

Bài 19. Phép tính lũy thừa

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8\%/$ năm. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Số tiền người đó nhận sau n năm sẽ được tính theo công thức $T_n = 100(1+r)^n$ (triệu đồng), trong đó $r(\%)$ là lãi suất và n là số năm gửi tiền.

Hỏi số tiền lãi thu được của người đó sau 10 năm là bao nhiêu?

(Các kết quả trong bài được tính chính xác đến hàng phần trăm)

Lời giải

Lời giải

$$T_{10} = 100 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{10} \approx 215,89$$

Số tiền người đó nhận sau 10 năm là: (triệu đồng).

Số tiền lãi sau 10 năm gửi tiền xấp xỉ là: $215,89 - 100 = 115,89$ (triệu đồng).

Câu 2. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5 m^3$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây lấy gỗ trong khu rừng này là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm không khai thác, khu rừng sẽ có số mét khối gỗ là bao nhiêu?

Lời giải

Lời giải

Nếu trữ lượng gỗ của khu rừng ban đầu là A thì sau năm thứ nhất, lượng gỗ có được là $A + Ar = A(1+r)$ với r là tốc độ tăng trưởng mỗi năm.

Sau năm thứ hai, lượng gỗ có được là $A(1+r) + A(1+r) \cdot r = A(1+r)^2$.

Theo phương pháp quy nạp, ta chứng minh được công thức tính lượng gỗ trong khu rừng là $T_n = A(1+r)^n$ với A là lượng gỗ ban đầu, r là tốc độ tăng trưởng mỗi năm và n là số năm tăng trưởng của rừng.

Vậy sau 5 năm, lượng gỗ trong khu rừng là:

$$T_5 = 4 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{4}{100} \right)^5 = 486661,161 (m^3)$$

$$B = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$$

Câu 3. Rút gọn biểu thức sau: với $a > 0$.

Lời giải

Lời giải

$$B = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a$$

Ta có:

Câu 4. Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \left[\frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \right] (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a},$$

với $a > 0, b > 0, a \neq b$

Lời giải

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}P &= \left[\frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \right] (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a} \\&= \left[\frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2} - \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})} \right] (\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a} \\&= \left[\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \right] \frac{1}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} + \sqrt[6]{a} \\&= -\frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \frac{1}{(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})} + \sqrt[6]{a} \\&= \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} + \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{b} - \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{b}\end{aligned}$$

$$T = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad \text{với } a > 0, b > 0.$$

Câu 5. Rút gọn biểu thức

Lời giải

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}T &= \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \\&= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2} \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

Câu 6. Cho $P = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}$ và $Q = 2\sqrt{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3}$ với x, y là các số thực khác 0. So sánh P và Q

Lời giải

Lời giải

Ta có $x^2, y^2, \sqrt[3]{x^4y^2}, \sqrt[3]{x^2y^4}$ là những số thực dương với mọi $x, y \neq 0$.

$$\begin{aligned}Q &= 2\sqrt{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3} = 2\sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} \\&= \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} + \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} \\&> \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} > \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4} + y^2} = P.\end{aligned}$$

Vậy với điều kiện trên của x, y thì $P < Q$.

$$P = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

Câu 7. Tính

khí $x = 2024, y = 2023$

Lời giải

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\
&= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)} \right] \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\
&= \left[\frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^2}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x-y)} \right] \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\
&= \frac{2(x+y)}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x-y)} \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y} \\
&= \frac{2(x-y)}{x-y} = 2 \quad (\text{không phụ thuộc vào } x, y)
\end{aligned}$$

Câu 8. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau 10 phút thì số lượng vi khuẩn A là bao nhiêu?

Lời giải**Lời giải**

Sau 3 phút, số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con nên $s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = \frac{625000}{8} = 78125$ (tức là ban đầu có 78125 con vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm).

Sau 10 phút, số lượng vi khuẩn là: $s(10) = 78125 \cdot 2^{10} = 80 \cdot 10^6$ (con).

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - 0,1^0}$.

Lời giải**Lời giải**

$$P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - 0,1^0} = \frac{2^2 + 5}{10^{-1} - 1} = -10$$

Ta có

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $P = (5 + 2\sqrt{6})^{2024} \cdot (5 - 2\sqrt{6})^{2025}$.

Lời giải**Lời giải**

Ta có: $(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 25 - 24 = 1$.

Do đó:

$$P = (5 + 2\sqrt{6})^{2024} \cdot (5 - 2\sqrt{6})^{2025} = [(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})]^{2024} \cdot (5 - 2\sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} \quad (a > 0, b > 0)$$

Câu 11. Rút gọn biểu thức sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a})^2 + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} - (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) = -\sqrt[4]{b} \\ Q &= \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

Câu 12. Rút gọn biểu thức sau:

Lời giải

Lời giải

$$\left\{ \begin{aligned} a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}} &= a^{\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}} = a^3 \\ (a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2} &= a^{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = a^{-2} \Rightarrow Q = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5 \end{aligned} \right.$$

Ta có:

$$K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{-1} \quad (x > 0, y > 0)$$

Câu 13. Rút gọn biểu thức sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn } \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \\ \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{-1} &= \left[\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 \right)^2 \right]^{-1} = \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right)^2 \\ K &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right)^2 = x. \end{aligned}$$

Vậy

Câu 14. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$, tính giá trị biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

Lời giải

Lời giải

Đặt $P = 2^x + 2^{-x} \Rightarrow P > 0$.

