

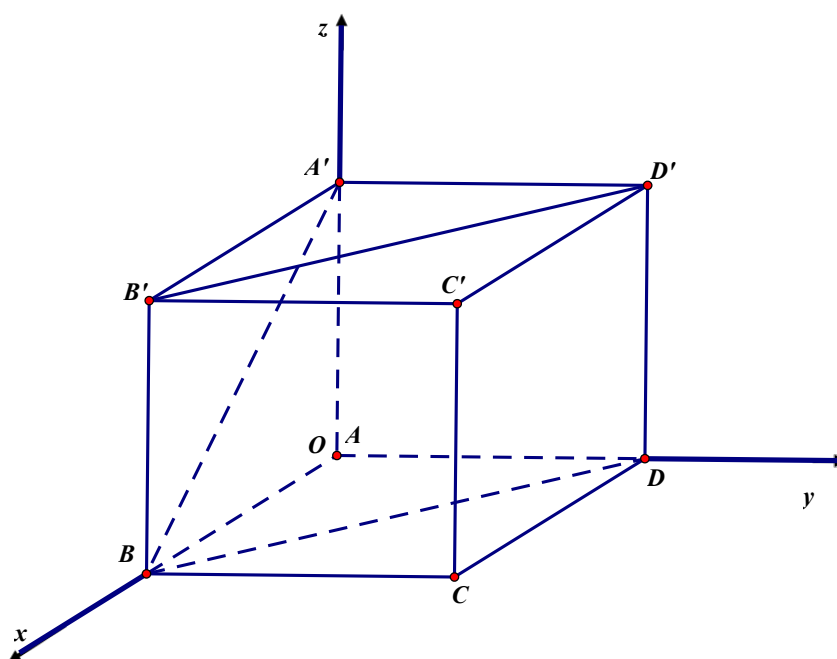
CHỦ ĐỀ 4

ỨNG DỤNG ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

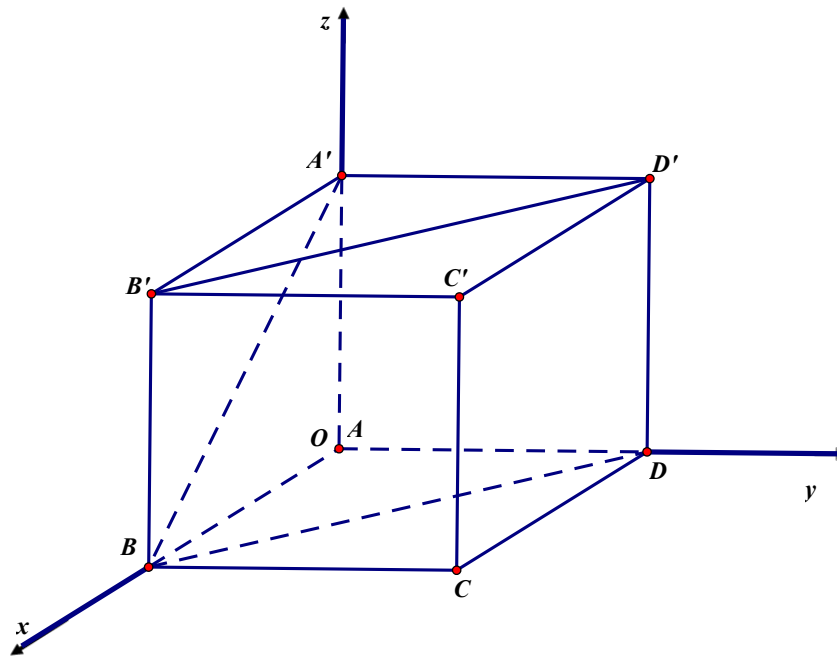
Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C. $\frac{1}{2}$.** D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



Lời giải

Chọn C



+ Từ hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

+Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\vec{OC} = (a;a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vec tơ pháp tuyến là $n = (1;1;0)$.

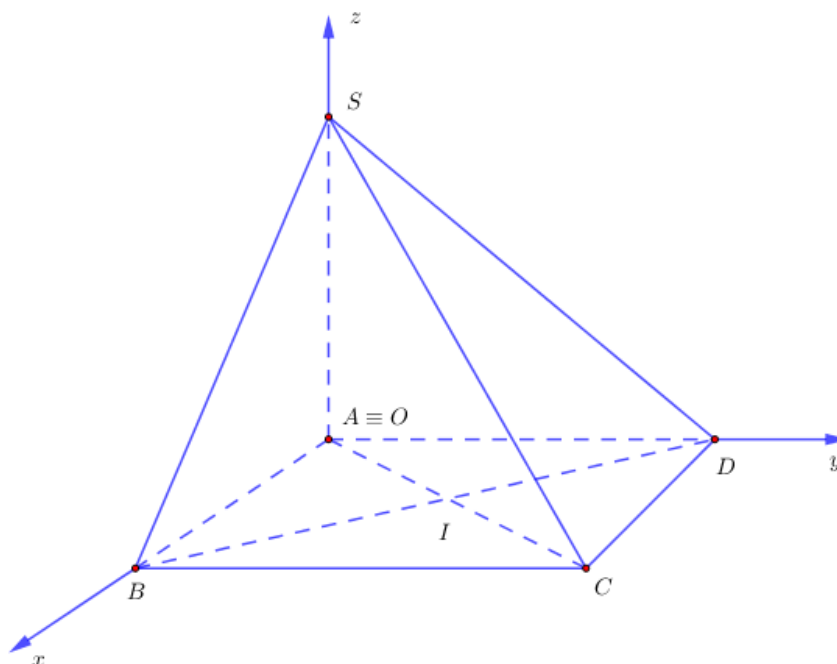
+Đường thẳng $A'B$ có vector chỉ phương là $\vec{A'B} = (a;0;-a)$ ta chọn $u = (1;0;-1)$.

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

+Ta có

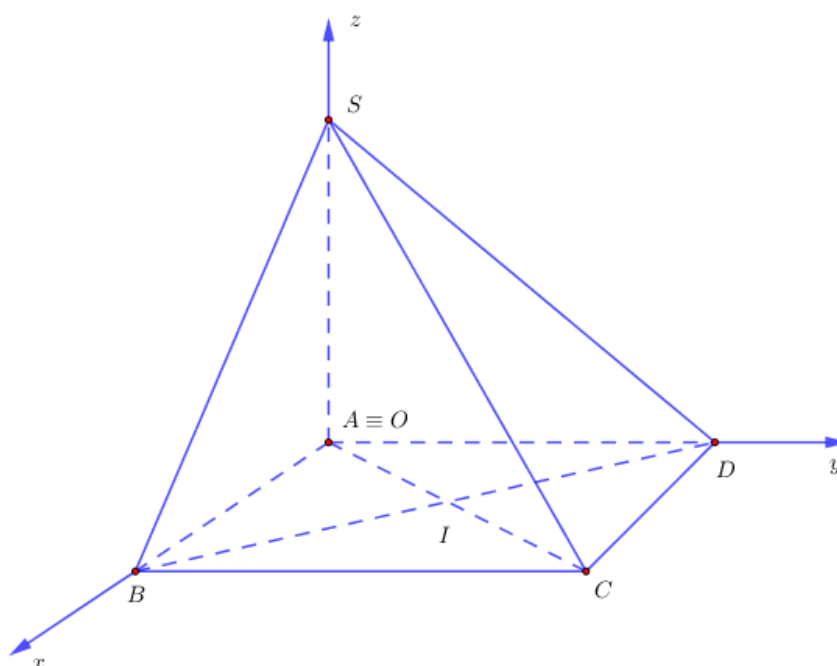
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .



Lời giải

Chọn B



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (\square SI; AI) = \square SIA$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \tan \square SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Toán 12

Khi đó $\overrightarrow{SA} = (0; 0; -a)$; $\overrightarrow{SC} = (a; a; -a)$; $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vector pháp tuyến $n_1 = (-1; 1; 0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vector pháp tuyến $n_2 = (1; 0; 1)$.

Suy ra $\cos((SAC); (SBC)) = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = 60^\circ$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ Oxyz. $O \equiv A(0; 0; 0)$; $B(1; 0; 0)$; $D(0; 1; 0)$; $C(1; 1; 0)$; $S(0; 0; 2)$

Do M là trung điểm của SD nên $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$

$\overrightarrow{BC} = (1; 1; 0)$; $\overrightarrow{SB} = (1; 0; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{SB}] = (2; 0; 1)$

$\overrightarrow{MA} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$; $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}] = \left(-1; 1; -\frac{1}{2}\right)$. VTPT của (AMC) là: $n = (2; -2; 1)$

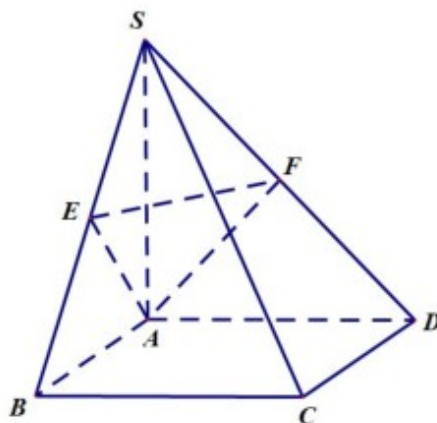
$\cos((SBC); (AMC)) = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan((SBC); (AMC)) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB , SD . Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $S \in Oz$.

$\Rightarrow B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;a)$. Khi đó $E\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $F\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AF} = \left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Vector pháp tuyến của mp (AEF) là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}] = \left(\frac{-a}{4}; \frac{-a}{4}; \frac{a}{4}\right) \Rightarrow \vec{n}_1 = (1;1;-1)$.

Vector pháp tuyến của mp $(ABCD)$ là $\vec{n}_2 = \overrightarrow{AS} = (0;0;a) \Rightarrow \vec{n}_2 = (0;0;1)$.

Vậy cosin góc giữa 2 mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.

$$\cos((AEF), (ABCD)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

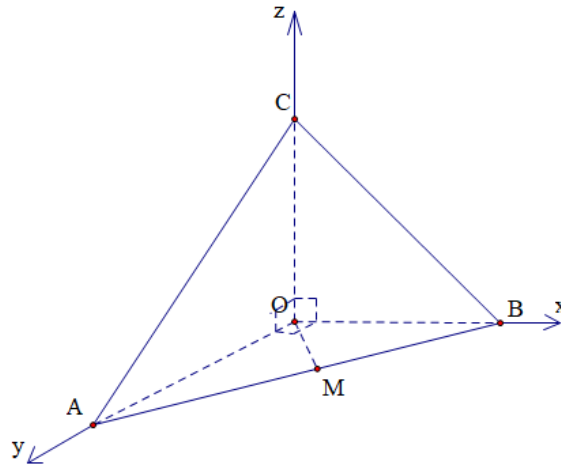
Câu 5. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc tạo bởi hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

- A. 135° . B. 150° . C. 120° . D. 60° .

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



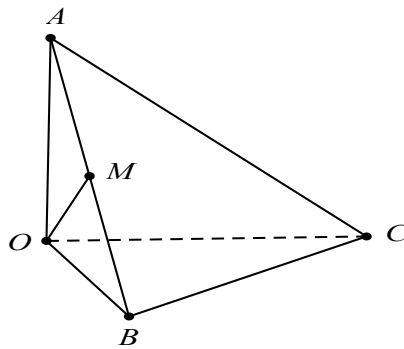
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC} = (-a;0;a)$, $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{OM}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM}) = 120^\circ$$

Cách 2:



$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}OB^2 = -\frac{a^2}{2}$$

Ta có

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{2} \text{ và } OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$$

Do đó:

Toán 12

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

- A. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

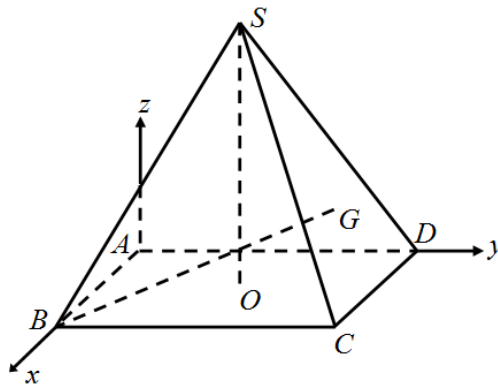
Lời giải

Chọn B

Gọi $O = AC \cap BD$.

Tam giác SAO vuông : $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Gắn tọa độ như hình vẽ



$$A(0;0;0) \quad B(a;0;0) \quad C(a;a;0) \quad D(0;a;0) \quad O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right) \quad S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$G\left(\frac{a}{2};\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$$

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên

$$\overrightarrow{AS} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{a}{2}(1; 1; \sqrt{6}) \quad \overrightarrow{BG} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{5a}{6}; \frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a}{6}(-3; 5; \sqrt{6})$$

Ta có :

Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

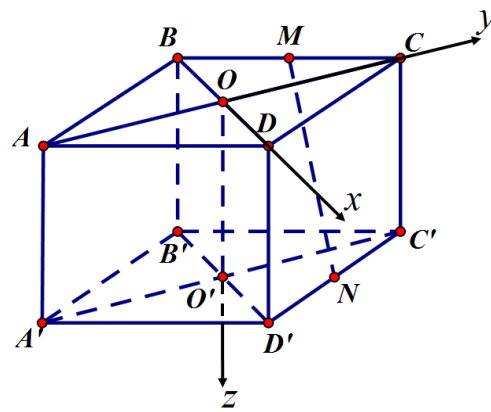
$$\cos(BG; SA) = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{BG}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{|-3+5+6|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 7. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos \alpha$ bằng:

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



* Chọn $AB = 2 \Rightarrow BD = 2; AC = 2\sqrt{3}$, đặt

$AA' = h$, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có: $D(1;0;0)$, $B(-1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $D'(1;0;h)$, $C'(0;\sqrt{3};h)$, $B'(-1;0;h)$.

$$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; h\right) \quad \overrightarrow{MN} = (1; 0; h) \quad \overrightarrow{B'D} = (2; 0; -h)$$

* Do $MN \perp B'D \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{B'D} = 0 \Leftrightarrow 2 - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1; 0; \sqrt{2})$. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} \parallel \vec{u} = \overrightarrow{MN} = (1; 0; \sqrt{2}) \quad (ABCD) \perp n = \vec{j} = (0; 0; 1)$$

* Do α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$ nên ta có:

$$\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

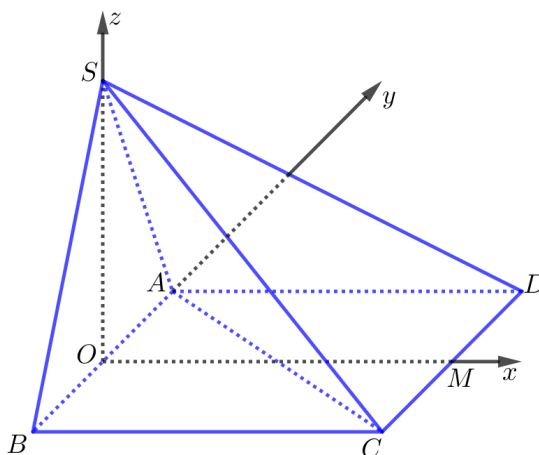
B. $\frac{\sqrt{6}}{7}$.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Chú ý: Ta có thể giải bài toán với cạnh hình vuông $a = 1$.

Gọi O, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0), M(1;0;0), A\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0;0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$$\vec{SA} = \left(0; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{AC} = (1; -1; 0), \vec{SC} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{CD} = (0; 1; 0)$$

Suy ra

Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{SA}, \vec{AC}] = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$.

Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\vec{SD}, \vec{AD}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right)$.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{7}$$

Vậy

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. 60° .

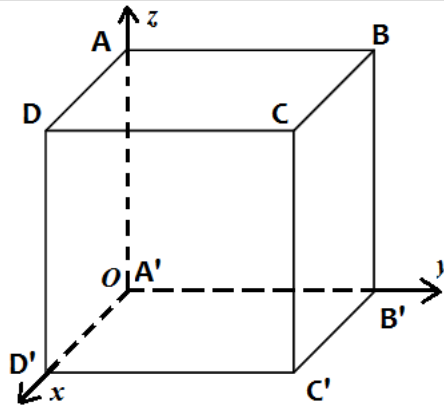
B. 30° .

C. 45° .

D. 75° .

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A', Ox \equiv A'D', Oy \equiv A'B', Oz \equiv A'A$.

Khi đó: $A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $C'(a;a;0)$,

$A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C(a;a;a)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0;a;0), \overrightarrow{A'D} = (a;0;a), \overrightarrow{A'A} = (0;0;a), \overrightarrow{A'C'} = (a;a;0).$$

$$\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D} \right] = (a^2;0;-a^2).$$

Chọn $\vec{n}_1 = (1;0;-1)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$$\left[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C} \right] = (-a^2;a^2;0).$$

Chọn $\vec{n}_2 = (-1;1;0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và

N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

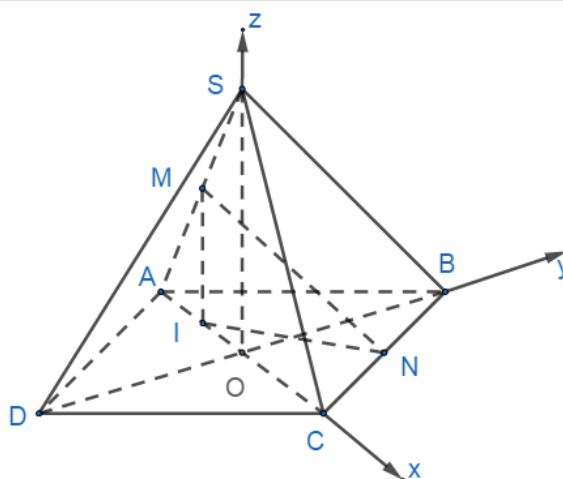
A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

Khi đó $CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét $\triangle CNI$ có: $CN = \frac{a}{2}$, $\angle NCI = 45^\circ$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Xét $\triangle MIN$ vuông tại I nên $MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $O(0;0;0)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$,
 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\vec{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $\vec{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\vec{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Vector pháp tuyến mặt phẳng (SBD) : $\vec{n} = \vec{SB} \wedge \vec{SD} = (-\sqrt{7}; 0; 0)$.

$$\sin(MN, (SBD)) = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{n}|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| -\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra

Toán 12

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

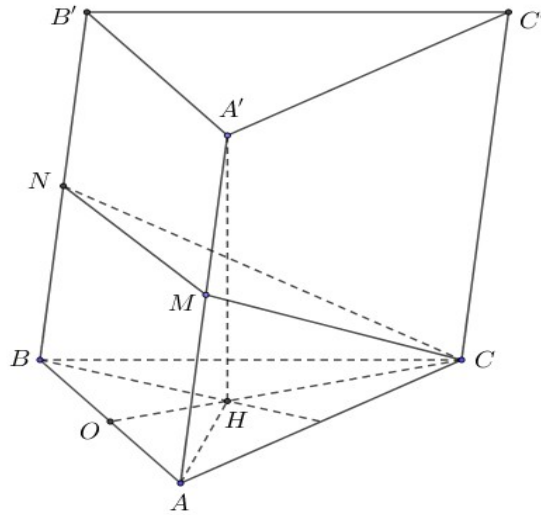
B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của AB . Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), H\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right), A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vptpt $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$.

M là trung điểm $AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 0)$, $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow (CMN)$ có vptpt $\vec{n}_2 = \left(0; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0; 2\sqrt{2}; 5)$

$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

Toán 12

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

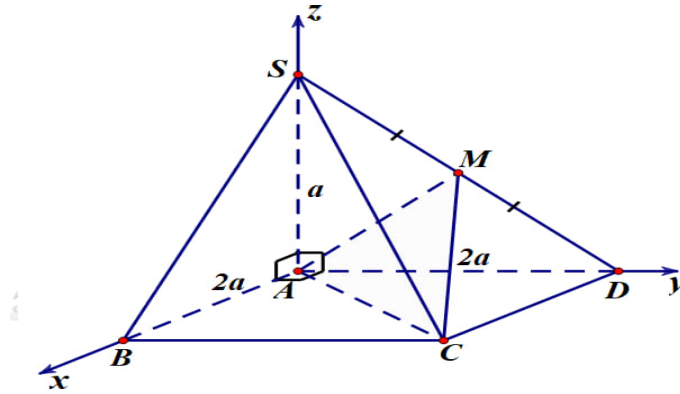
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), S(0;0;a), M\left(0;a;\frac{a}{2}\right).$$

$$\vec{SB} = (2a; 0; -a), \vec{SC} = (2a; 2a; -a), \vec{MA} = \left(0; -a; -\frac{a}{2}\right), \vec{MC} = \left(2a; a; -\frac{a}{2}\right).$$

$$\vec{n}_1 = [\vec{SB}, \vec{SC}] = (2a^2; 0; 4a^2) \text{ và } \vec{n}_2 = [\vec{MA}, \vec{MC}] = (a^2; -a^2; 2a^2).$$

