AK.

Khi đó: (P) có VTPT là $\vec{n}_P=\left[\vec{n}_{(AKM)},\vec{u}_d\right]$.

Vì $\vec{n}_{(AKM)}=\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{AM}\right]=(-6;6;3)\Rightarrow \vec{n}_P=(9;18;-18)=9(1;2;-2)$.

$\Rightarrow(P):(x-1)+2(y+2)-2z=0\Rightarrow(P):x+2y-2z+3=0$.

Ta có: $d=d(I;(P))=4$.

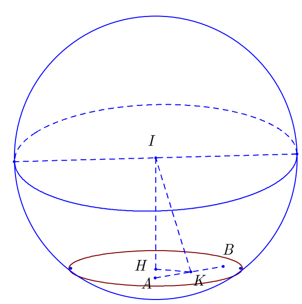
Vậy bán kính đường tròn cần tìm: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{20-16}=2$.

Câu 14: **(THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P):ax+by+cz+3=0$. Tính $T=a+b+c$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B.



Mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ bán kính là $R=4$.

Ta có A, B nằm trong mặt cầu. Gọi K là hình chiếu của I trên AB và H là hình chiếu của I lên thiết diện.

Ta có diện tích thiết diện bằng $S=\pi r^2=\pi\left(R^2-IH^2\right)$. Do đó diện tích thiết diện nhỏ nhất khi IH lớn nhất. Mà $IH\le IK$ suy ra (P) qua A,B và vuông góc với IK.

Ta có $IA=IB=\sqrt{5}$ suy ra K là trung điểm của AB. Vậy $K(0;1;2)$ và $\overrightarrow{KI}=(1;1;1)$.

Vậy $(P):(x-1)+y+(z-2)=0\Leftrightarrow -x-y-z+3=0$.

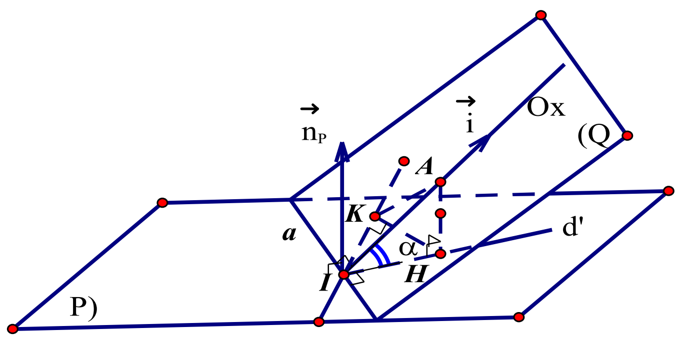
Vậy $T=-3$.

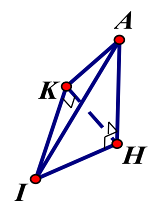
Câu 15: **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-y+2z=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

A. $y-2z=0$. **B.** $y-z=0$. **C.** $2y+z=0$. **D.** $x+z=0$.

Lời giải

Chọn A





Chứng minh góc giữa (P) và (Q) bé nhất là góc giữa Ox và (P).

Giả sử (Q) $\equiv$ (AKI). Ta có $\left((P),(Q)\right)=\widehat{AKI}$, $\left(Ox,(P)\right)=\widehat{AIH}$

Xét $\Delta AHI,\Delta AHK$ là tam giác vuông chung cạnh AH.

$\Delta IHK,\widehat{K}=90°\Rightarrow HK\le HI\Rightarrow \widehat{KAH}\le\widehat{IAH}\Leftrightarrow 90°-\widehat{AKH}\le 90°-\widehat{AIH}\Rightarrow \widehat{AKH}\ge\widehat{AIH}$

Ox có VTCP $\vec{i}\,(1;0;0)$

(P) có VTPT $\vec{n}_P=(1;-1;2)$

Góc giữa Ox và mặt phẳng (P) là α: $\sin\alpha=\dfrac{\left|\vec{i}.\vec{n}_P\right|}{\left|\vec{i}\right|.\left|\vec{n}_P\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Góc giữa (Q) và mặt phẳng (P) thoả: $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Phương trình mặt phẳng $(Q):By+Cz=0$

Ta có: $\dfrac{\left|-B+2C\right|}{\sqrt{B^2+C^2}.\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow\left|-B+2C\right|=\sqrt{5B^2+5C^2}$

$\Leftrightarrow 4B^2+4BC+C^2=0\Leftrightarrow C=-2B$

Chọn B = 1, C = -2.

Câu 16: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(0;3;-4)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{35}$.

Lời giải

Chọn A

Có góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (Oxy) là $\widehat{(d;(Oxy))}$

góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (Oxy) là $\widehat{((\alpha);(Oxy))}$.

Ta có $\widehat{(d;(Oxy))}\le\widehat{((\alpha);(Oxy))} \Rightarrow \widehat{((\alpha);(Oxy))}_{\min} \Leftrightarrow \widehat{(d;(Oxy))}=\widehat{((\alpha);(Oxy))}$

$\sin\widehat{(d,(\alpha))}=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow \cos\widehat{(d,(\alpha))}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

Gọi VTPT của (α) là $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2\ne 0$

Vì $d\subset(\alpha)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n}\Rightarrow 2a-b-c=0\Rightarrow c=2a-b$

$\cos\widehat{((Oxy),(\alpha))}=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2+(2a-b)^2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

$\Leftrightarrow 36\left(4a^2-4ab+b^2\right)=30\left(5a^2-4ab+2b^2\right)$

$\Leftrightarrow 6a^2+24ab+24b^2=0\Leftrightarrow 6(a+2b)^2=0\Leftrightarrow a=-2b$

Chọn $\vec{n}=(2;-1;5)$.

Vậy (α) đi qua $A(-1;1;2)\in d$ và có VTPT $\vec{n}=(2;-1;5)$ $\Rightarrow(\alpha):2x-y+5z-7=0$.

$d_{(M,(\alpha))}=\dfrac{30}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}$.

Câu 17: **(THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với d đồng thời cách B một khoảng lớn nhất.

A. $\vec{u}=(4;-3;2)$. **B.** $\vec{u}=(2;0;-4)$. **C.** $\vec{u}=(2;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;0;2)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-0;-4)$, $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên Δ, lúc đó $d(B,\Delta)=BH\le BA$.

Do đó $d(B,\Delta)$ lớn nhất khi $H\equiv A\Rightarrow\Delta\perp d$ và $\Delta\perp AB$.

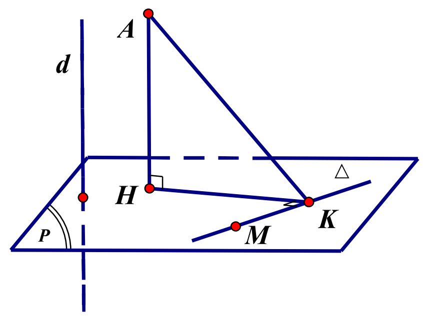
Ta có VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u_d}\right] = (8;-6;4)$. Do đó chọn $\vec{u} = (4;-3;2)$ là VTCP của Δ.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u} = (2;2;-1)$. **B.** $\vec{u} = (1;7;-1)$. **C.** $\vec{u} = (1;0;2)$. **D.** $\vec{u} = (3;4;-4)$.

Lời giải

Chọn C



Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P) \perp d$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$ nên có phương trình: $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ. Khi đó: $AK \geq AH = const$ nên $AK_{\min}$ khi và chỉ khi $K \equiv H$. Đường thẳng AH đi qua $A(1,2,-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$ nên AH có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

Vì $H \in AH \Rightarrow H(1+2t; 2+2t; -3-t)$.

Lại $H \in (P) \Rightarrow 2(1+2t) + 2(2+2t) - (-3-t) + 9 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Vậy $\vec{u} = \overrightarrow{HM} = (1;0;2)$.

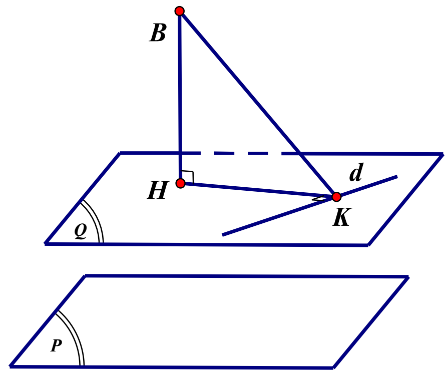
Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $d: \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{-11} = \dfrac{z-1}{2}$.

