ĐỀ 85

SỞ GD VÀ ĐT TỈNH TIỀN GIANG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NĂM 2023-2024

Bài 1. (5 điểm):

1. Cho biểu thức : $P\left(x\right)=¿\left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{x-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$ với $x>0$, $x\neq 1$

a) Chứng minh P = $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

b) Tính giá trị S = P(1) + P(2) + … + P(2021)

2. Giải phương trình $x+¿\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{x}{4}}}=\frac{9}{4}$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y}=3 \\ x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=3 \end{cases}$

Bài 2. (5 điểm):

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng $y=2mx+3$

a. Chứng minh (d) luôn đi qua điểm cố định với mọi m

b. Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A$(x_1;y_1)$;B$(x_2;y_2)$ thỏa mãn $y_1-4y_2=x_1-4x_2+3x_1x_2$

2. Với hai số $a>1$, $b>1$. Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{a-1}}\geq 2$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của Q = $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$

Bài 3. (3 điểm):

1. Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là số chính phương

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c sao cho $7a+2b-5c$ chia hết cho 11. Chứng minh rằng $3a-7b+c$ cũng chia hết cho 11.

Bài 4. (2 điểm):

Một bài kiểm tra Toán có 20 câu hỏi. Nếu học sinh làm đúng một câu thì được 5 điểm, làm sai một câu bị trừ 1 điểm và không làm câu nào thì không có điểm. Biết rằng bạn An không làm được một số câu và số điểm đạt được là 58. Hỏi An làm bao nhiêu câu đúng, bao nhiêu câu sai và không làm bao nhiêu câu?

Bài 5. (5 điểm):

Cho hình thoi ABCD có AB = AC = 2a. Đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC cắt BD tại E khác B. AE cắt CD tại M

a) Chứng minh rằng DA, DC là tiếp tuyến của (O) và tính CM theo a

b) Từ M vẽ tiếp tuyến MF đến (O) (F thuộc (O) và F thuộc (C)). DF cắt (O) tại K. Chứng minh rằng C, O, K thẳng hàng và tính DF.

c) EF cắt AD tại G và CF cắt AE tại H. Chứng minh rằng tứ giác AGFH nội tiếp trong mội đường tròn và GH ⊥ BD.

--------- HẾT ---------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (5 điểm):

1. Cho biểu thức : $P(x)=¿\left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{x-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$ với $x>0$, $x\neq 1$

a) Chứng minh P = $\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

b) Tính giá trị S = P(1) + P(2) + … + P(2021)

Lời giải

a) $P(x)=¿\left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}+\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}-1+2(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}-1+2(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

b) S = P(1) + P(2) + … + P(2021)

$$=\frac{2}{\sqrt{1}}-\frac{2}{\sqrt{1+1}}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2+1}}+...+\frac{2}{\sqrt{2021}}-\frac{2}{\sqrt{2021+1}}$$

$$=\frac{2}{1}-\frac{2}{\sqrt{2022}}=\frac{2\sqrt{2022}-2}{\sqrt{2022}}$$

2. Giải phương trình $x+¿\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{x}{4}}}=\frac{9}{4}$

Lời giải

Điều kiện xác định $x\geq\frac{-1}{4}$

$$x+¿\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{x}{4}}}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow x+¿\sqrt{x+\frac{1}{4}+2\sqrt{x+\frac{1}{4}}.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow x+¿\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$ (vì $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (vì $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ (nhận)

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{3}{4}$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y}=3 \\ x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=3 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $y \neq 0$

$$\begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y}=3 \\ x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{x}{y}=3(1) \\ \left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}=3(2) \end{cases}$$

Vế cộng vế ta được:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{y}\right)-6=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{y}+3\right)\left(x+\frac{1}{y}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{y}=-3 \\ x+\frac{1}{y}=2 \end{array}\right.$$

TH1: $x+\frac{1}{y}=-3$ thay vào (2) ta được $\frac{x}{y} = 6 \Leftrightarrow x=6y$