Gọi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2 \cdot a^2 + 4a^2 \cdot 2a^2|}{\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2}}$$

ta có

$$= \frac{10a^4}{\sqrt{20 \cdot 6 \cdot (a^4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

$$\text{Mà } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{5}{25}. \text{ Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

Toán 12

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

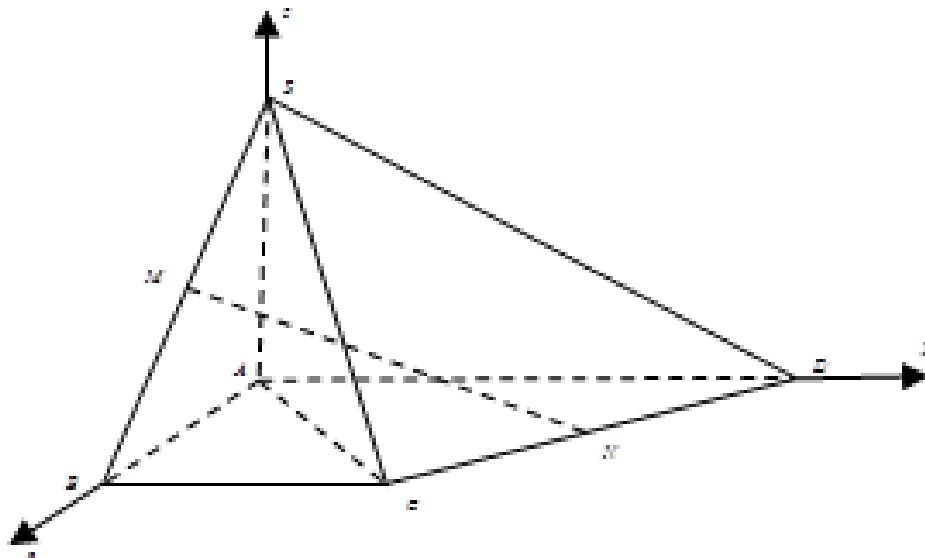
B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt không gian $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0)$, $AB \equiv Ox$, $AD \equiv Oy$, $AS \equiv Oz$.

Ta có: $S(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$.

$$M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AS} = (0;0;a), \overrightarrow{AC} = (a;a;0)$$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-a^2; a^2; 0)$ là vtp của mặt phẳng (SAC) .

$$\sin(MN; (SAC)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_{(SAC)}|}{|\overrightarrow{MN}| |\vec{n}_{(SAC)}|} = \frac{\frac{3a^3}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{a^4 + a^4}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

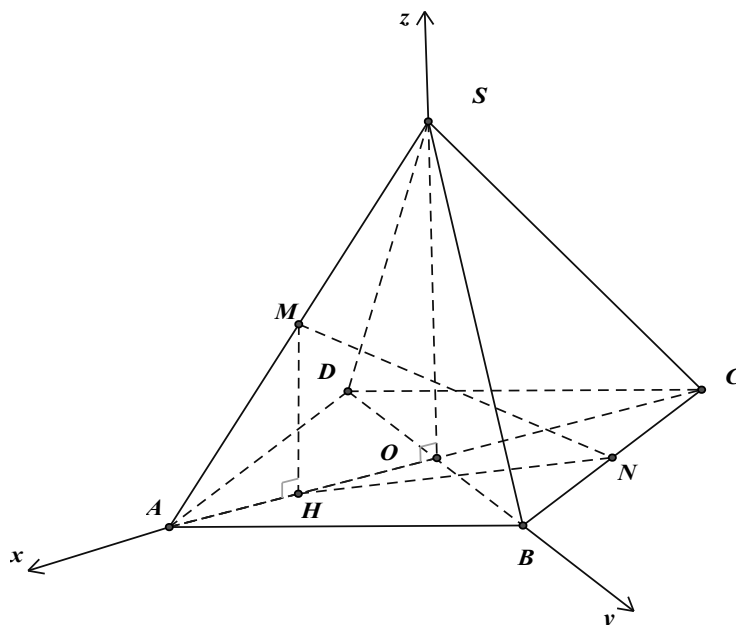
B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải

Chọn C


$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); S(0; 0; m); N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right) \Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{m}{2}\right) \Rightarrow \vec{MN} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{m}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \sin(MN, (ABCD)) = \frac{\left| \overrightarrow{MN} \cdot \vec{k} \right|}{\left| \overrightarrow{MN} \right| \left| \vec{k} \right|} = \frac{\frac{m}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{8} + \frac{m^2}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{15a^2}{8} + \frac{3m^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 15a^2 \Rightarrow m = \frac{a\sqrt{30}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{MN} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{30}}{4} \right), \text{ mặt phẳng } (SBD) \text{ có véc tơ pháp tuyến là } i = (1; 0; 0).$$

$$\Rightarrow \sin(MN, (SBD)) = \frac{\left| \overrightarrow{MN} \cdot \vec{i} \right|}{\left| \overrightarrow{MN} \right| \left| \vec{i} \right|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{30a^2}{16}}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos(MN, (SBD)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

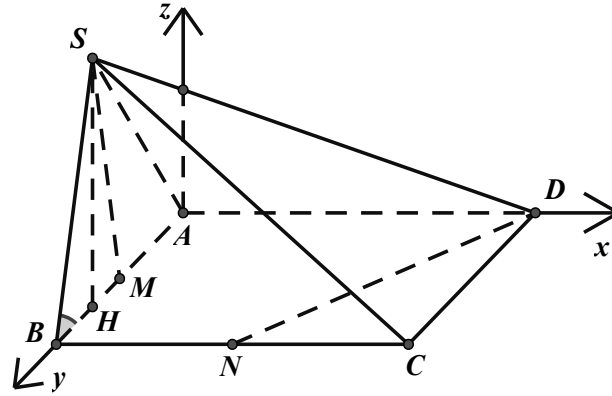
Lời giải

Chọn B

Trong (SAB) , kẻ $SH \perp AB$ tại H . Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Kẻ tia $Az \parallel SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



Trong tam giác SAB vuông tại S , $SB = AB \cdot \cos \angle SBA = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác SBH vuông tại H , $BH = SB \cdot \cos \angle SBH = \frac{3a}{4}$ và $SH = BH \cdot \sin \angle SBA = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$AH = AB - BH = a - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4} \Rightarrow H\left(0; \frac{a}{4}; 0\right) \Rightarrow S\left(0; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$M\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), D(a; 0; 0), N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right)$$