C. $d: \dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{2}$. **D.** $d: \dfrac{x+3}{-26} = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và $(Q) \,//\, (P)$. Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P). Ta lập được phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y-2z+1=0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d. Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B;d)=BK \geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH.

Đường thẳng d bây giờ đi qua A, H nên có phương trình $\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Câu 20: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) chứa d sao cho $d(A,(P))$ lớn nhất. Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $(1;1;1)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(1;-1;1)$. **D.** $(0;1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) và K là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Ta có: $d(A,(P)) = AH \leq AK$.

Suy ra: $d(A,(P))$ lớn nhất bằng AK khi và chỉ khi H trùng K.

Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\overrightarrow{AK}$.

Lấy $K(-1-2t;t;1+t)\in d$ và $\overrightarrow{AK}=(-2t-2;t-2;t-2)$.

Lại có: $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow (-2t-2)(-2)+1.(t-2)+1.(t-2)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AK}=(-2;-2;-2)$. Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $(1;1;1)$.

Câu 21: **(CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH-LẦN 3-2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=t\end{cases}$, $d':\begin{cases}x=2t'\\y=1+t'\\z=2+t'\end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt d, d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}$.

B. $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{-3}$.

D. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

$\Delta\cap d=A(1+t;2-t;t)$, $\Delta\cap d=B(2t';1+t';2+t')$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t'-t-1-t'-t+1+t'-t+2=0\\4t'-2t-2+t'+t-1+t'-t+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t'-3t=-2\\6t'-2t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\frac{1}{2}\\t=1\end{cases}.$$

Suy ra $A(2;1;1)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

AB ngắn nhất khi và chỉ khi AB là đoạn vuông góc chung của d, d'.

Vậy Δ đi qua $A(2;1;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}=(-2;1;3)$

$\Rightarrow\Delta:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$.

Câu 22: **(THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

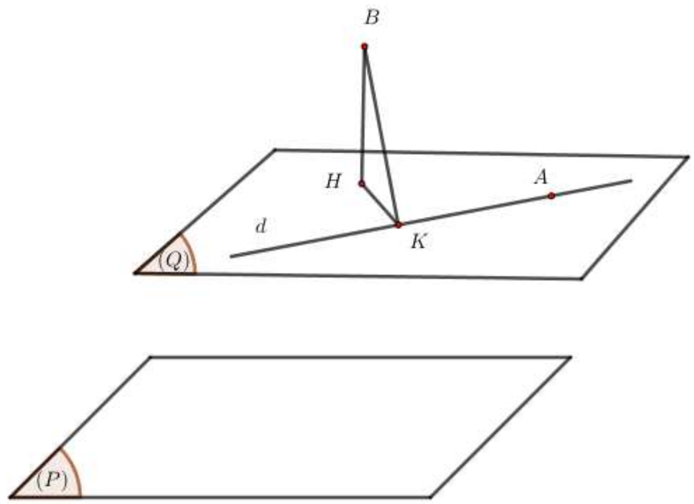
B. $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{2}$.

C. $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{2}$.

D. $d:\frac{x+3}{-26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3)-2(y-0)+2(z-1)=0$ $\Leftrightarrow x-2y+2z+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q), khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1;-1;3)$ và nhận $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Vì $H=BH\cap(Q)\Rightarrow H\in BH\Rightarrow H(1+t;-1-2t;3+2t)$ và $H\in(Q)$ nên ta có $(1+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)+1=0\Leftrightarrow t=-\frac{10}{9}\Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\frac{26}{9};\frac{11}{9};\frac{-2}{9}\right)=\frac{1}{9}(26;11;-2)$.

Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d, khi đó

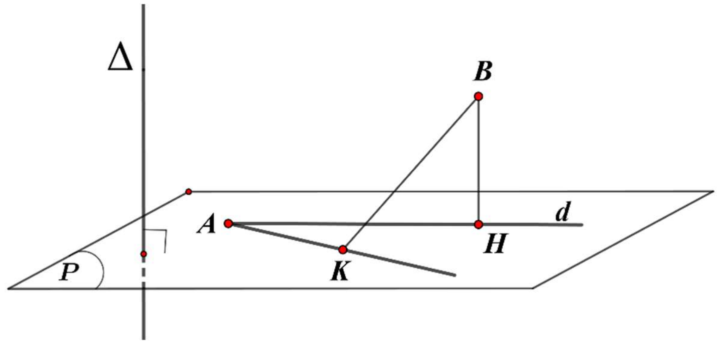
Ta có $d(B;d)=BK\geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK=BH$, do đó đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(26;11;-2)$ có phương trình chính tắc: $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Câu 23: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(25;-29;-6)$.

Lời giải

Chọn B



• Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ.

Chọn $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_\Delta = (2;2;-1)$.

$\Rightarrow (P)$ có phương trình: $2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$.

Khi đó mọi đường thẳng d đi qua A và vuông góc Δ thì d nằm trong (P).

• Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d và (P).

Ta có khoảng cách từ B đến d là $BK \geq BH = d(B,(P)) = 6$.

Dấu bằng xảy ra khi d đi qua A và H.

• Tìm H là hình chiếu vuông góc của B trên (P).

Đường thẳng a đi qua $B(1;2;-3)$ và vuông góc với (P), có phương trình: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = -3-t \end{cases}$

.

Có $H = a \cap (P) \Rightarrow 2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0 \Leftrightarrow 9t+18=0 \Leftrightarrow t=-2$

$\Rightarrow H(-3;-2;-1)$ và $\overrightarrow{AH} = (-1;0;-2)$ là một véctơ chỉ phương của d.

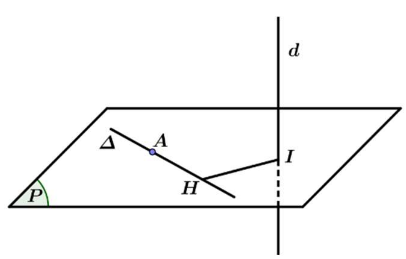
Vậy một véctơ chỉ phương của d là $\vec{u}(1;0;2)$.

Câu 24: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, vuông góc với d đồng thời khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất. Biết $\vec{v} = (a;b;4)$ là một véc- tơ chỉ phương của Δ. Tính giá trị $a+b$.

A. 2. **B.** −8. **C.** −2. **D.** −4.

Lời giải

Chọn B



Gọi (P) là mặt phẳng qua A, vuông góc với $d \Rightarrow (P): -x+2y+z-2=0$. Suy ra $\Delta \subset (P)$

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1;1;1)$, H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ.

Ta có $d(d;\Delta) = IH \leq IA$. Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv A$.

d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$, $\overrightarrow{IA}=(1;0;1)$

Vậy $\max d(d,\Delta)=IA$ khi Δ có 1 VTCP là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{IA}\right]=(2;2;-2)$ mà $\vec{v}=(a;b;4)$ là 1 VTCP của Δ nên $\vec{v}=-2\vec{u}\Rightarrow a=-4,b=-4\Rightarrow a+b=-8$.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;2)$. Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) và trục oy. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), đi qua M sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất.

A. $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{-1}$.

B. $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{1}$.

C. $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{-1}$.

D. $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{-3}$.

Lời giải

Chọn A

$M=(P)\cap oy\Rightarrow M(0;3;0)$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A lên đường thẳng d.

Ta có $AH=d(A;d)$. Xét trong tam giác vuông AHM có

$AH\le AM\Rightarrow AH$ max $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ M

$\Rightarrow d(A;d)$ max $\Leftrightarrow$ AM $\perp d$. Suy ra vecto chỉ phương của d: $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{n_P}\right]$.

$\overrightarrow{n_P}=(2;1;1)$, $\overrightarrow{AM}=(-1;1;-2)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=(-3;3;3)=-3(1;-1;-1)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;4;2),B(-1;2;4)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x=1-15t\\y=4-18t\\z=2-19t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=1-5t\\y=4+8t\\z=2-9t\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=1+5t\\y=4-8t\\z=2-9t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=1+15t\\y=4+18t\\z=2-19t\end{cases}$.

