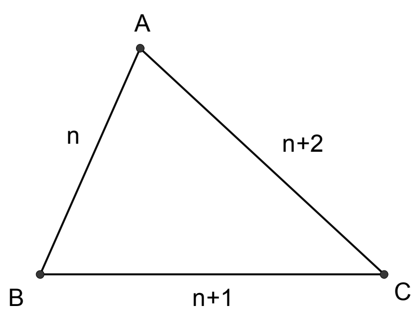
VÀI ĐIỀU THÚ VỊ
VỀ MỘT LOẠI TAM GIÁC ĐẶC BIỆT

Ta quy ước gọi một tam giác có độ dài các cạnh là các số tự nhiên liên tiếp là "tam giác đẹp" và nếu cạnh nhỏ nhất của tam giác là n, $n \in \mathbb{N}$ *thì đó là "tam giác đẹp" thứ n.*
Ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của tam giác loại này.

I) Các tính chất cơ bản

Dưới đây ta xét tam giác ABC là "tam giác đẹp" thứ n có AB < BC < CA.
Ta thấy nếu n = 1 thì độ dài các cạnh không thỏa bất đẳng thức tam giác nên chỉ xét n > 1.



1) <u>Tính chất 1:</u>

- *Với n = 2, ta có tam giác ABC tù và đây là "tam giác đẹp" tù duy nhất.*
- *Với n = 3, ta có tam giác ABC vuông và đây là "tam giác đẹp" vuông duy nhất.*
- *Với n > 3, ta có tam giác ABC nhọn.*

* <u>Chứng minh:</u>
Ta thấy trong tam giác ABC, B là góc lớn nhất.
Ta có các kết quả quen thuộc sau:

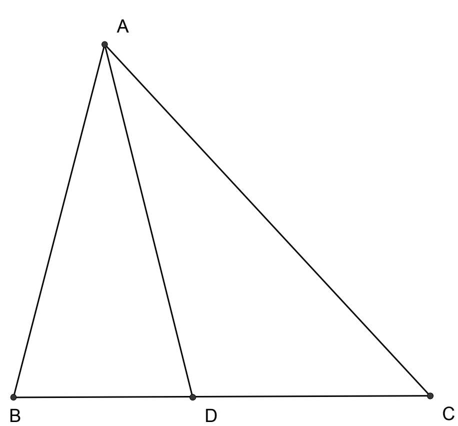
Với B là góc lớn nhất, ta đặt :

$t = AB^2 + BC^2 - AC^2 = n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2 = n^2 - 2n - 3 = (n-1)^2 - 4$ thì :

- Tam giác ABC tù tại B khi $t < 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 < 4 \Leftrightarrow n-1 < 2 \Leftrightarrow n < 3 \Rightarrow n = 2$
- Nếu thì tam giác vuông tại B khi $t = 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 4 \Leftrightarrow n = 3$
- Nếu thì ABC là tam giác nhọn khi $t > 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 > 4 \Leftrightarrow n-1 > 2 \Leftrightarrow n > 3$.

2) <u>Tính chất 2</u>:

Trong "tam giác đẹp" ABC phân giác AD chia đoạn BC thành hai đoạn có độ dài bằng nửa các cạnh AB, AC.



* Chứng minh: Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DB+DC} = \frac{AB}{AB+AC}$$

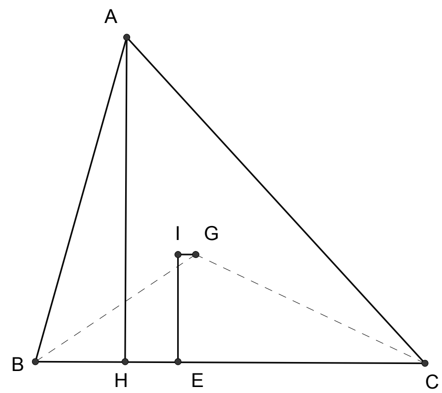
$$\Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \frac{DB}{n+1} = \frac{AB}{2n+2} \Rightarrow DB = \frac{AB}{2}$$

Tương tự, ta cũng có: $CD = \frac{AC}{2}$.