Với $x=6y$ thay vào $x+\frac{1}{y}=-3$ ta được: $6y + \frac{1}{y}$ ¿-3

$\Leftrightarrow 6y^2+3y+1=0$

$\Delta = 3^2-4.6.1=-15<0$ (phương trình vô nghiệm)

TH2: $x+\frac{1}{y}=2$ thay vào (2) ta được $\frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x=y$

Với $x=y$ thay vào $x+\frac{1}{y}=2$ ta được: $y + \frac{1}{y}$ ¿2

$\Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=$¿$1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất *x* = *y* = *1*

Bài 2. (5 điểm):

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng $y=2mx+3$

a) Chứng minh (d) luôn đi qua điểm cố định với mọi m

b) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A$(x_1; y_1)$;B$(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1-4y_2=x_1-4x_2+3x_1x_2$

Lời giải

a) Gọi M$(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua

Ta có: M$(x_0; y_0) \in$ (d) $\Rightarrow y_0=2mx_0+3 \Leftrightarrow 2mx_0+(3-y_0)=0\ \forall$m

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0=0 \\ 3-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=3 \end{cases} \Rightarrow$ M(0;3)

Vậy (d) luôn đi qua điểm cố định M(0;3) với mọi m

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2=2mx+3$

$\Leftrightarrow x^2-2mx-3=0$ (*)

Ta có: $\Delta' = m^2+3>0\ \forall m\in R$nên phương trình (*) luôn có nghiệm phân biệt với mọi m

Vậy (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A$(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

Áp dụng VIET: $\begin{cases} S=x_1+x_2=2m \\ P=x_1.x_2=-3 \end{cases}$

A$(x_1; y_1)\in (d) \Leftrightarrow y_1=2mx_1+3;$ B$(x_2; y_2)\in (d) \Leftrightarrow y_2=2mx_2+3$

Theo đề bài ta có:

$y_1-4y_2=x_1-4x_2+3x_1x_2$

$\Rightarrow 2mx_1+3-4(2mx_2+3)=x_1-4x_2+3(-3)$

$\Leftrightarrow 2mx_1+3-8mx_2-12-x_1+4x_2+9=0$

$\Leftrightarrow (2m-1)x_1-4(2m-1)x_2=0$

$\Leftrightarrow (2m-1)(x_1-4x_2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ x_1=4x_2 \end{array}\right.$

Với $x_1=4x_2$ Thay vào P ta được: P = $4(x_2)^2=-3\,(vô\ lý).\ Vậy\ m=\frac{1}{2}$

2. Với hai số $a > 1$, $b > 1$. Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 2$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của Q = $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$

Lời giải

Ta có a > 1 nên áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được:

$a=(a-1)+1\geq 2\sqrt{(a-1).1} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 2$ (vì $\sqrt{a-1} > 0$)

Dấu "=" xảy ra khi $a-1 = 1 \Leftrightarrow a=2$

Ta có a > 1, b > 1. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được:

Q = $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}.\frac{b^2}{a-1}}$ ¿ $2.\frac{ab}{\sqrt{a-1}.\sqrt{b-1}}=2.\frac{a}{\sqrt{a-1}}.\frac{b}{\sqrt{b-1}}$

Sử dụng kết quả của ý trên ta được:

Vì $\frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 2$, $\frac{b}{\sqrt{b-1}} \geq 2$ nên Q ≥ 2.2.2 = 8

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q = 8. Dấu "=" xảy ra khi a = b = 2

Bài 3. (3 điểm):

1. Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là số chính phương

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp có dạng: n; n+1; n+2; n+3 (n ∈ N)

Đặt tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là:

A = $n.(n+1).(n+2).(n+3)+1$

Ta cần chứng minh A là 1 số chính phương.