Lời giải

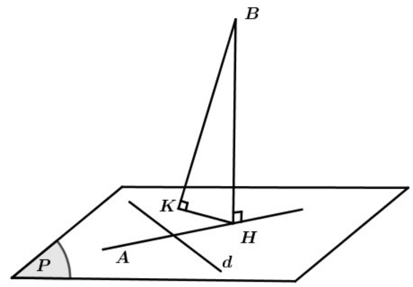
Chọn D

Đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và nhận $\vec{u}=(-1;1;2)$ làm một véc tơ chỉ phương.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và A. Khi đó $\vec{u}=(-1;1;2)$ và $\overrightarrow{AM}=(0;-6;-2)$ không cùng phương và có giá song song hoặc chứa trong (P). Suy ra có véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]=(10;-2;6)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):5x-y+3z-7=0$

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và Δ, ta luôn có $BH\ge BK$, suy ra BH nhỏ nhất khi H trùng K.



Đường thẳng qua B vuông góc với (P) có phương trình: $(BK):\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\end{cases}\quad (t\in R)$.

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\\5x-y+3z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\\5(-1+5t)-2+t+3(4+3t)-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{2}{35}\\x=-\dfrac{5}{7}\\y=\dfrac{68}{35}\\z=\dfrac{146}{35}\end{cases}\Rightarrow K\left(-\dfrac{5}{7};\dfrac{68}{35};\dfrac{146}{35}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AK}=\left(-\dfrac{12}{7};-\dfrac{72}{35};\dfrac{76}{35}\right)$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;4;2)$, nhận $\vec{u}_{\Delta}=-\dfrac{35}{4}\overrightarrow{AK}$ hay $\vec{u}_{\Delta}=(15;18;-19)$ làm một véc tơ chỉ phương, suy ra có phương trình

$(\Delta):\begin{cases}x=1+15t'\\y=4+18t'\\z=2-19t'\end{cases}\quad (t'\in R)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$, điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A song song với (P) sao cho khoảng cách giữa d và Δ lớn nhất.

A. $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1+29t\\z=2+69t\end{cases}$.

B. $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1-29t\\z=2+11t\end{cases}$.

C. $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

D. $d:\begin{cases}x=1+21t\\y=-1+10t\\z=2+31t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng α qua A và song song với (P) có phương trình: $x+y-z+2=0$ $\Rightarrow d\subset(\alpha)$.

Đường thẳng Δ có vtcp là $\vec{u}=(2;1;-3)$, (α) có vtpt là $\vec{n}_\alpha=(1;1;-1)$.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=4-3t\end{cases}$.

Gọi B là giao điểm của Δ và α. Tọa độ điểm B ứng với t là nghiệm phương trình: $-1+2t+t-(4-3t)+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow B\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Xét đường thẳng Δ_1 là đường thẳng đi qua A song song với Δ. Phương trình của Δ_1 là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=2-3t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $\Delta_1 \Rightarrow H(1+2t,-1+t,2-3t)$, $\overrightarrow{BH}=\left(1+2t;t-\dfrac{3}{2};-3t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BI}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 2+4t+t-\dfrac{3}{2}+9t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{28}$.

Khi đó $\overrightarrow{BH}=\left(\dfrac{13}{14};\dfrac{-43}{28};\dfrac{3}{28}\right)=\dfrac{1}{28}(26;-43;3)=\dfrac{1}{28}\vec{u}_1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=[\vec{u}_1;\vec{n}_\alpha]=(40;29;69)$.

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1+29t\\z=2+69t\end{cases}$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;3);B(-1;0;2)$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua B, cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{4}$.

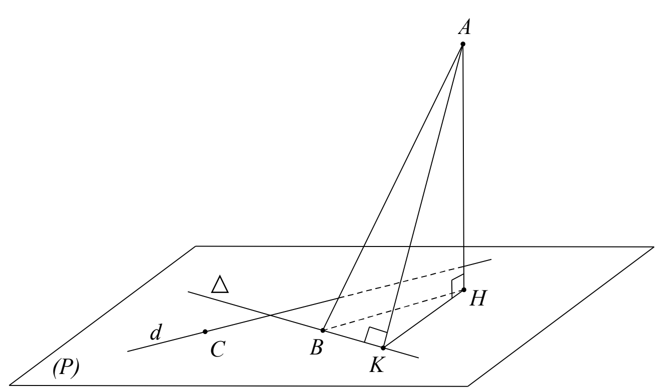
B. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-4}$.

C. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

D. $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-14}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $C\in d \Rightarrow C(1;0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(2;0;-3), \overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa B và đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu kẻ từ A xuống mặt phẳng (P) và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{u_d}\right] = (3;-4;2)$

.

Gọi K là hình chiếu vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng Δ. Suy ra $d(A;\Delta) = AK$.

Ta thấy ΔABK vuông tại K nên $AK \le AB$.

$\Rightarrow AK$ đạt giá trị lớn nhất khi K trùng với B, khi đó $AK = AB$.

Do đó : $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{BA}; \vec{n}\right] = (-8;1;14)$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{-14}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$ và hai điểm $A(5;-2;6), B(3;-2;1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

Câu 30: **1**. $MA + MB$ nhỏ nhất

A. $M\left(-\dfrac{5}{11}; \dfrac{21}{11}; \dfrac{14}{11}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{5}{11}; -\dfrac{21}{11}; \dfrac{14}{11}\right)$.

C. $M\left(\dfrac{14}{11}; -\dfrac{21}{11}; \dfrac{5}{11}\right)$. **<u>D.</u>** $M\left(\dfrac{21}{11}; -\dfrac{14}{11}; \dfrac{5}{11}\right)$.

Câu 31: **2**. $|MA - MB|$ lớn nhất

<u>A.</u> $M\left(\dfrac{17}{7}; -2; -\dfrac{3}{7}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{17}{7}; -\dfrac{3}{7}; -2\right)$.

C. $M\left(\dfrac{17}{7}; -\dfrac{3}{7}; 2\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{3}{7}; \dfrac{17}{7}; -2\right)$.

Lời giải.

Chọn 1.1.D ; 1.2.A.

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;2)$ là VTPT

Thay tọa độ hai điểm A, B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với (P).

Câu 32: **1**. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có $MA = MA'$.

Do đó $\forall M \in (P): MA + MB = A'M + MB \ge A'B$, mà $A'B$ không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

Ta có: $AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow H(1;-1;2) \\ z = 2 \end{cases}$$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3;2;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=(6;-4;3)$, phương trình $A'B:\begin{cases}x=-3+6t\\y=2-4t\\z=-2+3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-3+6t\\y=2-4t\\z=-2+3t\\2x-y+2z-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{21}{11}\\y=-\dfrac{14}{11}\\z=\dfrac{5}{11}\end{cases}$

Vậy $M\left(\dfrac{21}{11};-\dfrac{14}{11};\dfrac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

Câu 33: **2**. Vì A,B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M\in(P)$ ta luôn có $|AM-MB|\le AB$, đẳng thức xảy ra khi $M=AB\cap(P)$.

Phương trình $AB:\begin{cases}x=5-2t\\y=-2\\z=6-5t\end{cases}$

Tọa độ $M:\begin{cases}x=5-2t\\y=-2\\z=6-5t\\2x-y+2z-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{17}{7}\\y=-2\\z=-\dfrac{3}{7}\end{cases}$. Vậy $M\left(\dfrac{17}{7};-2;-\dfrac{3}{7}\right)$.

Câu 34: **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$

A. $P=4$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(1;1;1)$; $\overrightarrow{AB}=(4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB: $(\alpha):2x+y-3=0$.

Vì $(2.3+1.2-3).(2.5+1.3-3)=50>0$ nên B, C nằm về một phía so với (α), suy ra A, C nằm về hai phía so với (α).

Điểm M thỏa mãn $MA=MB$ khi $M\in(\alpha)$. Khi đó $MB+MC=MA+MC\ge AC$.

$MB+MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M=AC\cap(\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AC:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1+2t\end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1+2t\\2x+y-3=0\end{cases}$. Suy ra $M(1;1;3)\Rightarrow P=a+b+c=5$.

Câu 35: **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max} = \sqrt{57}$ **B.** $T_{\max} = 3$ **C.** $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$ **D.** $T_{\max} = 3\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn B

Do M thuộc Δ nên $M(t;1+t;t)$.