Đây chính là đpcm.

3) <u>Tính chất 3:</u>

Trong "tam giác đẹp" ABC, đoạn thẳng nối trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I song song với BC.



* <u>Chứng minh</u>: Gọi H, E lần lượt là hình chiếu của A và I lên đoạn BC, rõ ràng IE chính là bán kính đường tròn nội tiếp. Ta thấy:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AE(AB + BC + CA)$

$\Leftrightarrow AH.(n+1) = AE(n + n + 1 + n + 2)$

$\Leftrightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{n+1}{3n+3} = \frac{1}{3}$

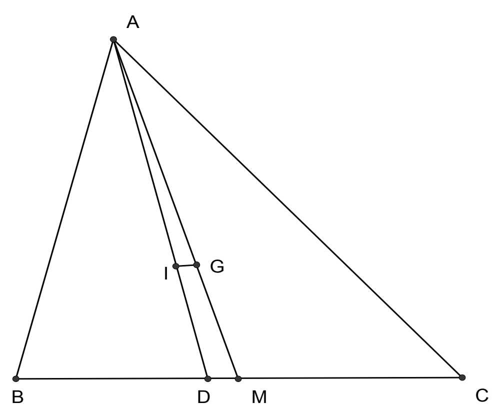
Suy ra khoảng cách từ I đến BC bằng $\frac{1}{3}AH$.

Mặt khác: vì G là trọng tâm tam giác nên: $S_{GAB} = S_{GBC} = S_{GCA} \Rightarrow \frac{S_{GBC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$;

do đó, G cũng cách BC một khoảng bằng $\frac{1}{3}AH$. Từ hai điều này, ta được IG// BC.

4) <u>Tính chất 4:</u>

Đoạn IG có độ dài không đổi.



* <u>Chứng minh:</u> Theo tính chất 2 thì: $BD = \frac{n}{2}$, mà $BM = \frac{n+1}{2}$ nên: $DM = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$.

Theo tính chất 3, đoạn IG song song với DM nên theo định lí Thales:

$\frac{IG}{DM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, tức là IG có độ dài không đổi.

Đây chính là đpcm.

5) <u>Tính chất 5:</u>

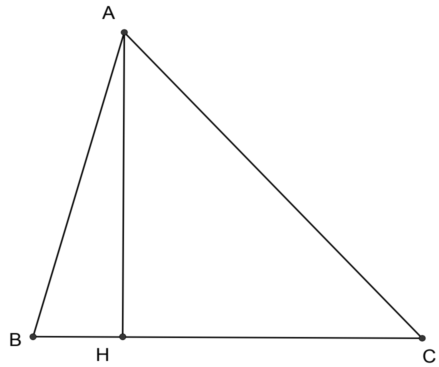
Nếu H là chân đường cao kẻ từ A xuống BC thì HC – HB không đổi.

*<u>Chứng minh:</u>

Do các tam giác ABH và ACH đều vuông ở H nên theo định lí Pythagore, ta có:

$AC^2 = HC^2 + AH^2$, $AB^2 = HB^2 + AH^2$.

Suy ra:



$$AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$$
$$\Leftrightarrow AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2$$
$$\Leftrightarrow (n+2)^2 - n^2 = (HC+HB)(HC-HB)$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 - n^2 = BC(HC-HB)$$
$$\Leftrightarrow 4(n+1) = (n+1)(HC-HB)$$
$$\Leftrightarrow HC - HB = 4$$

Ta có đpcm.

6) <u>Tính chất 6</u>:

Gọi H, D, M là chân đường cao , phân giác, trung tuyến ứng với đỉnh A của tam giác ABC và E là tiếp điểm đường tròn nội tiếp lên cạnh BC.
Chứng minh khoảng cách giữa các điểm này không đổi.