Ta có:

$$\vec{SM} = \left(0; \frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \vec{DN} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right) \Rightarrow \cos(\vec{SM}, \vec{DN}) = \frac{|\vec{SM} \cdot \vec{DN}|}{|\vec{SM}| \cdot |\vec{DN}|} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

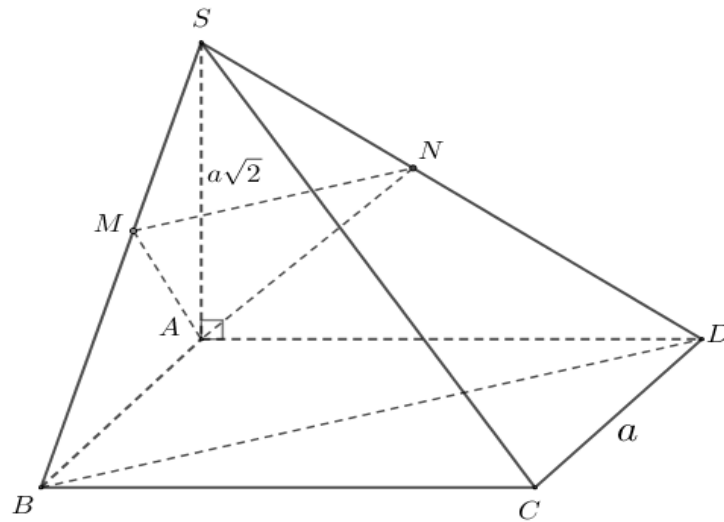
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD .

Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 120° . **D. 60° .**

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và (AMN) .

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;1;0)$, $\vec{SC} = (1;1;-\sqrt{2})$, $\vec{SB} = (0;1;-\sqrt{2})$. Do $(AMN) \perp SC$ nên (AMN) có vtp $\vec{SC}$

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{SB} \cdot \vec{SC}|}{|\vec{SB}| |\vec{SC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$

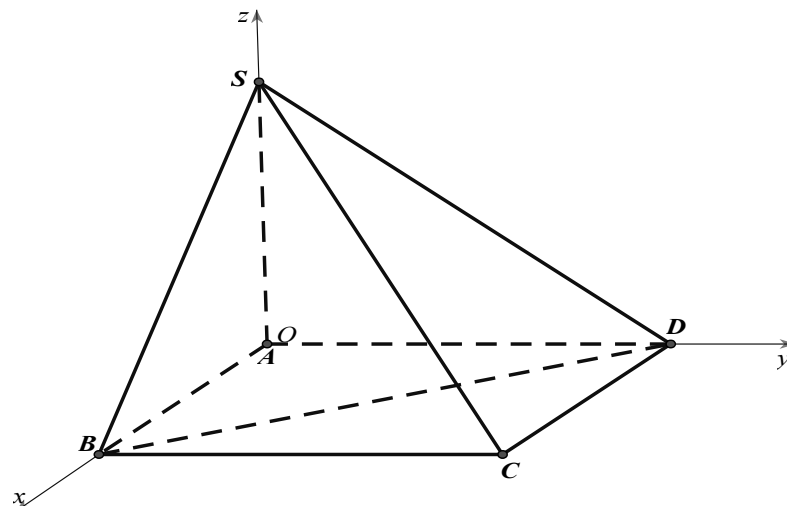
B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Lời giải

Chọn C



Toán 12

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) = a(-1; \sqrt{3}; 0)$, nên đường thẳng BD có véc-tơ chỉ phương là $u = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

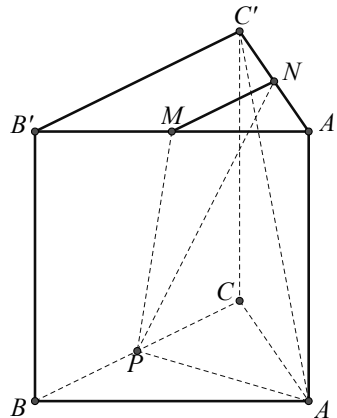
Ta có $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$, $\overrightarrow{BC} = (0; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (a^2\sqrt{3}; 0; a^2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(1; 0; 1)$.

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có véc-tơ pháp tuyến là $n = (1; 0; 1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 18. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

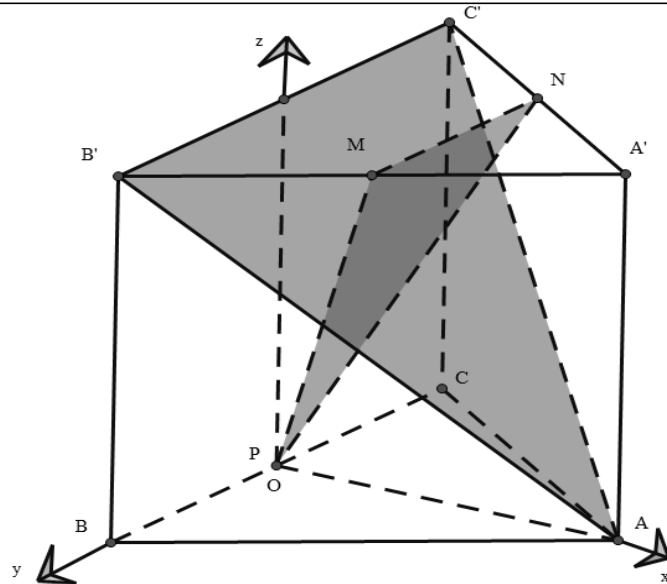
B. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$

C. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

D. $\frac{\sqrt{13}}{65}$

Lời giải

Chọn D



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

$$\Rightarrow P(0;0;0), A(3;0;0), B(0;\sqrt{3};0), C(0;-\sqrt{3};0), A'(3;0;2), B'(0;\sqrt{3};2), C'(0;-\sqrt{3};2)$$

nên $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right), N\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$

Ta có vtpt của mp $(AB'C')$ là $\vec{n}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} [\vec{AB'}, \vec{AC'}] = (2; 0; 3)$ và vtpt của mp (MNP) là $\vec{n}_2 = (4; 0; -3)$

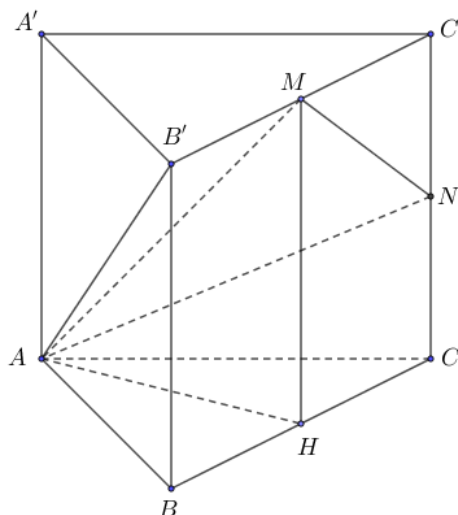
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và mp $(MNP) \Rightarrow \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|8 - 9|}{\sqrt{13}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{13}}{65}$

Câu 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm BC , $BC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$M(0;0;a)$, $N\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) .