Khi đó $MA = \sqrt{3t^2 - 6t + 27} = \sqrt{3(1-t)^2 + 24}$, $MB = \sqrt{3t^2 + 6}$.

Do đó $|MA - MB| = \left|\sqrt{3(1-t)^2 + 24} - \sqrt{3t^2 + 6}\right|$.

Xét hai véc tơ $\vec{u} = \left(\sqrt{3}(1-t); \sqrt{24}\right)$ và $\vec{v} = \left(\sqrt{3}t; -\sqrt{6}\right)$.

Ta có $\left||\vec{u}| - |\vec{v}|\right| \le |\vec{u} + \vec{v}| = 3$ nên $T_{\max} = 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u} = \left(\sqrt{3}(1-t); \sqrt{24}\right)$ và $\vec{v} = \left(\sqrt{3}t; -\sqrt{6}\right)$ ngược hướng hay $t = 1$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2} - 3$. **D.** $\sqrt{82} - 5$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t > 0 : \overrightarrow{MN} = t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t.|\vec{a}| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 5$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = (5;-5;0)$.

Gọi $A'(x';y';z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 4 = 4 \\ y' - 7 = -5 \\ z' - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(1;\ 2;\ 3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $AM = A'N$ nên $|AM - BN| = |A'N - BN| \le A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM - BN| = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}$, đạt được khi $N = A'B \cap (Oxy)$.

Câu 37: **(Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và hai điểm $M(4;-4;2)$, $N(6;0;6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E.

A. $x - 2y + 2z + 8 = 0$. **B.** $2x + y - 2z - 9 = 0$.

C. $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x-2y+z+9=0$.

Phương pháp giải: Dựng hình, áp dụng công thức trung tuyến để biện luận giá trị lớn nhất

Lời giải:

Chọn D.

Xét mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ có tâm $I(1;2;2)$, bán kính $R=3$.

Ta có: $MI=NI=3\sqrt{5}>3=R$ suy ra M,N nằm bên ngoài khối cầu (S).

Gọi H là trung điểm của MN $\Rightarrow H(5;-2;4)$ và $\mathrm{EH}^2=\dfrac{\mathrm{EM}^2+\mathrm{EN}^2}{2}-\dfrac{\mathrm{MN}^2}{4}$.

Lại có $(EM+EN)^2\le(1^2+1^2)(EM^2+EN^2)=2\left(EH^2+\dfrac{MN^2}{4}\right)$

Để $EM+EN$ đạt GTLN thì EH đạt GTLN.

Khi đó E là giao điểm của IH và mặt cầu (S).

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) tại E $\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}=a.\overrightarrow{EI}=b\overrightarrow{IH}=(4b;-4b;2b)$.

Dựa vào các đáp án ta thấy ở đáp án D, $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-2;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $2x-2y+z+9=0$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a-10b+c$.

A. $\dfrac{62}{9}$. **B.** $\dfrac{27}{9}$. **C.** $\dfrac{46}{9}$. **D.** $\dfrac{43}{9}$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(3-x;1-y;1-z)\\ \overrightarrow{IB}=(7-x;3-y;9-z)\\ \overrightarrow{IC}=(2-x;2-y;2-z)\end{cases}$.

+ $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}23-6x=0\\13-6y=0\\25-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}\\ y=\dfrac{13}{6}\\ z=\dfrac{25}{6}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

+ Gọi đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc (P).

Ta có (d) đi qua $I\left(\dfrac{23}{6};\dfrac{13}{6};\dfrac{25}{6}\right)$ và nhận $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Suy ra phương trình $\left(d\right):\begin{cases}x=\dfrac{23}{6}+t\\ y=\dfrac{13}{6}+t\\ z=\dfrac{25}{6}+t\end{cases}$.

$M\in\left(d\right)\Leftrightarrow M\left(\dfrac{23}{6}+t;\dfrac{13}{6}+t;\dfrac{25}{6}+t\right)$

$M\in\left(P\right)\ \Leftrightarrow\dfrac{23}{6}+t+\dfrac{13}{6}+t+\dfrac{25}{6}+t-3=0\ \Leftrightarrow t=\dfrac{-43}{18}\ \Leftrightarrow M\left(\dfrac{13}{9};\dfrac{-2}{9};\dfrac{16}{9}\right)$.

Do đó $\begin{cases}a=\dfrac{13}{9}\\ b=\dfrac{-2}{9}\\ c=\dfrac{16}{9}\end{cases}\Rightarrow\ 2a-10b+c=\dfrac{62}{9}$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2),B(3;1;-1)$. và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9\text{a}+3b+6c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-m;-n;2-p);\overrightarrow{IB}=(3-m;1-n;-1-p)$.

$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-m)-2(3-m)=0\\ 3(-n)-2(1-n)=0\\ 3(2-p)-2(-1-p)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\ n=-2\\ p=8\end{cases}\Rightarrow I(-3;-2;8)$.

Ta có $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\left|3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Khi đó, $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M\in(P)\ \Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M\in(P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Khi đó Δ nhận vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vecto chỉ phương $\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-3+t\\ y=-2+t\\ z=8+t\end{cases}$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=-3+t \\ y=-2+t \\ z=8+t \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{11}{3} \\ y=-\dfrac{8}{3} \\ z=\dfrac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{11}{3} \\ b=-\dfrac{8}{3} \\ c=\dfrac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow S=9a+3b+6c=3.$$

Câu 40: **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Lời giải

Chọn C

Xét điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Giả sử $I(x;y;z)$, ta có:

$\overrightarrow{IA}(4-x;3-y;1-z), \overrightarrow{IB}(3-x;1-y;3-z)$.

Do đó: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x)=3-x \\ 2(3-y)=1-y \\ 2(1-z)=3-z \end{cases} \Leftrightarrow I(5;5;-1)$.

Do đó: $P=2MA^2-MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\left(\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2-\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+2IA^2-IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)$

$=MI^2+2IA^2-IB^2$.

Do I cố định nên IA^2, IB^2 không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất). $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1;2;-1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S).

Ta có: MI đi qua $I(5;5;-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4;3;0)$.

Phương trình của MI là: $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=-1. \end{cases}$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$(1+4t-1)^2+(2+3t-2)^2+(-1+1)^2=9 \Leftrightarrow 25t^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{5} \\ t=-\dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Với $t=\frac{3}{5}\Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5};\frac{19}{5};-1\right)\Rightarrow M_1I=2$ (min).

Với $t=-\frac{3}{5}\Rightarrow M_1\left(-\frac{7}{5};\frac{1}{5};-1\right)\Rightarrow M_2I=8$ (max).

Vậy $\begin{cases} m=P_{\max}=48 \\ n=P_{\min}=-12 \end{cases}\Rightarrow m-n=60.$

Câu 41: **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$.

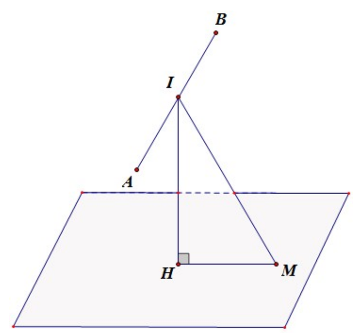
B. $(4;3;1)$.

C. $(1;3;4)$.

D. $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(3;1;4)$. Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)-IA^2=MI^2-IA^2$.

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI=IH\Leftrightarrow M\equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α). Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=4-3t \end{cases}$.

$H\in\Delta\Leftrightarrow H(3+t;1+2t;4-3t)$.

$H\in(\alpha)\Leftrightarrow(3+t)+2(1+2t)-3(4-3t)-7=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow H(4;3;1)$.

Vậy $M(4;3;1)$.

Câu 42: **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(8;5;-11),B(5;3;-4),C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó:

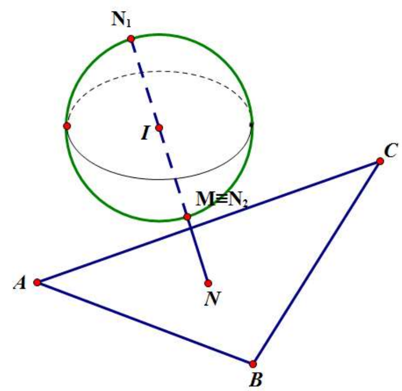
$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right|=\left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right|=MN$

.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$. Phương trình $NI=\begin{cases}x=2+2t\\y=4+2t\\z=-1-t\end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S) ta được: $(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2),N_2(0;2;0)$.



