

Họ tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để bất phương trình sau có nghiệm  $m \log_{3-\sqrt{4-x}} 3 \geq x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$ .

- A.  $m \geq 2\sqrt{3}$       B.  $m \geq 12 \log_3 5$       \*C.  $m > 0$       D.  $2\sqrt{3} \leq m \leq 12 \log_3 5$

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 3 - \sqrt{4-x} > 0 \\ 3 - \sqrt{4-x} \neq 1 \\ x \geq 0 \\ x+12 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4.$$

Nhận xét:  $3 - \sqrt{4-x} > 3 - \sqrt{4-0} = 1 \Rightarrow \log_{3-\sqrt{4-x}} 3 > \log_{3-\sqrt{4-x}} 1 = 0$

$$m \log_{3-\sqrt{4-x}} 3 \geq x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\log_{3-\sqrt{4-x}} 3} \Leftrightarrow m \geq (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \log_3 (3 - \sqrt{4-x})$$

Đặt  $f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \log_3 (3 - \sqrt{4-x})$

$$f'(x) = \left( \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{2\sqrt{x+12}} \right) \log_3 (3 - \sqrt{4-x}) + (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \frac{1}{(3 - \sqrt{4-x}) \ln 3 \cdot 2\sqrt{4-x}}$$

Vì  $f'(x) > 0, \forall x \in (0; 4) \Rightarrow f(x)$  tăng trên  $(0; 4) \Rightarrow$  tập giá trị của  $f(x)$  là  $(0; 12)$ .

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $m > 0$ .

**Câu 2.** Đường thẳng  $x = k$  cắt đồ thị hàm số  $y = \log_5 x$  và đồ thị hàm số  $y = \log_5 (x+4)$ . Khoảng cách giữa

các giao điểm là  $\frac{1}{2}$ . Biết  $k = a + \sqrt{b}$ , trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Khi đó tổng  $a + b$  bằng

- A. 5      B. 8      C. 7      \*D. 6

**Lời giải**

Gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $x = k$  cắt đồ thị hàm số  $y = \log_5 x$  và đồ thị hàm số  $y = \log_5 (x+4)$ .

Ta có  $A(k; \log_5 x), B(k; \log_5 (x+4)), (k > 0)$

$$AB = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\log_5 x - \log_5 (x+4)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \log_5 \frac{x}{x+4} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \frac{x}{x+4} = \frac{1}{2} \\ \log_5 \frac{x}{x+4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+4} = \sqrt{5} \\ \frac{x}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 - \sqrt{5} \\ k = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện suy ra  $k = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow a = 1; b = 5$ . Vậy  $a + b = 6$ .

**Câu 3.** Ba em Sơn, Tuấn và Minh cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất  $0,7\%$ /tháng, tổng số tiền vay của cả ba người là  $1$  tỷ đồng. Biết rằng mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì Sơn cần  $10$  tháng, Tuấn cần  $15$  tháng và Minh cần  $25$  tháng. Số tiền trả đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 21900000 đồng. B. 21090000 đồng. \*C. 21422000 đồng. D. 21400000 đồng.

**Lời giải**

• Bài toán gốc: Một người vay ngân hàng số tiền là  $N$  đồng, lãi suất hàng tháng là  $r$ . Số tiền  $A$  người đó phải trả hàng tháng để sau  $n$  tháng hết nợ.

- Sau 1 tháng, người đó nợ  $N + Nr = N(1+r)$ , người đó trả được  $A$  đồng nên còn nợ

$N(1+r) - A$  đồng

- Sau hai tháng số tiền còn nợ là

$$[N(1+r) - A](1+r) - A = N(1+r)^2 - A(1+r) - A$$

- Sau ba tháng số tiền còn nợ là

$$N(1+r)^3 - A(1+r)^2 - A(1+r) - A$$

- Vậy sau  $n$  tháng, người đó hết nợ

$$N(1+r)^n - [A(1+r)^{n-1} + A(1+r)^{n-2} + \dots + A] = 0$$

$$\Leftrightarrow N(1+r)^n - A \frac{(1+r)^n - 1}{1+r - 1} = 0 \Leftrightarrow N(1+r)^n = A \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} = A \Leftrightarrow N = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n \cdot r}$$