(AMN) có một vptpt $\vec{n} = [\vec{AM}, \vec{AN}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

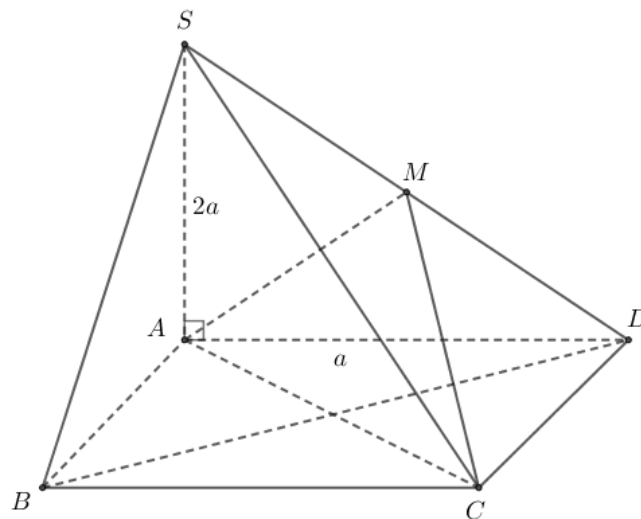
(ABC) có một vptpt $\vec{HM} = (0;0;1)$, từ đó $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{HM}|}{|\vec{n}| |\vec{HM}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ và chuẩn hóa cho $a=1$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;2)$

Ta có M là trung điểm $SD \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $C(1;1;0)$.

$\vec{AM} = \left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\vec{AC} = (1;1;0)$, $[\vec{AM}, \vec{AC}] = \left(-1;1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (AMC)$ có một vptpt $\vec{n} = (-2;2;1)$

Toán 12

$$\vec{SB} = (0; 1; -2), \vec{SC} = (1; 1; -2), [\vec{SB}, \vec{SC}] = (0; 2; 1) \Rightarrow (SBC) \text{ có một vtpt } \vec{k} = (0; 2; 1)$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) thì $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Do $\tan \alpha > 0$ nên $\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$.

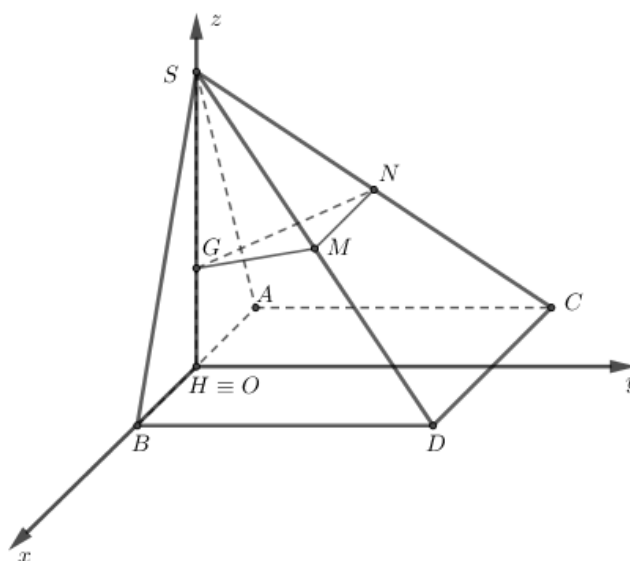
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S \left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right); A \left(\frac{-a}{2}; 0; 0 \right); B \left(\frac{a}{2}; 0; 0 \right); C \left(\frac{a}{2}; a; 0 \right); D \left(\frac{-a}{2}; a; 0 \right)$$

$$G \left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{6} \right); M \left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right); N \left(-\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right)$$

suy ra

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$, mặt phẳng (GMN) có vector pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\vec{GM}; \vec{GN}] = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{24}; \frac{a}{4} \right)$$

Toán 12

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và góc $\angle BAC = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{10}$

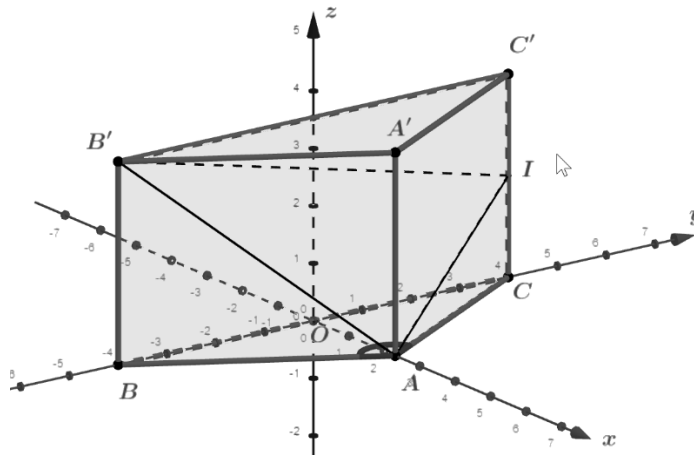
B. $\frac{\sqrt{30}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{30}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{30}$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm của BC . Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có: $OB = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OA = AB \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Giả sử $a = 1$ suy ra $A(\frac{1}{2}; 0; 0)$, $B(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $C(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $I(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $B'(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$.

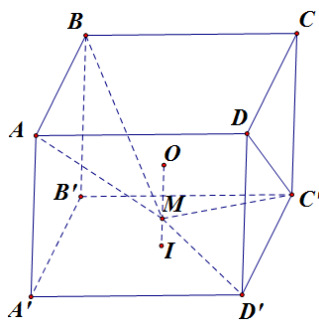
$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = (0; 0; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ và $\vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AI} = (\frac{3\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Ta có: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

Gọi α là góc giữa (ABC) và $(AB'I)$. Suy ra:

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

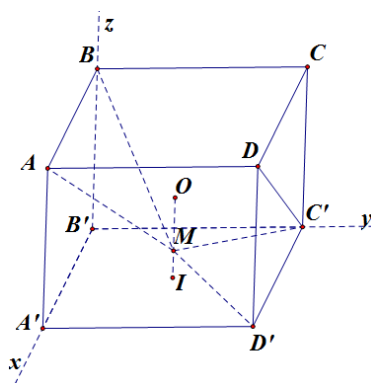
Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) .