Vì $NN_1>NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2$.

Câu 43: **(Chuyên Lê Quý Đôn- Quảng Trị -Lần 1)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $\mathrm{A}(1;1;1),\mathrm{B}(0;1;2),\mathrm{C}(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(\mathrm{P}):x-y+z+2=0$. Tìm điểm $\mathrm{N}\in(\mathrm{P})$ sao cho $\mathrm{S}=2\mathrm{NA}^2+\mathrm{NB}^2+\mathrm{NC}^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\mathrm{N}(-2;0;1)$ **B.** $\mathrm{N}\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$ **C.** $\mathrm{N}\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$ **D.** $\mathrm{N}(-1;2;1)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $\mathrm{M}(a;b;c)$ thỏa mãn đẳng thức vectơ $2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{0}$

$\Rightarrow 2(1-a;1-b;1-c)+(0-a;1-b;2-c)+(-2-1;1-b;4-c)=0$

$\Leftrightarrow(-4a;4-4b;8-4c)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\\c=2\end{cases}\Rightarrow \mathrm{M}(0;1;2)$

Khi đó

$S=2NA^2+NB^2+NC^2=2\overrightarrow{NA}^2+\overrightarrow{NB}^2+\overrightarrow{NC}^2=2\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MC}\right)^2$

$=4MN^2+2\overrightarrow{NM}.\left(\underbrace{2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{0}\right)+\underbrace{2MA^2+MB^2+MC^2}_{const}$

$=4MN^2+\underbrace{2MA^2+MB^2+MC^2}_{const}$

Suy ra $S_{min}\Leftrightarrow MN_{min}\Leftrightarrow$ N là hình chiếu của M trên $(P)\Rightarrow MN\perp(P)$

Phương trình đường thẳng MN là $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow N(t;1-t;t+2)$

Mà $m\in mp(P)$ suy ra $t-(1-t)+t+2+2=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow N(-1;2;1)$

Câu 44: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng (P): $2x+y-z+6=0$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó I là trung điểm của AB nên $I(3;3;3)$.

$MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}\right)^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2$.

$=IA^2+IB^2+2IM^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=IA^2+IB^2+2IM^2$.

Vì IA^2+IB^2 không đổi nên MA^2+MB^2 nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất.

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên (P).

Khi đó đường thẳng IM qua $I(3;3;3)$ và vuông góc với (P) nên có phương trình:

$\begin{cases}x=3+2t\\y=3+t\\z=3-t\end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng IM và (P) ứng với t là nghiệm của phương trình:

$2(3+2t)+(3+t)-(3-t)+6=0\Leftrightarrow 6t+12=0\Leftrightarrow t=-2$.

Giao điểm tìm được chính là hình chiếu của I lên (P). Vậy $M(-1;1;5)$ nên $a+b+c=5$.

Câu 45: **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=-t\end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0),B(0;3;0),C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Vì $M\in d$ nên giả sử $M(1-t;2+t;-t)$.

Ta có: $MA^2 = 3t^2 + 14t + 29; MB^2 = 3t^2 - 4t + 2; MC^2 = 3t^2 + 10t + 21$

$\Rightarrow P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 18t^2 + 36t + 96 = 18(t+1)^2 + 78 \geq 78$

Do đó $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$, khi đó: $M(2;1;1) \Rightarrow a+b+c = 4$.

Câu 46: **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. **B.** $M(2;0;5)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I = (2;-1;4)$.

Khi đó: $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = MI^2 + 6$.

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$1.(x-2) - 2.(y+1) + 2.(y-4) = 0$ hay $(P): x - 2y + 2z - 12 = 0$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+2t \end{cases}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+2t \\ x - 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases}$. Vậy $M(2;0;5)$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0.

A. $x_0 = 1$. **B.** $x_0 = 3$. **C.** $x_0 = 0$. **D.** $x_0 = 2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó ta có

$MA^4+MB^4=\left(MA^2+MB^2\right)^2-2MA^2.MB^2=\left(2MI^2+\frac{AB^2}{2}\right)^2-2\left(MI^2-\frac{AB^2}{4}\right)^2$

$=4MI^4+2MI^2AB^2+\frac{AB^4}{4}-2MI^4+MI^2AB^2-\frac{AB^4}{8}$

$=2MI^4+3MI^2AB^2+\frac{AB^4}{4}=2\left(MI^2+\frac{3AB^2}{4}\right)^2-\frac{7}{10}AB^4$

Do đó, MA^4+MB^4 đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I lên d.

Điểm $I\left(2;-1;0\right)$. Lấy $M\left(2+t;-1+2t;3t\right)\in \mathrm{d}$. $\overrightarrow{IM}=\left(t;2t;3t\right)$

$\overrightarrow{IM}\perp \overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t+4t+9t=0\Leftrightarrow t=0$

Suy ra $M\equiv I$.

Vậy $x_0=2$

Câu 48: **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A\left(1;2;3\right),B\left(0;1;1\right),C\left(1;0;-2\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z+2=0$. Gọi *M* là điểm thuộc mặt phẳng (*P*) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng $\left(Q\right):2x-y-2z+3=0$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{121}{54}$ **C.** 24 **D.** $\frac{91}{54}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $I\left(a;b;c\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}\left(1-a;2-b;3-c\right),\overrightarrow{IB}\left(-a;1-b;1-c\right),\overrightarrow{IC}\left(1-a;-b;-2-c\right)$

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}1-a-2a+3-3a=0\\2-b+2-2b-3b=0\\3-c+2-2c-6-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=4\\6b=4\\6c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=\frac{2}{3}\\c=-\frac{1}{6}\end{cases}\quad I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right).$$

Ta chứng minh được $T=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$. Do đó *T* đạt *GTNN* khi MI đạt *GTNN* $\Leftrightarrow$ *M* là hình chiếu vuông góc của *I* trên mặt phẳng (*P*).

Ta có $MI:\begin{cases}x=\frac{2}{3}+t\\y=\frac{2}{3}+t\\z=-\frac{1}{6}+t\end{cases}$,

$$M\in MI\Rightarrow M\left(t+\frac{2}{3};t+\frac{2}{3};t-\frac{1}{6}\right),M\in\left(P\right)\Rightarrow 3t+\frac{19}{6}=0\Leftrightarrow t=-\frac{19}{18}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{7}{18};-\frac{7}{18};-\frac{11}{9}\right)\Rightarrow d\left(M;(Q)\right)=\frac{\left|-\frac{7}{9}+\frac{7}{18}+\frac{22}{9}+3\right|}{3}=\frac{91}{54}.$$

Câu 49: **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **<u>B</u>.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=d(I,(P))=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng

$$6MI^2+228=6.9+228=282.$$

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của $\Delta: \begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=1-2t\end{cases}$.

Ta có $M=\Delta\cap(P)$. Xét phương trình

$t+2(1+2t)-2(1-2t)-9=0 \Leftrightarrow 9t-9=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(1;3;-1)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$.Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$ sao cho $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

<u>A</u>. $P=6$. **B.** $P=2$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn A

Với mọi điểm I ta có

$S=2NA^2+NB^2+NC^2=2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 4NI^2 + 2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ Suy ra tọa độ điểm I là $I(0;1;2)$.

Khi đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Tọa độ điểm $N(t;1-t;2+t) \in (P) \Rightarrow t - 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(-1;2;1)$.

Câu 51: **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x;4-y;5-z) \\ \overrightarrow{IB} = (3-x;4-y;-z) \\ \overrightarrow{IC} = (2-x;-1-y;-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x;4-y;5-z) \\ \overrightarrow{IB} = (3-x;4-y;-z) \\ 3\overrightarrow{IC} = (6-3x;-3-3y;-3z) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (10-5x;5-5y;5-5z)$

Do đó: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;1)$.

Mặt khác: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$$= 5MI^2 + 2.MI.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2$$

Vì I, A, B, C cố định nên $IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Gọi $\{M\} = d \cap (\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}\\ 3x-3y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+6=3y-3\\ -2x+4=3z-3\\ 3x-3y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right).\\ z=0\end{cases}$$

Vậy $a=\dfrac{7}{2},b=-\dfrac{1}{2},c=0\Rightarrow S=a+b+c=3$.