* <u>Chứng minh:</u> Do E tiếp điểm đường tròn nội tiếp lên cạnh BC nên:

$CE = \dfrac{CA + CB - AB}{2} = \dfrac{n+3}{2}$. Từ tính chất 5, ta tính được:

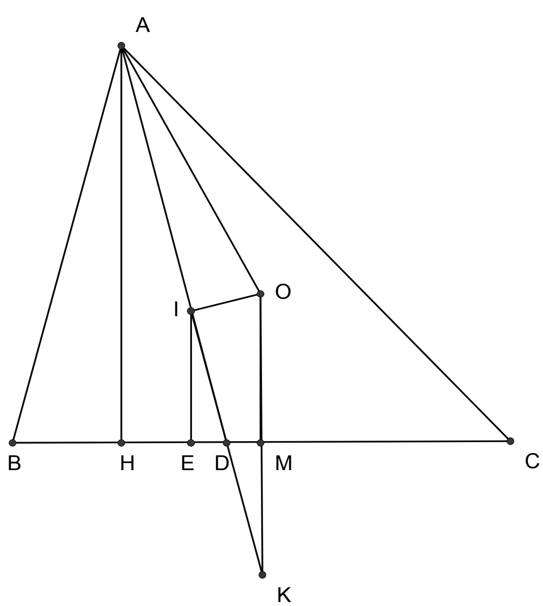
$HC = \dfrac{1}{2}\left[(HC-HB) + (HC+HB)\right] = \dfrac{n+5}{2}$, mà $CD = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{n+2}{2}$ nên ta tính đượ;c

$$HE = HC - EC = 1, HM = HC - MC = 2, HD = HC - EC = \frac{3}{2},$$

tức là khoảng cách giữa các điểm H, D, M, E không đổi (đpcm).

7) <u>Tính chất 7:</u>

Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.
Chứng minh tam giác AIO vuông tại I.



* <u>Chứng minh:</u> Gọi H, D, M lần lượt là chân đường cao , phân giác và trung tuyến ứng với đỉnh A của tam giác ABC. E là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên BC. Giả sử AD cắt OM tại K. Ta thấy:

$\widehat{HAB} = \widehat{OAC} = 90^0 - \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$, mà AI là phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAC}$ nên: $\widehat{IAH} = \widehat{IAO}$.

Mặt khác: AH//OK nên: $\widehat{IAH} = \widehat{IKO}$, do đó: $\widehat{IAO} = \widehat{IKO}$ hay tam giác AOK cân tại O.

Ta dễ dàng tính được:

DE = DM = 1 nên: DI = DK hay IK = 2ID.

Đồng thời, theo định lí Thales:

$\frac{DA}{DI}=\frac{HA}{IE}=3 \Rightarrow \frac{AI}{DI}=2 \Rightarrow AI=2DI$.

Do đó: AI = IK hay I là trung điểm của đoạn AK, suy ra: OI là trung tuyến của tam giác cân AOK $\Rightarrow$ OI cũng là đường cao của tam giác AOK.
Vậy tam giác AOI vuông tại I (đpcm).

II) Vấn đề diện tích nguyên của "tam giác đẹp"

Trước hết, ta sẽ tính diện tích của tam giác ABC theo n. Từ tính chất 4, ta có thể tính được : $HC=\frac{1}{2}\left[(HC-HB)+(HC+HB)\right]=\frac{1}{2}(4+n+1)=\frac{n+5}{2}$. Từ đó, ta có:

$$AH^2=AC^2-HC^2=(n+2)^2-\left(\frac{n+5}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(n+1)^2-3 \Rightarrow AH=\frac{1}{2}\sqrt{3(n+1)^2-12}$$

Do đó, diện tích của tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{4}(n+1)\sqrt{3(n+1)^2-12}$.