Thật vậy:

A = $n.(n+1).(n+2).(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

A = $(n^2+3n)^2+2.(n^2+3n).1+1^2=(n^2+3n+1)^2$ ($n \in N$)

Vậy tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là số chính phương

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c sao cho $7a+2b-5c$ chia hết cho 11. Chứng minh rằng $3a-7b+c$ cũng chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có: $7a+2b-5c$ chia hết cho 11 nên $2.(7a+2b-5c)=14a+4b-10c$ chia hết cho 11

Mà $14a+4b-10c = 3a-7b+c+11a+11b-11c$

¿$(3a-7b+c)+11(a+b-c)$ chia hết cho 11

Vì $11(a+b-c) \vdots 11$ nên $3a-7b+c$ cũng chia hết cho 11 (tính chất chia hết của một tổng)

Bài 4. (2 điểm):

Một bài kiểm tra Toán có 20 câu hỏi. Nếu học sinh làm đúng một câu thì được 5 điểm, làm sai một câu bị trừ 1 điểm và không làm câu nào thì không có điểm. Biết rằng bạn An không làm được một số câu và số điểm đạt được là 58. Hỏi An làm bao nhiêu câu đúng, bao nhiêu câu sai và không làm bao nhiêu câu?

Lời giải

Gọi số câu An làm đúng, làm sai và không làm lần lượt là a, b, c ∈ N và a, b, c ≤20

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=20 \\ 5a-b=58 \ \ (1) \\ c>0 \end{cases}$$

Ta có 58 chia 5 dư 3 và 5a $\vdots$ 5 nên b chia 5 dư 2

Do b là số tự nhiên và không vượt quá 20 nên ta có các trường hợp sau:

+ TH1: b = 2$\Rightarrow 5a-2=58 \Leftrightarrow$ a = 12.

Suy ra c = 20 $-(a+b)$ = 6

+ TH2: b = 7$\Rightarrow 5a-7=58 \Leftrightarrow$ a = 13.

Suy ra c = 20 $-(a+b)$ = 0 (loại do c > 0)

+ TH3: b = 12$\Rightarrow 5a-12=58 \Leftrightarrow$ a = 14.

Suy ra c = 20 $-(a+b)$ = −¿6 (loại do c > 0)

+ TH4: b = 17$\Rightarrow 5a-17=58 \Leftrightarrow$ a = 15.

Suy ra c = 20 $-(a+b)$ = −¿12 (loại do c > 0)

Vậy a = 12; b = 2; c = 6

Vậy số bạn An làm đúng, làm sai và không làm lần lượt là 12, 2 và 6

Bài 5. (5 điểm):

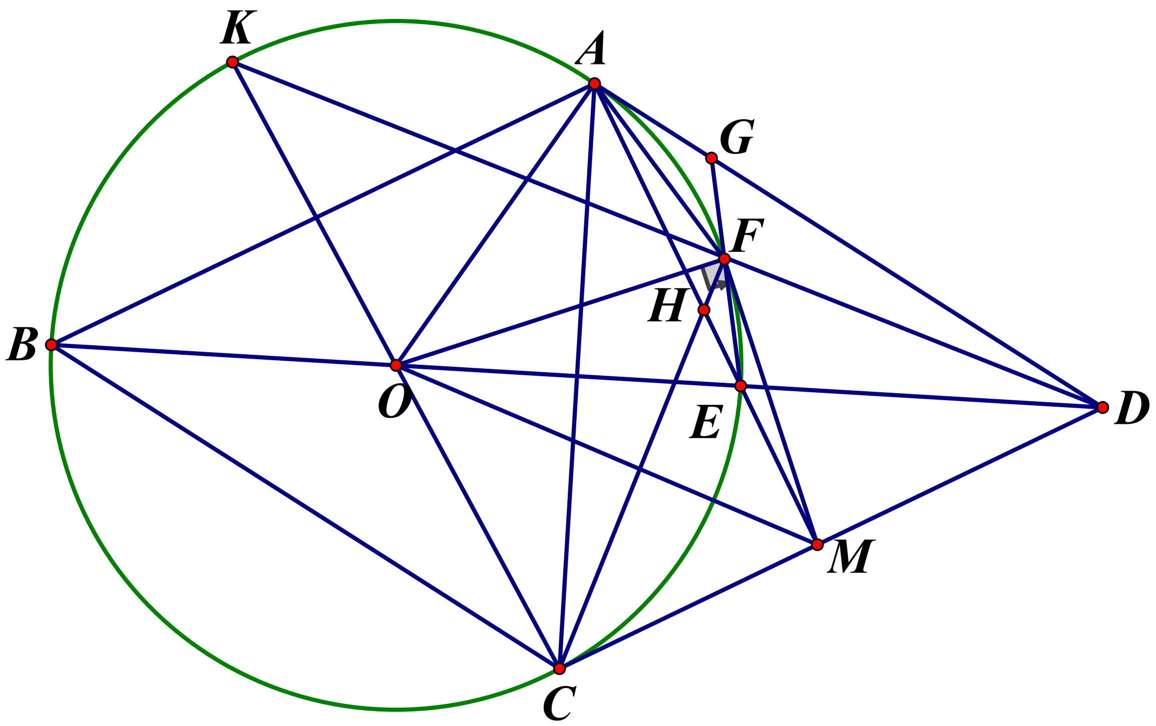
Cho hình thoi ABCD có AB = AC = 2a. Đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC cắt BD tại E khác B. AE cắt CD tại M