Câu 52: **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0),B(1;-1;3),C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-15=0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn:

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{2}\Rightarrow I(1;2;-2)$

Ta có $2MA^2=2\overrightarrow{MA}^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

$MC^2=\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$

Suy ra $2MA^2-MB^2+MC^2=2MI^2+2IA^2+IC^2-IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}\right)$

Suy ra $2MA^2-MB^2+MC^2=2MI^2+2IA^2+IC^2-IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2+IC^2-IB^2$ không đổi. Vậy $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P).

• Đường thẳng Δ qua $I(1;2;-2)$ và vuông góc với (P) là: $\begin{cases}x=1+3t\\ y=2-3t\\ z=-2+2t\end{cases}$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=1+3t\\ y=2-3t\\ z=-2+2t\\ 3x-3y+2z-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-1\\ z=0\\ t=1\end{cases}\Rightarrow M(4;-1;0)$$

Suy ra $a+b+c=3$

Câu 53: **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q):3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+5c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0} \Rightarrow E(3;0;1)$.

Ta có: $S=MA^2+MB^2+2MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2=4ME^2+EA^2+EB^2+2EC^2$.

Vì $EA^2+EB^2+2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q).

Phương trình đường thẳng $ME:\begin{cases} x=3+3t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=3+3t \\ y=t \\ z=1-t \\ 3x+y-z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases}$.

$\Rightarrow M(0;-1;2) \Rightarrow a=0,\ b=-1,\ c=2$.

$\Rightarrow a+b+5c=0-1+5.2=9$.

Câu 54: **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N(-2;0;1)$. **C.** $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $N(-1;2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Với mọi điểm I ta có

$S=2NA^2+NB^2+NC^2=2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=4NI^2+2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+2IA^2+IB^2+IC^2$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ Suy ra tọa độ điểm I là: $I(0;1;2)$.

Khi đó $S=4NI^2+2IA^2+IB^2+IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x=0+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$

Tọa độ điểm $N(t;1-t;2+t)\in(P) \Rightarrow t-1+t+2+t+2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow N(-1;2;1)$.

Câu 55: Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1\,;\,1\,;3)$, $B(21\,;\,9\,;\,-13)$. Điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -18.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(6\,;3\,;-1)$.

Khi đó $3MA^2+MB^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=4MI^2+3IA^2+IB^2$.

Do $3IA^2+IB^2$ không đổi vì ba điểm $A;B;I$ cố định nên $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S), ($J(2\,;1\,;3)$ là tâm của mặt cầu (S)).

Ta có phương trình đường thẳng IJ là $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3-2t\end{cases}\Rightarrow IJ\cap(S)=\left[\begin{array}{l}M_1(4;2\,;1)\\M_2(0\,;0\,;5)\end{array}\right.$.

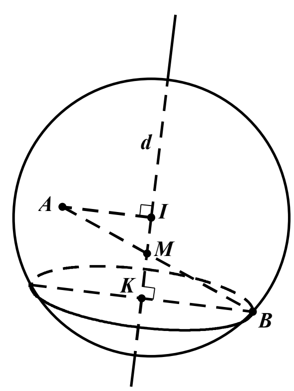
Kiểm tra $IM_1<IM_2\,(3<9)$ nên $M_1(4;2;1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T=a.b.c=8$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4)\Rightarrow d\perp(P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I\in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB\perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2)\Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0\Rightarrow IA\perp d$.

Ta tính được $IK=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và

$KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap d$.

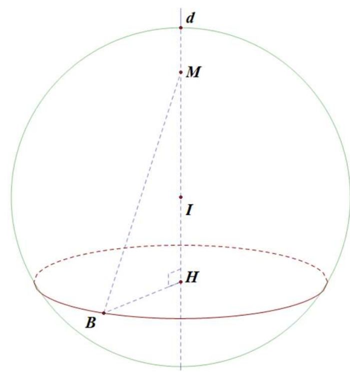
Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30}\Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R=27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3;-4;-5)$ và vuông góc với (P).

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r=2$.

$M\in d\Leftrightarrow M(1+2t;2+3t;3+4t)$.

Ta có $T=MA+MB=MA+\sqrt{MH^2+r^2}$.

Lại có $MH=d(M;(P))=\dfrac{|29t-87|}{\sqrt{29}}=\left|\sqrt{29}t-3\sqrt{29}\right|$.

Suy ra $T=\sqrt{29t^2+116t+125}+\sqrt{29(t-3)^2+4}$

$=\sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2+\dfrac{9}{29}}+\sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2+\dfrac{4}{29}}$.

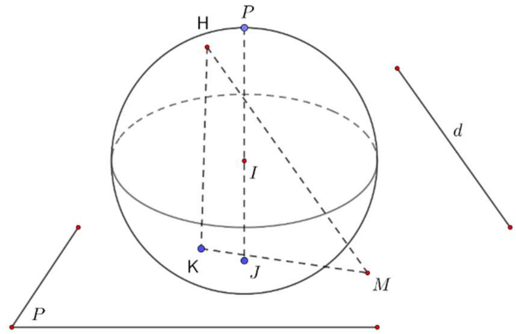
Xét $\vec{u}=\left(t+2;\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right)$, $\vec{v}=\left(3-t;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=\left(5;\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Do đó $T=\sqrt{29}\left(|\vec{u}|+|\vec{v}|\right)\geq\sqrt{29}|\vec{u}+\vec{v}|=5\sqrt{50}$.

Câu 57: **(THPT Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$, đường thẳng $(d):\dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d). Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

A. $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(4;3;-2\right)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH\perp AB$ và $IH=3$ nên H thuộc mặt cầu $\left(S'\right)$ tâm I bán kính $R'=3$.

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA'+BB'=2HM$, M nằm trên mặt phẳng $\left(P\right)$.

Mặt khác ta có $d\left(I;\left(P\right)\right)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<R$ nên $\left(P\right)$ cắt mặt cầu $\left(S\right)$ và $\sin\left(d;\left(P\right)\right)=\sin\alpha=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là hình chiếu của H lên $\left(P\right)$ thì $HK=HM.\sin\alpha$.

Vậy để $AA'+BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$\Leftrightarrow HK$ đi qua I nên $HK_{\max}=R'+d\left(I;\left(P\right)\right)=3+\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

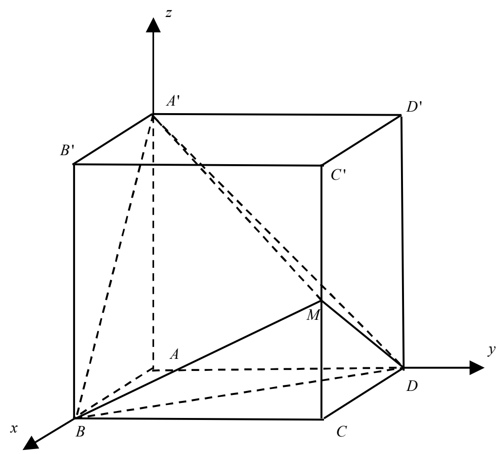
Vậy $AA'+BB'$ lớn nhất bằng $2\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).\dfrac{3\sqrt{3}}{5}=\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$.

Câu 58: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{32}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn C



Tọa độ điểm $C(a;a;0)$, $C'(a;a;b)$, $M(a;a;\frac{b}{2})$.

$\overrightarrow{BA'}=(-a;0;b)$, $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{BM}=(0;a;\frac{b}{2})$.

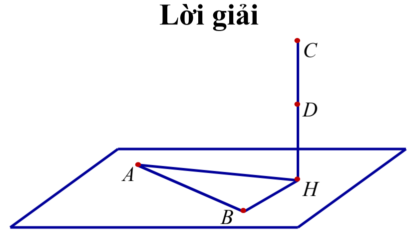
$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=(-ab;-ab;-b^2)$ nên $V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{a^2b}{4}$.

Ta có: $a.a.(2b)\le\left(\frac{a+a+2b}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\Rightarrow a^2b\le\frac{32}{27}\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{8}{27}$.

Câu 59: **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM.

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)\Rightarrow AB=\sqrt{113}$

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-2+12-10=0\Rightarrow AB\perp CD$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD.