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{6\sqrt{85}}{85}$



Toán 12

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, cạnh hình lập phương là 1, ta được tọa độ các điểm như sau :

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right), C'(0;1;0), D'(1;1;0) \text{ và } A(1;0;1), B(0;0;1)$$

Khi đó $n_{(MC'D')} = (0;1;3); n_{(MAB)} = (0;5;3)$ nên $\cos(\overrightarrow{MAB}, \overrightarrow{MC'D'}) = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot 3|}{\sqrt{5^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}$

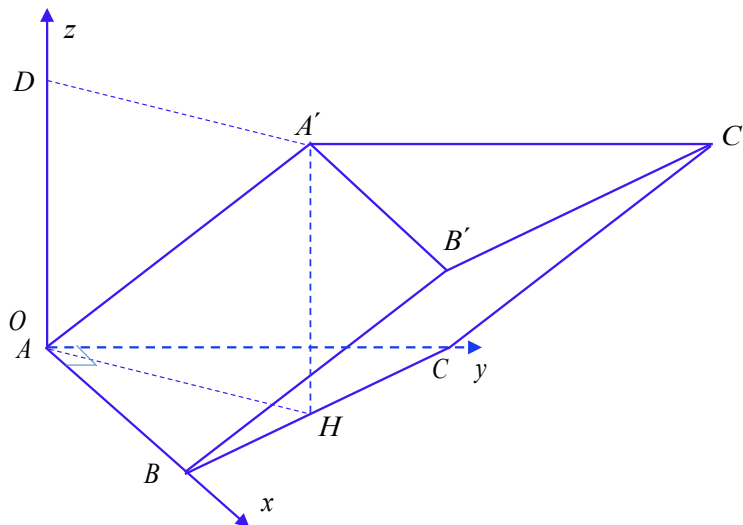
Suy ra $\sin(\overrightarrow{MAB}, \overrightarrow{MC'D'}) = \sqrt{1 - \left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)^2} = \frac{6\sqrt{85}}{85}$

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos \varphi$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{24}$



Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$ như hình vẽ, chọn $a = 1$ đơn vị, khi đó ta có tọa độ điểm

$B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$ suy ra trung điểm của BC là $H\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, vì H là hình chiếu của A' nên suy

ra tọa độ của $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5}\right)$. Ta tìm tọa độ B' , gọi tọa độ $B'(x; y; z)$ khi đó ta có $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB}$ nên tọa độ

Toán 12

$B' \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5} \right)$. Ta cũng có $\vec{B'C} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{5} \right)$ và $\vec{A'B} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{5} \right)$. Từ đó ta có

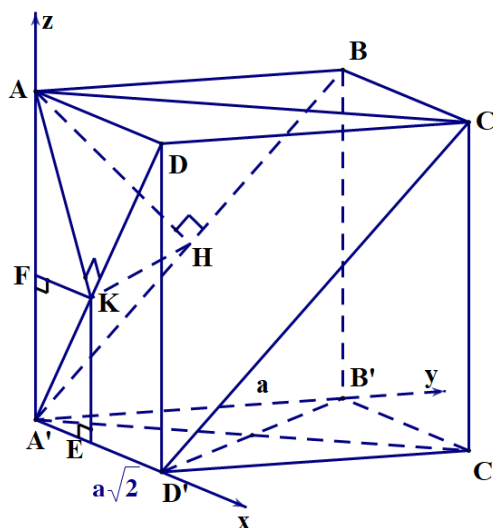
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{A'B} \cdot \vec{B'C}|}{|\vec{A'B}| \cdot |\vec{B'C}|} = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

Câu 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 45°



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $A'C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD) \Rightarrow (A'C, (ABCD)) = (A'C, A'C') = \angle A'C' = 30^\circ$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}; \tan \angle A'C' = \frac{CC'}{A'C'} \Rightarrow CC' = a$.

Kết hợp với giả thiết ta được $ABB'A'$ là hình vuông và có H là tâm.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên $A'D'$ & $A'A$.

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}; A'K = \sqrt{A'A^2 - AK^2} = \frac{a}{\sqrt{3}};$

$\frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{A'K^2} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{2}}{3}; KE = \sqrt{A'K^2 - KF^2} \Rightarrow KE = \frac{a}{3}.$

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A'$ còn D', B', A theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó ta có tọa độ các điểm lần lượt là:

Toán 12

$$A(0;0;a), B'(0;a;0), H(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}), K(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a}{3}), E(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;0), F(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{3}).$$

Mặt phẳng $(ABB'A')$ là mặt phẳng (yOz) nên có VTPT là $n_1 = (1;0;0)$;

Ta có $\left[\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AH} \right] = \frac{a^2}{6} n_2, n_2(2;\sqrt{2};\sqrt{2}).$

Mặt phẳng (AKH) có VTPT là $n_2 = (2;\sqrt{2};\sqrt{2})$;

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

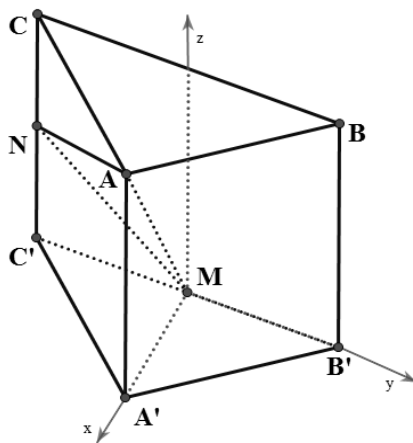
Ta có $\cos \alpha = \left| \cos(n_1, n_2) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$

Câu 26. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BAC = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) , tính $\cos \alpha$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$



H là trung điểm của BC .
Lấy

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4} \Rightarrow CC' = a$ vì $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $M \equiv O$.

$$M(0;0;0), A'\left(\frac{a}{2};0;0\right), B'\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right), C'\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right); A\left(\frac{a}{2};0;a\right); N\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right)$$

Toán 12

Ta có: $(ABC) \perp Oz$ nên (ABC) có một vector pháp tuyến là $k = (0; 0; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Gọi $\overrightarrow{v_1} = \frac{a}{2}\overrightarrow{MA} \Rightarrow v_1 = (1; 0; 2)$, $\overrightarrow{v_2} = \frac{a}{2}\overrightarrow{MN} \Rightarrow v_2 = (0; -\sqrt{3}; 1)$.

Khi đó mặt phẳng (AMN) song song hoặc chứa giá của hai vector không cùng phương là v_1 và v_2 nên có một vector pháp tuyến là $n = [v_1, v_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$.

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{k}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

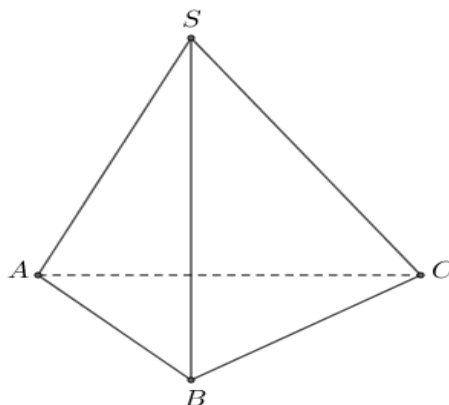
Vậy

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A , C . Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) ,

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{3}$



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0; 0; 0)$, $A(a\sqrt{2}; 0; 0)$, $C(0; a\sqrt{2}; 0)$, $S(x; y; z)$.

