CHỦ ĐỀ 07 : TIẾP TUYẾN – SỰ TIẾP XÚC

LÍ THUYẾT

❖ **Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số:**

- Cho hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $\left(C\right)$ tại điểm M.
  - **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'\left(x_0\right)$.
  - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y=f'\left(x\right)\left(x-x_0\right)+y_0$.

❖ **Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước.**

- Bước 1: Gọi $\left(\Delta\right)$ là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'\left(x_0\right)=k \quad \left(1\right)$.
- Giải $\left(1\right)$ tìm x_0. Suy ra $y_0=f\left(x_0\right)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=k\left(x-x_0\right)+y_0$

❖ **Điều kiện để hai hàm số tiếp xúc**

- Cho hai hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và $\left(C'\right):y=g\left(x\right)$. Đồ thị $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ **tiếp xúc nhau** khi chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\end{cases}$ có nghiệm.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có: $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$ và đường tiệm cận đứng $x=1$.

Giả sử $M(m;y_M)\in(C)$ $(m>1)$ $\Rightarrow y_M=\dfrac{m+1}{m-1}=1+\dfrac{2}{m-1}$; $y'(m)=-\dfrac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}$

$\Leftrightarrow 2x+(m-1)^2y-m^2-2m+1=0$.

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y=1 \\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow x=2m-1 \Rightarrow A(2m-1;1)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{m+3}{m-1}=1+\dfrac{4}{m-1} \Rightarrow B\left(1;1+\dfrac{4}{m-1}\right)$.

Suy ra: $AB=\sqrt{(2-2m)^2+\left(\dfrac{4}{m-1}\right)^2}=\sqrt{4(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}}=\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$.

$d(O;\Delta)=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O;\Delta).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}.\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$

$=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{|m-1|}=\dfrac{m^2+2m-1}{m-1}$ (vì $m>1$) $=m+3+\dfrac{2}{m-1}=4+m-1+\dfrac{2}{m-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\dfrac{2}{m-1}$: $(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4+(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 4+2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1=\dfrac{2}{m-1} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1+\sqrt{2}$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2\ (C)$. Xét hai điểm $A(a;y_A)$ và $B(b;y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua. Phương trình của đường thẳng AB là

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y-8=0$. **C.** $x-3y+4=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A\left(a;\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right)$ và $B\left(b;\frac{1}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2+2\right)$ với $a\neq b$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

Ta có $f'(a)=f'(b)\Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2-3a=\frac{3}{2}b^2-3b\Leftrightarrow a^2-b^2=2(a-b)\Leftrightarrow a+b=2$.

Gọi $I\left(\frac{a+b}{2};\frac{1}{4}(a^3+b^3)-\frac{3}{4}(a^2+b^2)+2\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Với $a+b=2$ ta có $I\left(1;\frac{8-6ab}{4}-\frac{3(4-2ab)}{4}+2\right)$ hay $I(1;1)$.

Lại có $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\frac{1}{2}(b^3-a^3)-\frac{3}{2}(b^2-a^2)\right)$ cùng phương với $\vec{u}\left(2;(a^2+b^2+ab)-3(a+b)\right)$.

Hay $\vec{u}(2;-2-ab)$. Nên đường thẳng AB có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2+ab;2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $(2+ab)(x-1)+2(y-1)=0$.

Do đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$ nên $4(2+ab)+4=0 \Leftrightarrow 4ab+12=0\Leftrightarrow ab=-3$.

Thay $ab=-3$ vào phương trình AB ta được: $x-2y+1=0$.

Cách 2 – trắc nghiệm: Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2\ (C)$ có điểm uốn là $I(1;1)$.

Do đó đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$ và $I(1;1)$ có phương trình là $x-2y+1=0$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

A. 2020. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}, x\neq 1$.

Phương trình đường tiếp tuyến tại điểm x_0: $y=\dfrac{-3}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến tại điểm $A\left(0;a\right)$ là: $a=\dfrac{3x_0+\left(x_0+2\right)\left(x_0-1\right)}{\left(x_0-1\right)^2}$ $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

$\Rightarrow (a-1){x_0}^2-2(a+2)x_0+a+2=0$ $\quad(1)$.

Để từ điểm A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta'>0 \Rightarrow \left(a+2\right)^2-\left(a-1\right)\left(a+2\right)>0 \Rightarrow a>-2$.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(a+2)}{a-1} \\ x_1x_2=\dfrac{a+2}{a-1} \end{cases}$.

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía trục hoành thì: $y(x_1)y(x_2)<0$

$\Rightarrow \dfrac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0 \Rightarrow \dfrac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Rightarrow \dfrac{9a+6}{-3}<0 \Leftrightarrow a>\dfrac{-2}{3}$

Mà $a\in\left[-2018;2018\right]$; $a\in\mathbb{Z} \Rightarrow a\in\left[0;2018\right]$.

VÍ DỤ 4: Cho parabol $\left(P\right)$: $y=x^2-2px+q$. Biết rằng qua $A\left(2;1\right)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến $\left(P\right)$ và tập hợp tất cả các điểm $M\left(p;q\right)$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\le 0$. Biểu thức $T=3a-2b^2+c$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2x-2p$.