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1;1;6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)$ là:

$x-4y+z-1=0$.

Phương trình đường thẳng CD: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-4t\\z=-1+t\end{cases}$.

$H\in CD\Leftrightarrow H(1+t;2-4t;-1+t)$.

$H\in(P)\Leftrightarrow 1+t-4(2-4t)-1+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Với $\forall M \in CD$, ta có $\begin{cases} AM \geq AH \\ BM \geq BH \end{cases} \Rightarrow AM + BM \geq AH + BH$.

$C_{ABM} = AB + AM + BM \geq \sqrt{113} + AH + BH$, $\forall M \in CD$.

Suy ra $minC_{ABM} = \sqrt{113} + AH + BH$, đạt được $M \equiv H \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C_{\Delta ABM} = AM + BM + AB$ mà AB không đổi suy ra $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD} = (1;-4;1)$.

Xét $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD$. Gọi (α) qua AB và vuông góc với CD.

(α) đi qua $A(-1;1;6)$ và nhận $\overrightarrow{CD} = (1;-4;1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Suy ra (α) có phương trình là: $x-4y+z-1=0$.

Vì điểm M thuộc CD sao cho $AM+BM$ nhỏ nhất nên $M = CD \cap (\alpha)$.

$(\alpha): x-4y+z-1=0$, CD có phương trình: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-4t \\ z = -1+t \end{cases}$

$M = CD \cap (\alpha) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow a+b+c = \frac{3}{2}+0+\frac{-1}{2} = 1$.

Câu 61: **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1);B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)(a>2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=a+b+c$ bằng:

A. $T=6$. **B.** $T=8$. **C.** $T=4$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

Do AB không đổi nên S_{ABM} nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4;-8;-4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1;1;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow AB // (P)$

MH nhỏ nhất khi M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P);

với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp(P).

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4;-8;-4) \\ \overrightarrow{n_P} = (1;1;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (3;0;3) \Rightarrow$ phương trình mp (Q) là $x + z - 4 = 0$.

M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ

phương trình $\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Rightarrow M(t;2-2t;4-t)$ với $t > 2$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t-3;-2-2t;3-t); \overrightarrow{BM} = (t-7;6-2t;7-t)$.

Tam giác ABM vuông tại M nên

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-7) + (-2-2t)(6-2t) + (3-t)(7-t) = 0$

$\Leftrightarrow (t-3)(t-7) + 2(t-3)(t+1) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3\ (tm) \\ t = \dfrac{5}{3}\ (l) \end{array} \right.$.

Với $t = 3 \Rightarrow M(3;-4;1) \Rightarrow a + b + c = 3 - 4 + 1 = 0$.

Câu 62: **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta' = \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức $a^2 + 2b^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó giá trị $x_0 + y_0$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** 0. **<u>C</u>.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

<u>Chọn C</u>

Giả sử PQ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và Δ'

Với $P \in \Delta$ và $Q \in \Delta'$ có $P(0,0,1)$ và $Q(1,0,0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ và Δ'

Khi đó ta có $a + b = ME + MF \geq EF \geq PQ$ hay $a + b \geq \sqrt{2}$.

Nhận thấy $\dfrac{1}{3}(a-2b)^2 = (a^2 + 2b^2) - \left(\dfrac{2}{3}a^2 + \dfrac{4}{3}ab + \dfrac{2}{3}b^2 \right) = (a^2 + 2b^2) - \dfrac{2}{3}(a+b)^2$

Do đó ta có $\dfrac{1}{3}(a-2b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 \geq \dfrac{2}{3}(a+b)^2$ hay $a^2 + 2b^2 \geq \dfrac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + 2b^2$ bằng $\dfrac{4}{3}$ đạt được khi dấu bằng xảy ra khi

$\begin{cases} M \in EF \\ EF \equiv PQ \text{ hay } \overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MQ} \text{ hay } M\left(\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3} \right). \\ a = 2b \end{cases}$

Câu 63: **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \dfrac{5}{6}$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và đường thẳng

$\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của $d(M;\Delta)$ là

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;0)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Ta có: $d(I;(P))=\dfrac{1}{3}<R$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là:

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ qua O và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{OI}=(1;-1;0),\left[\overrightarrow{OI},\vec{a}\right]=(-1;-1;2)$.

Ta có: $d(I;\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OI},\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{2}$.

Mặt khác $\Delta\perp(P)$, gọi H là tâm của đường tròn (C) giao tuyến của (P) và (S).

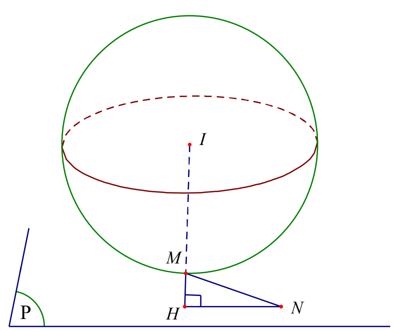
Ta có: $IH//\Delta$. Do đó $d(M;\Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(M;\Delta)=r+d(IH;\Delta)=r+d(I;\Delta)$

Khoảng cách lớn nhất của $d(\mathrm{M};\Delta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 64: **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-14=0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$; $d\left(I;(P)\right)=4>R\Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Dựng $IH\perp(P),(H\in(P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N\equiv H$.

Phương trình đường thẳng $IH: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

Điểm $M(1+2t; -2-t; -1+2t) \in (S)$ nên $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1$. Khi đó $M_1(3;-3;1), M_2(-1;-1;-3)$.

Thử lại: $d(M_1;(P)) = 1$; $d(M_2;(P)) = 7 > IH = 4$ (loại).

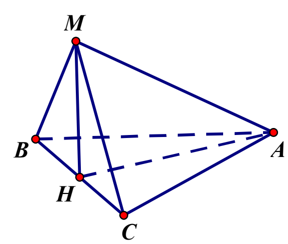
Vậy $MN_{\min} = MH = 1$ khi $M(3;-3;1)$; $\mathrm{N}\left(\frac{11}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 65: **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;2;4) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \Delta\mathrm{ABC}$ suy ra ΔABC vuông tại A.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (ABC). Ta có:

$(MA,(ABC)) = (MA, HA) = \widehat{MAH}$

$(MB,(ABC)) = (MB, HB) = \widehat{MBH}$

$(MC,(ABC)) = (MC, HC) = \widehat{MCH}$

Theo giả thiết $\widehat{MAH} = \widehat{MBH} = \widehat{MCH} \Rightarrow \Delta MAH = \Delta MBH = \Delta MCH \,(g.c.g)$

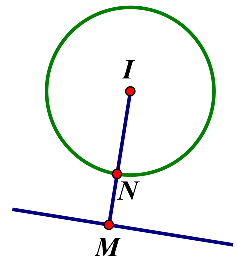
Do đó: $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Suy ra: H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(1;2;2)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8;-8;8)$, Chọn vecto chỉ phương của đường thẳng MH là $\overrightarrow{u_{MH}} = (1;-1;1)$.

Phương trình đường thẳng MH có dạng: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;3)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Gọi $K(1+t;2-t;2+t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng MH.

Ta có: $\overrightarrow{IK} = (t-2;-t;t-1), \overrightarrow{u_{MH}} = (1;-1;1)$

Do $IK \perp MH$ nên $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_{MH}} = 0$, ta được: $t = 1$. Khi đó: $K(2;1;3)$ và $IK = \sqrt{2}$

Do IK > R nên đường thẳng MH không cắt mặt cầu.

Ta có: $MN \geq d(I,MH) - IN = IK - IN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(1;4;3)$ lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1;4;0)$

Gọi A_1 là điểm đôi xứng của A qua mặt phẳng (Oxy), ta tìm được $A_1(1;4;-3)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của $A(1;4;3)$ lên mặt phẳng (P)

Ta có phương trình đường thẳng $AK: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, Gọi $K(1;4+2t;3-t) \in AK$

Mặt khác, $K \in (P) \Rightarrow 5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow K(1;2;4)$

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) thì K là trung điểm của AA_2.

Ta có $\begin{cases} x_{A_2} = 2x_K - x_A = 1 \\ y_{A_2} = 2y_K - y_A = 0 \\ z_{A_2} = zx_K - z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A_2(1;0;5)$

Ta có chu vi tam giác ABC là $P_{\Delta ABC} = AC + AB + BC = A_1C + A_2B + BC \geq A_1A_2$.