Để diện tích này là số nguyên, trước hết ta sẽ tìm các giá trị n sao cho vì biểu thức $\sqrt{3(n+1)^2-12}$ nhận giá trị nguyên (vì biểu thức này không thể nhận giá trị hữu tỉ được).
Đặt $m=\sqrt{3(n+1)^2-12} \Rightarrow m^2=3(n+1)^2-12$, suy ra: $m \vdots 3$, đặt $m=3k, k \in \mathbb{Z}$.

Ta được: $9k^2=3(n+1)^2-12 \Leftrightarrow 3k^2=(n+1)^2-4$.

Suy ra: k và n+1 có cùng tính chẵn lẻ; nhưng chúng không thể cùng lẻ vì khi đó:
$S_{ABC}=\frac{1}{4}(n+1)\sqrt{3(n+1)^2-12} \notin \mathbb{Z}$.

Do đó, k và n+1 cùng chẵn, đặt $n+1=2x, k=2y;\ \ x,y \in \mathbb{Z}, x \geq 2$, thay vào đẳng thức trên, ta được: $3(2x)^2=(2y)^2-4 \Leftrightarrow x^2-3y^2=1$ (*).

Rõ ràng, $(x;y)=(2,1)$ là nghiệm dương nhỏ nhất của (*). Giả sử (x; y) là một nghiệm của (*), khi đó:
$(2x+3y)^2-(x+2y)^2=(4x^2+12xy+9y^2)-3(x^2+4xy+4y^2)=x^2-3y^2=1$
nên (2x + 3y; x + 2y) là nghiệm của (*); khi đó, các nghiệm của (*) sẽ lập thành một dãy như sau: (2;1), (7; 4), (26; 15),…Ta sẽ chứng minh rằng ngoài các nghiệm này, (*) không còn nghiệm nào khác.

Thật vậy: giả sử tồn tại một nghiệm (x'; y') của (*) không thuộc dãy trên. Khi đó:

$(2x'-3y')^2-(x'-2y')^2=(4x'^2-12x'y'+9y'^2)-3(x'^2-4x'y'+4y'^2)=x'^2-3y'^2=1$ nên $(x'_1;y'_1)=(2x'-3y';\ x'-2y')$ cũng là nghiệm của (*). Dễ thấy: x' < 3y' nên $x_1'<x';\ y_1'<y'$.
Tiếp tục quá trình này, đến một lúc nào đó sẽ có 1 cặp $(x'_s;y'_s)$ là nghiệm của (*) mà $y'_s<2$ hay $y'_s=1$, nghĩa là các nghiệm này trùng với các nghiệm đã nêu.
Mâu thuẫn này suy ra đpcm.
Vậy S_{ABC} nguyên khi và chỉ khi n thỏa mãn: $n=2x-1$ với x được xác định như trên.

Các giá trị của n để diện tích tam giác ABC nguyên lần lượt là: 3, 13, 51,...ứng với diện tích các tam giác là 6, 84, 1170,...

III) Các bài tập liên quan

1) *Cho tam giác ABC có AB = 2, BC = 3, CA = 4. Trên đoạn thẳng CA lấy điểm D sao cho CD = CB.*

a/ Chứng minh rằng: tam giác ABC đồng dạng với ADB.

b/ Chứng minh rằng: $\angle ABC=\angle A+2\angle C$.

2) *Cho tam giác ABC có đoạn thẳng nối trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp song song với một cạnh của tam giác. Chứng minh rằng ABC là "tam giác đẹp".*

3) *Cho ABC là "tam giác đẹp" có diện tích bằng S là một số nguyên.*

Chứng minh: S là số chẵn.

4) *Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của "tam giác đẹp" thứ n và chứng minh rằng không tồn tại "tam giác đẹp" có bán kính đường tròn ngoại tiếp là số nguyên.*

5) *Cho tam giác ABC là "tam giác đẹp" có AB < BC < CA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC và AD là phân giác của tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

a/ $IB\perp DM$, $IC\perp DN$.

b/ Đường tròn đường kính ID cắt các đoạn DM, DN tại trung điểm của chúng.

c/ Giả sử IB cắt DN tại E, IC cắt DM tại F.

Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.