Gọi $M\left(x_0;{x_0}^2-2px_0+q\right)$ là tiếp điểm, tiếp tuyến với $\left(P\right)$ tại M có phương trình:

$y=\left(2x_0-2p\right)\left(x-x_0\right)+x_0^2-2px_0+q \Leftrightarrow x_0^2-2xx_0+2px-q+y=0$.

Tiếp tuyến đi qua $A\left(2;1\right)$ nên: $x_0^2-4x_0+4p-q+1=0$ $\left(1\right)$.

Vì qua $A\left(2;1\right)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến $\left(P\right)$ nên phương trình $\left(1\right)$ luôn có nghiệm.

Do đó: $\Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 4p-q-3\le 0$ $\left(2\right)$.

$M\left(p;q\right)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\le 0$ nên $ap+bq+c\le 0$ $\left(3\right)$.

Từ $\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra $\dfrac{a}{4}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{-3}=m$, điều kiện: $\left(m>0\right) \Rightarrow \begin{cases} a=4m \\ b=-m \\ c=-3m \end{cases}$

$\Rightarrow T=-2m^2+9m=\dfrac{81}{8}-2\left(m-\dfrac{9}{4}\right)^2\le \dfrac{81}{8}$.

Vậy T không thể nhận giá trị bằng 11 nên ta chọn đáp án **C.**

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$ tiếp xúc với Ox.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-m\right)\left(x+m-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=4-m\end{array}\right.$.

Suy ra $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=m\\f\left(x\right)=4-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-4x+4m-m^2=m & (1)\\x^2-4x+4m-m^2=4-m & (2)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Nếu $m=4-m\Leftrightarrow m=2$.

Từ $(1);(2)$ suy ra $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-4x+2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{2}\\x=2+\sqrt{2}\end{array}\right.$. Hai nghiệm này là hai nghiệm kép của phương trình $g\left(x\right)=0$ nên đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ tiếp xúc với Ox.

Trường hợp 2: Nếu $m\neq 4-m\Leftrightarrow m\neq 2$.Khi đó $(1);(2)$ không có nghiệm chung.

Để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ tiếp xúc với $Ox\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm kép hoặc (2) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m^2-3m+4=0 & (VN)\\m^2-5m+8=0 & (VN)\end{array}\right.$. Tức không có giá trị nào của m thỏa mãn trong trường hợp này.

Vây $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+2\left(C\right)$. Và $A(a\,;-2)$. Từ A kẻ được ít nhất hai tiếp tuyến đến đồ thị $\left(C\right)$. Gọi S là tập các hợp các giá trị của a để tổng các hệ số góc bằng 9. Tính tổng các phần tử trong S.

A. $2\sqrt{6}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng qua $A(a\,;-2)$ và có hệ số góc là k.

Đường thẳng Δ có phương trình: $y=k(x-a)-2$.

Vì Δ là tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ nên hệ sau có nghiệm: $\left\{\begin{array}{l}x^3-3x^2+2=k\left(x-a\right)-2\\k=3x^2-6x\end{array}\right.$.

Suy ra $x^3-3x^2+2=\left(3x^2-6x\right)\left(x-a\right)-2\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)=\left(x-2\right)3x\left(x-a\right)$

$\left[\begin{array}{ll}x=2 & \\2x^2-\left(3a-1\right)x+2=0 & (*)\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow 9a^2-6a-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{5}{3}\\a=-1\end{array}\right.$.

Với $a=\frac{5}{3}$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=1$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=1$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.1^2-6.1\right)=-3$ (không thỏa mãn).

Với $a=-1$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-1$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-1$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.(-1)^2+6.1\right)=9$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2**:** Phương trình $(*)$ có nghiệm bằng 2 khi $a=2$ khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là $x=2$ hoặc $x=\frac{1}{2}$

Với $a=2$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=\frac{1}{2}$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=\frac{1}{2}$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^2-6.\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$ (không tm).

Trường hợp 3**:** Phương trình $(*)$ có nghiệm khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2-6a-15>0 \\ a\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\frac{5}{3} \\ a<-1 \end{array}\right. \\ a\neq 2 \end{cases} \ (**).$$

Khi đó có ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1;x_2$ và $x=2$ với $x_1;x_2$ là nghiệm phương trình $(*)$, có tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1;x_2$ và $x=2$ là:

$$3{x_1}^2-6x_1+3{x_2}^2-6x_2=9 \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-6x_1x_2=9$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2-6\left(\frac{3a-1}{2}\right)-6=9 \Leftrightarrow 27a^2-54a-45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3+2\sqrt{6}}{3} \\ a=\frac{3-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (**) ta có $a=\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

VÍ DỤ 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^4-\frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=8(x_1-x_2)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $A\left(a;\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $d: y=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4-\frac{28}{3}x^2=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-14\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-14=0(1) \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ 6a^2-14\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)\backslash\left\{\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Theo đề bài: $y_1-y_2=8\left(x_1-x_2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)\left(x_1-x_2\right)=8\left(x_1-x_2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 \\ a=-2 \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện: $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-2 \end{array}\right.$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.