Dấu bằng xảy ra khi A_1, A_2, B, C thẳng hàng

Suy ra $\left(P_{\Delta ABC}\right)_{\min} = A_1A_2 = 4\sqrt{5}$.

Câu 67: **(THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 1$. **B.** $P = -3$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = -1$.

Lời giải

Chọn C

$M \in d \Rightarrow M(-1 + 2t; 1 - t; 2t)$.

Chu vi tam giác MAB là: $AM + BM + AB$. Vì $AB = const$ nên chu vi nhỏ nhất khi $(AM + BM)$ nhỏ nhất.

$\overrightarrow{AM}(2t - 2; -t - 4; 2t)$, $\overrightarrow{BM}(2t - 4; -t - 2; 2t - 6)$.

$$AM + BM = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} = \sqrt{(3t)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{(6 - 3t)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2}$$

Đặt $\vec{u} = \left(3t; 2\sqrt{5}\right)$, $\vec{v} = \left(6 - 3t; 2\sqrt{5}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(6; 4\sqrt{5}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức vectơ: $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u} + \vec{v}\right|$. Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

Ta có: $AM + BM = \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{6^2 + \left(4\sqrt{5}\right)^2} = 2\sqrt{29}$. Do đó $(AM + BM)$ nhỏ nhất khi

tồn tại số k dương sao cho $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = k(6 - 3t) \\ 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 1 \end{cases}$. Khi đó $M(1;0;2)$.

Vậy $P = a + b + c = 1 + 0 + 2 = 3$.

Câu 68: **(Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi – Lần 1)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(3; 2;6), B(0;1;0) và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

A. $T = 5$ **B.** $T = 3$ **C.** $T = 2$ **D.** $T = 4$

Phương pháp:

- Đưa phương trình mặt phẳng (P) về dạng chỉ còn 1 tham số.

- (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I;(P))$ max, trong đó: I là tâm mặt cầu (S).

Lời giải

Chọn B

$$A(3;-2;6), B(0;1;0) \in (P): ax + by + cz - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + 6c - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 - 2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): (2 - 2c)x + 2y + cz - 2 = 0$$

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

- (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I;(P))$ max, trong đó: I là tâm mặt cầu (S).

Ta có $d(I;(P))=\dfrac{|(2-2c).1+2.2+c.3-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\dfrac{|c+4|}{\sqrt{5c^2-8c+8}}=\sqrt{\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}}$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}$. Gọi *m* là giá trị của $\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}$ với c nào đó.

Ta có:

$m=\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}\Leftrightarrow c^2+8c+16=m(5c^2-8c+8)\Leftrightarrow c^2(1-5m)+8(1+m)c+16-8m=0(*)$

$\Delta'=(4+4m)^2-(1-5m)(16-8m)=16+32m+16m^2-16+8m+80m-40m^2=-24m^2+120m$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le 5$

$\Rightarrow 0\le\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}\le 5\Rightarrow\left(\sqrt{\dfrac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}}\right)\max=\sqrt{5}\Leftrightarrow c=\dfrac{-4(1+m)}{1-5m}=\dfrac{-4(1+5)}{1-5.5}=1$

Khi đó $T=a+b+c=2-2c+2+c=4-1=3$

Câu 69: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=48$ Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4),B(2;0;0)$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S), đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\dfrac{128\pi}{3}$ **B.** 39π **C.** $\dfrac{88\pi}{3}$ **C.** $\dfrac{215\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có tâm cầu $I(1;-2;3);R=4\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu I lên mặt phẳng (α)

Vậy chiều cao của khối nón (N) là $h=d(I,P)=IH\le IK$, trong đó K là hình chiếu vuông góc của I lên AB

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua I và vuông góc với ta có $(Q):x+2z-7=0$

Phương trình $AB:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-4+2t\end{cases}$ thế vào (Q) ta được $t-8+4t-7=0\Rightarrow t=3$

Tọa độ $K(3;0;2)\Rightarrow IK=3$

Bán kính của khối nón $r=\sqrt{48-h^2}$

Vậy thể tích của khối nón:

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2.h=\dfrac{1}{3}\pi(48-h^2).h=\dfrac{1}{3}\pi(48-h^2).h$ với $\forall h\in[0;3]$.

Khảo sát $V=f(h)$ ta tìm được $V_{\max}=39\pi$

Câu 70: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), đáy là (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng:

A. -4 **B.** 8. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27 \Rightarrow I(1;-2;3); R=3\sqrt{3}$

$A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$; $(\alpha): ax+by-z+c=0$.

Ta có: $A,\ B\in(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow (\alpha): 2x+by-z-4=0$

Ta có: $V_{nón}=\frac{1}{3}\pi.\sqrt{27-r^2}.r^2$

Xét: $T=\sqrt{27-r^2}.r^2 \Rightarrow T^2=(27-r^2).r^4$

$=4.(27-r^2).\frac{r^2}{2}.\frac{r^2}{2} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{4.(27-r^2+r^2)^3}{27}=4$

Dấu '=' xảy ra: $27-r^2=\frac{r^2}{2} \Rightarrow r=3\sqrt{2} \Rightarrow h=\sqrt{27-r^2}=3$

Ta có: $h=d(I;\alpha)=3 \Rightarrow b=2$

Vậy $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=-4 \end{cases}$.

Câu 71: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho $C(0;0;4), M(3;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua CM và (P) cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

A. $x+2y+2z-8=0$. **B.** $x+y+2z+8=0$.

C. $x+2y+2z+8=0$. **D.** $x+2y+z-8=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A=(a;0;0)$ $B=(0;b;0)$, $a>0, b>0$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{4}=1$,

Do mặt phẳng (P) đi qua $M(3;3;1)$ $\Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow ab=4(a+b)$

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16a^2+16b^2+(ab)^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+32ab}$

Do $ab=4(a+b)\geq 8\sqrt{ab} \Rightarrow ab\geq 64 \Rightarrow S\geq 16\sqrt{6}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = 8.

Diện tích tam giác ABC nhỏ nhất bằng $16\sqrt{6}$

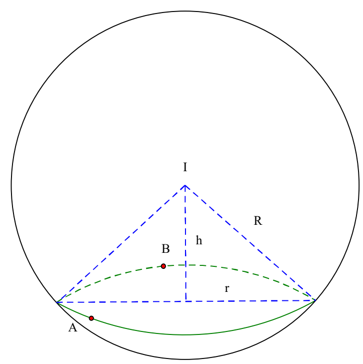
Khi đó phương trình mặt phẳng (P) $\frac{x}{8}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow x+y+2z-8=0$.

Câu 72: **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$, $\left(a,b,c,d\in\mathbb{Z}:d<-5\right)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A,B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=\left|a+b+c+d\right|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **<u>B.</u>** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I\left(1;2;3\right)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Có $IA=IB=\sqrt{6}$ nên A,B thuộc mặt cầu (S).

$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)=-\sqrt{3}\left(1;-1;0\right)=-\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2};3\right)$ là trung điểm của AB.

Gọi $\vec{a}=(1;-1;0)$ và $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $A,B\in(P)$ nên có $\begin{cases} I\in(P) \\ \vec{a}.\vec{n}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a+\frac{7}{2}b+3c+d=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-6a-3c \\ a=b \end{cases}$.

Gọi $h=d\left(I,(P)\right)$, $(C)=(P)\cap(S)$, r là bán kính đường tròn (C).

$r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{6-h^2}$.

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N).

$S=\frac{1}{2}.h.2r=h.\sqrt{6-h^2}\le\frac{h^2+6-h^2}{2}=3$.

$MaxS=3$ khi $h^2=6-h^2\Rightarrow h=\sqrt{3}$.

$h = d\left(I,(P)\right) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \dfrac{\left|a+2b+3c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

$\Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = c \\ a = -c \end{array}\right.$.

Nếu $a = c$ thì $b = a; d = -9a$ và $(P): ax + ay + az - 9a = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0$ (nhận).

Nếu $a = -c$ thì $b = a; d = -3a$ và $(P): ax + ay - az - 3a = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$ (loại).

Vây $T = \left|a+b+c+d\right| = 6$.