Ta có $P^2 = (2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 23 + 2 = 25$

Do đó $P = 5$.

Câu 15. Giả sử số tiền gốc là A , lãi suất là $r\%$ / kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm) thì tổng số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$. Bà Hạnh gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8% / năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải

Lời giải

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau 10 năm số tiền cả gốc và lãi bà Hạnh thu về là : $A(1+r)^n = 100(1+0,08)^{10} \approx 215,892$ triệu đồng.

Suy ra số tiền lãi bà Hạnh thu về sau 10 năm là $215,892 - 100 = 115,892$ triệu đồng.

Câu 16. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

Lời giải

Lời giải

Ta có: $s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{8} = 78,125$ nghìn con.

Do đó $s(t) = 10$ triệu con $= 10000$ nghìn con khi:

$$10000 = s(0) \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = \frac{10000}{78,125} = 128 = 2^7 \Rightarrow t = 7 \text{ phút.}$$

Câu 17. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2025) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - n^2$.

Lời giải

Lời giải

Đặt $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$

Với $x > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + x^2 \cdot (x+1)^2}}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{(x^2 + x + 1)^2}}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Suy ra $g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(2025)$

$$= \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right) = 2026 - \frac{1}{2026}$$

$$\text{Khi đó } f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2025) = e^{g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(2025)} = e^{2026 - \frac{1}{2026}} = e^{\frac{2026^2 - 1}{2026}} = e^{\frac{m}{n}}.$$

Do đó $m = 2026^2 - 1, n = 2026$

$$\text{Vậy } m - n^2 = 2026^2 - 1 - 2026^2 = -1.$$

Câu 18. Biết $10^\alpha = 3; 10^\beta = 7$. Tính $A = \frac{100^\alpha \cdot 0,001^\beta}{10^{-\alpha} \cdot 10^{2\beta}}$.

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{(10^2)^\alpha \cdot (10^{-3})^\beta}{10^{-\alpha} \cdot 10^{2\beta}} = \frac{10^{2\alpha}}{10^{-\alpha}} \cdot \frac{10^{-3\beta}}{10^{2\beta}} = 10^{2\alpha - (-\alpha)} \cdot 10^{-3\beta - 2\beta} \\ &= 10^{3\alpha} \cdot 10^{-5\beta} = (10^\alpha)^3 \cdot (10^\beta)^{-5} = 3^3 \cdot 7^{-5} = \frac{3^3}{7^5} = \frac{27}{16807}. \end{aligned}$$

Câu 19. Biết $9^\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $B = (3^\alpha + 3^{-\alpha})^2 - (81^\alpha + 81^{-\alpha})$.

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= (3^\alpha)^2 + 2 \cdot 3^\alpha \cdot 3^{-\alpha} + (3^{-\alpha})^2 - (9^2)^\alpha + (9^2)^{-\alpha} \\ &= 3^{2\alpha} + 2 \cdot 3^{\alpha+(-\alpha)} + (3^2)^{-\alpha} - (9^\alpha)^2 + (9^{-\alpha})^2 \\ &= 9^\alpha + 2 \cdot 3^0 + 9^{-\alpha} - (9^\alpha)^2 + (9^{-\alpha})^2 = \frac{1}{2} + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{33}{4} \end{aligned}$$

Câu 20. Công ty FTK về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường 6 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng (các loại xe 4 chỗ không sử dụng mục đích

kinh doanh) được tính $P(t) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe, t là số năm kể từ khi đưa vào sử dụng.

Tính giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng. Biết giá trị mua xe ban đầu là 920 triệu.

Lời giải

Lời giải

Ta có: $A = 920$ triệu; $t = 2,5$ năm

Vậy giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng là:

$$P(2,5) = 920 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2,5}{4}} = 768.601.304$$

Câu 21. Số lượng vi khuẩn V trong phòng thí nghiệm tính theo công thức $s(t) = s_0 \cdot 2^t$ trong đó s_0 là số lượng vi khuẩn V lúc đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn có trong t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau 9 phút thì số lượng vi khuẩn V bao nhiêu?

Lời giải

Lời giải

Vì sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con nên: $625000 = s_0 \cdot 2^3$

Số lượng vi khuẩn V sau 9 phút là:

$$s(t) = \frac{625000}{2^3} \cdot 2^9 = 625000 \cdot 2^6 = 4 \cdot 10^7 \quad (\text{con})$$

----HẾT---