• Gọi số tiền Sơn, Tuấn, Minh cần trả hàng tháng lần lượt là  $a$  (đồng)

$$1.10^9 = \frac{a \left[ \left( 1 + \frac{0,7}{100} \right)^{10} - 1 \right]}{\left( 1 + \frac{0,7}{100} \right) \cdot \frac{0,7}{100}} + \frac{a \left[ \left( 1 + \frac{0,7}{100} \right)^{15} - 1 \right]}{\left( 1 + \frac{0,7}{100} \right) \cdot \frac{0,7}{100}} + \frac{a \left[ \left( 1 + \frac{0,7}{100} \right)^{25} - 1 \right]}{\left( 1 + \frac{0,7}{100} \right) \cdot \frac{0,7}{100}} \Leftrightarrow a \approx 21422719$$

• Ta có

**Câu 4.** Phương trình  $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$  có hai nghiệm  $x_1; x_2$ . Tính giá trị của  $P = x_1 + x_2$ .

- \*A. 2. B.  $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$  C. 12. D.  $6 + 4\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

• Điều kiện:  $3 \cdot 2^x - 1 > 0$

• Ta có:  $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1 \Rightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = 4^{x-1}$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = \frac{2^{2x}}{4} \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 4 = 0$$

• Đặt  $t = 2^x (t > 0)$ , phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 12t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6 + 4\sqrt{2} \text{ (tm)} \\ t_2 = 6 - 4\sqrt{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

• Khi đó: phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:  $2^{x_1} = 6 + 4\sqrt{2}$ ;  $2^{x_2} = 6 - 4\sqrt{2}$

• Hay:  $2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = (6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2^{x_1 + x_2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$

**Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$  có đúng hai nghiệm thực thuộc khoảng  $(2; 4)$ :

A. 2.

\*B. 3.

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = t \quad (t > -1)$$

Đặt  $t$ . Phương trình đã cho trở thành:

$$(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$  trên  $(-1; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \quad (t > -1)$$

Bảng biến thiên:

|         |               |    |           |
|---------|---------------|----|-----------|
| $t$     | -1            | 1  | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | -             | 0  | +         |
| $f(t)$  | $\frac{7}{3}$ | -3 | 1         |

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực thuộc khoảng  $(2; 4)$

$\Leftrightarrow$  Phương trình  $m = f(t)$  có đúng hai nghiệm thực thuộc khoảng  $(-1; +\infty)$

$\Leftrightarrow -3 < m < 1$

Mà  $m$  nguyên nên  $m \in \{-2; -1; 0\}$ .

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 6.** Cho phương trình  $\log_2 3^x \cdot \log_2 (2^m \cdot 3^x) = 2$ , với  $m$  là tham số thực. Tính giá trị của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $3^{x_1 + x_2} = 0,5$ .

\*A.  $m = 1$ .

B.  $m = 2$ .

C.  $m = 3$ .

D.  $m = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\log_2 3^x \cdot \log_2 (2^m \cdot 3^x) = 2 \Leftrightarrow \log_2 3^x \cdot [\log_2 3^x + m] = 2 \Leftrightarrow \log_2^2 3^x + m \cdot \log_2 3^x - 2 = 0 \quad (*)$

Phương trình (\*) là phương trình bậc hai ẩn  $\log_2 3^x$  có  $ac < 0$  nên luôn có hai nghiệm trái dấu. Theo định lý Vi-ét ta có:  $\log_2 3^{x_1} + \log_2 3^{x_2} = -m$

Mặt khác:  $3^{x_1+x_2} = 0,5 \Leftrightarrow 3^{x_1} 3^{x_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 3^{x_1} + \log_2 3^{x_2} = \log_2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 3^{x_1} + \log_2 3^{x_2} = -1$

Vậy  $-m = -1 \Leftrightarrow m = 1$ .

**Câu 7.** Cho phương trình  $\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + 2m - 5 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[9; 27]$  là

- A.  $[4; 5]$       \*B.  $(4; 5]$       C.  $[2; 3]$       D.  $[2; 3)$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > 0$

$$\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + 2m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_3 x)^2 - (m+2)\log_3 x + 2m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 4 = 0 \quad (1)$$