Ta có $(ABC): z = 0$, $\overrightarrow{AS} = (x - a\sqrt{2}; y; z)$, $\overrightarrow{CS} = (x; y - a\sqrt{2}; z)$.

Do $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$, $d(S, (ABC)) = 2a \Rightarrow z = 2a$ ($z > 0$)

$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (y - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = a\sqrt{2} \Rightarrow S(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a)$.

Ta có $\overrightarrow{AS} = (0; a\sqrt{2}; 2a)$, $\overrightarrow{CS} = (a\sqrt{2}; 0; 2a)$, $\overrightarrow{BS} = (a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; 2a)$.

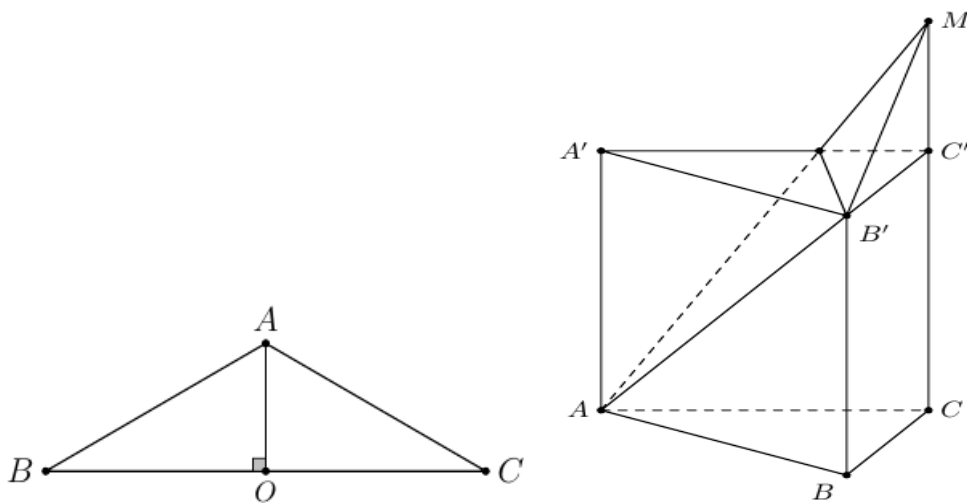
$$(SBC) \text{ có 1 vtpt } \vec{n} = (-\sqrt{2}; 0; 1), (SAB) \text{ có 1 vtpt } \vec{m} = (0; \sqrt{2}; -1) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 28. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh A . Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\angle ABC = 30^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $2CM = 3CC'$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$, khi đó tính $\sin \alpha$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{418}}{22}$



Gọi O là trung điểm BC .

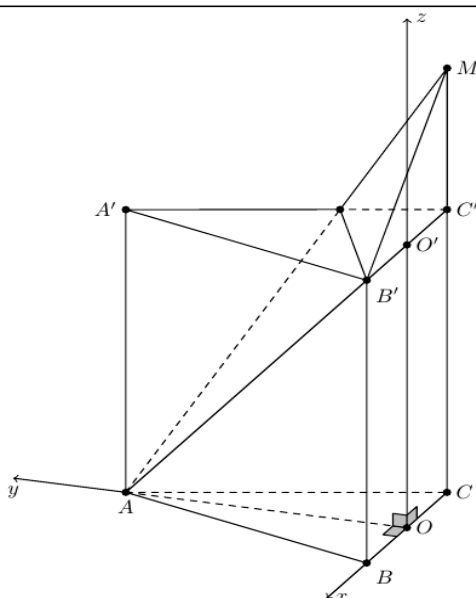
$$BO = AB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{BO}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a = AC$$

Ta có:

$$\text{và } AO = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Theo đề bài:

$$2CM = 3CC' \Leftrightarrow CM = \frac{3}{2}CC' \Leftrightarrow CC' + C'M = \frac{3}{2}CC' \Leftrightarrow C'M = \frac{1}{2}CC' \Rightarrow C'M = \frac{a}{2}.$$



Coi $a = 1$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$,
 $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó $(ABC) \equiv (Oxy); z = 0 \Rightarrow (ABC)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $k = (0; 0; 1)$.

Ta có: $\vec{AB'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$, $\vec{AM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow n_{(AB'M)} = 4[\vec{AB'}, \vec{AM}] = (1; 5\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$.

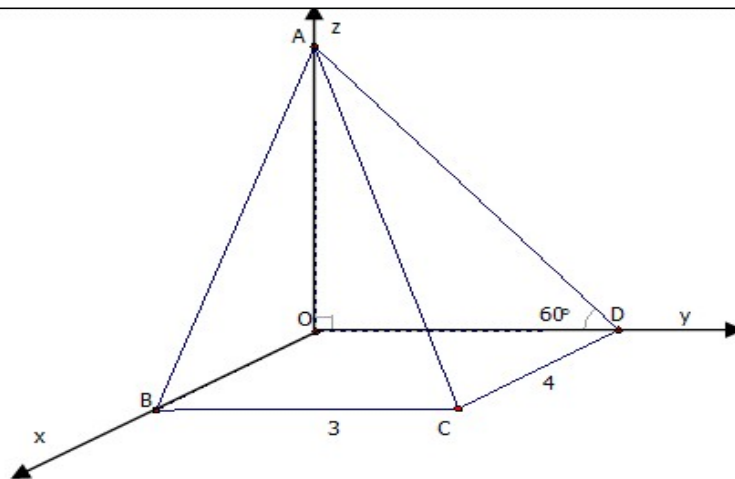
Vậy $\cos \alpha = \frac{|k \cdot n_{(AB'M)}|}{|k| \cdot |n_{(AB'M)}|} = \frac{|2\sqrt{3}|}{1 \cdot 2\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{3}{22}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{19}{22}} = \frac{\sqrt{418}}{22}$.

Câu 29. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\angle ABC = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai phẳng (ABC) và (ACD) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{2\sqrt{43}}{43}$



Dựng $AO \perp (BCD)$ khi đó O là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $BCDO$.

Góc giữa đường thẳng AD và BC là góc giữa đường thẳng AD và OD và bằng $\angle ADO = 60^\circ$

Xét tam giác ADO vuông tại O : $\tan 60^\circ = \frac{OA}{OD} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3}$.

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào hình chóp như hình vẽ.

Ta có:

$$O(0;0;0), B(4;0;0), D(0;3;0), C(4;3;0), A(0;0;3\sqrt{3})$$

$$\vec{AB} = (4;0;-3\sqrt{3}), \vec{BC} = (0;3;0), \vec{AD} = (0;3;-3\sqrt{3}), \vec{CD} = (-4;0;0)$$

Mặt phẳng (ABC) nhận vectơ $\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{BC} = (9\sqrt{3};0;12)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (ADC) nhận vectơ $\vec{n}_2 = \vec{AD} \times \vec{CD} = (0;12\sqrt{3};12)$ làm vectơ pháp tuyến.

$$\cos((ABC);(ADC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{43} \cdot 2} = \frac{2\sqrt{43}}{43}$$

Nên