a) Chứng minh rằng DA, DC là tiếp tuyến của (O) và tính CM theo a

b) Từ M vẽ tiếp tuyến MF đến (O) (F thuộc (O) và F thuộc (C)). DF cắt (O) tại K. Chứng minh rằng C, O, K thẳng hàng và tính DF.

c) EF cắt AD tại G và CF cắt AE tại H. Chứng minh rằng tứ giác AGFH nội tiếp trong một đường tròn và GH ⊥ BD.

Lời giải



a) $\widehat{COA} = 2\widehat{CAB} = 2.45° = 90°$ (Cùng chắn cung AC)

Do ABCD là hình thoi và AB = AC nên hai tam giác ABC và ACD đều

Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{ABC} = 60°$ và $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} = 60°$

Do đó DA, DC là tiếp tuyến của (O)

Ta có $\triangle ABC$ đều và nội tiếp (O) có BE là đường kính nên E là điểm chính giữa cung AC.

Suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{DAE}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn 2 cung bằng nhau). Suy ra AE là tia phân giác của $\widehat{CAD}$

Do $\triangle ACD$ đều nên AE ⊥ CD hay AM ⊥ CD và M là trung điểm của CD.

Vậy CM = $\frac{1}{2}$ CD = $\frac{1}{2}$. 2a = a

b)

Ta có M là giao điểm 2 tiếp tuyến nên MF = MC

Xét tam giác CFD có M là trung điểm CD nên MF = MC = MD

Suy ra CFD vuông tại F hay $\widehat{CFD}$ = 90°

Lại có $\widehat{CFK}$ = 90 là góc nội tiếp nên CK là đường kính của (O)

Suy ra C, O, K thẳng hàng

Ta có △ABC đều có cạnh là 2a nên bán kinh đườn tròn ngoại tiếp R = $\frac{2}{3}\ \frac{2a\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra CK = $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Xét △DCK vuông tại C có DK = $\sqrt{DC^2+CK^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{21}}{3}$

Ta có DFK là cát tuyến của (O) và DC là tiếp tuyến của (O) nên DF.DK = DC^2

Suy ra DF = $\frac{DC^2}{DK} = \frac{4^2}{\frac{2a\sqrt{21}}{3}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$

c) Xét tứ giác AGFH có

$\widehat{GAH}$= $\widehat{DAE}$ = $\frac{1}{2}$ sd $\overparen{AE}$(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn cung AE)

$\widehat{HFE}$= $\widehat{CFE}$ = $\frac{1}{2}$ sd $\overparen{CE}$(góc nội tiếp chắn cung CE)

Mà E lả điểm chính giữa cung AC nên $\widehat{GAH}$= $\widehat{HFE}$

Suy ra tứ giác AGFH nội tiếp (góc ngoài bằng góc trong không kề với nó)

Do AGFH nội tiếp nên $\widehat{GHF}$ = $\widehat{GAF}$

Mà $\widehat{GAF}$= $\widehat{ACF}$(góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{GHF}$ = $\widehat{ACF}$ (2 góc đồng vị)

Suy ra GH // AC mà AC ⊥ BD nên GH ⊥ BD.

-------- HẾT ----------