Đặt  $\log_3 x = t$ . Vì  $x \in [9; 27] \Rightarrow t \in [2; 3]$

PT (1) trở thành:  $t^2 - mt + 2m - 4 = 0 \quad (2)$

$$\Delta_{(2)} = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2$$

Bài toán đưa về tìm  $m$  để PT (2) có 2 nghiệm phân biệt  $t \in [2; 3]$

Khi đó:  $\Delta_{(2)} > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

$$t_1 = \frac{m - (m - 4)}{2} = 2 \in [2; 3]$$

$$t_2 = \frac{m + (m - 4)}{2} = m - 2 \in [2; 3]$$

Suy ra  $2 \leq m - 2 \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 5$

Vậy  $4 < m \leq 5$

**Câu 8.** Cho các số thực dương  $a, b$  khác 1 thỏa mãn  $\log_2 a = \log_b 16$  và  $ab = 64$ . Giá trị của biểu thức

$\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)^2$  bằng

- A.  $\frac{25}{2}$       \*B. 20      C. 25      D. 32

**Lời giải**

$$\bullet \log_2 a = \log_b 16 \Leftrightarrow \log_2 \frac{64}{b} = 4 \log_b 2 \Leftrightarrow 6 - \log_2 b = \frac{4}{\log_2 b}$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 b)^2 - 6 \log_2 b + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b = 3 - \sqrt{5} \\ \log_2 b = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

• Với:  $\log_2 b = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow \log_2 a = 6 - (3 - \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5}$

$$\log_2 \frac{a}{b} = \log_2 a - \log_2 b = 3 + \sqrt{5} - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \Rightarrow \left(\log_2 \frac{a}{b}\right)^2 = 20$$

• Với:  $\log_2 b = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow \log_2 a = 6 - (3 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$

$$\log_2 \frac{a}{b} = \log_2 a - \log_2 b = 3 - \sqrt{5} - (3 + \sqrt{5}) = -2\sqrt{5} \Rightarrow \left( \log_2 \frac{a}{b} \right)^2 = 20$$

$$\left( \log_2 \frac{a}{b} \right)^2 = 20$$

Vậy với các số  $a, b$  thỏa mãn ycbt thì ta luôn có:

**Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  không vượt quá 2021 để phương trình  $4^{x+3} - m \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$  có nghiệm?

\*A. 2018.

B. 2017.

C. 2021.

D. 2019.

**Lời giải**

$$4^{x+3} - m \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{x+3} + 1}{2^{x+2}} = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x+6}}{2^{x+2}} + \frac{1}{2^{x+2}} = m$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+4} + \frac{1}{2^{x+2}} = m \quad (1)$$

$$2^{x+4} + \frac{1}{2^{x+2}} = 2^2 \cdot 2^{x+2} + \frac{1}{2^{x+2}} \geq 2 \sqrt{2^2 \cdot 2^{x+2} \cdot \frac{1}{2^{x+2}}} = 2\sqrt{2^2} = 4$$

Ta có:

Để phương trình  $4^{x+3} - m \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$  có nghiệm

$\Leftrightarrow$  phương trình  $(1)$  có nghiệm

$$\Leftrightarrow m \geq 4$$

Vì  $m$  không vượt quá 2021 nên  $m \in [4; 2021] \Rightarrow$  Có 2018 số  $m$ .

**Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số  $y = x^2 + 8 \ln 2x - mx$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ ?

\*A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

**Lời giải**

• Tập xác định  $D = (0; +\infty)$

$$y' = 2x + \frac{8}{x} - m$$

Để hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$  khi  $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq 2x + \frac{8}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\text{Đặt } f(x) = 2x + \frac{8}{x}, f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | 0         | 2     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | - 0 + |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 8     | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$  khi  $m \leq 8$

Vậy  $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

$$\log_1(x-m) + \log_3(2-x) = 0$$

**Câu 11.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình  $\log_1(x-m) + \log_3(2-x) = 0$  ( $m$  là tham số) có nghiệm?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

\*D. 1.

**Lời giải**

Ta có:  $\log_1(x-m) + \log_3(2-x) = 0 \Leftrightarrow \log_3(2-x) = \log_3(x-m) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x = x-m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x = \frac{2+m}{2} \end{cases}$$

Do đó để phương trình đã cho có nghiệm thì:  $\frac{2+m}{2} < 2 \Leftrightarrow m < 2$  mà  $m > 0$  nên  $0 < m < 2$ .

Lại có:  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1$ . Vậy có 1 giá trị của  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 12.** Giả sử  $x_0$  là nghiệm thực của phương trình  $2021 \cdot 2^{-\cos x} = \log_{\pi} x^{2021} + \log_x \pi^{2021}$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A.  $x_0 \in (-2\pi; 0)$

B.  $x_0 \in (2\pi; 4\pi)$

\*C.  $x_0 \in (0; 2\pi)$

D.  $x_0 \in (4\pi; 6\pi)$

**Lời giải**

• Với  $0 < x \neq 1$ , ta có:  $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2^{-\cos x} \leq 2 \Rightarrow 2021 \cdot 2^{-\cos x} \leq 4042$

• Vì  $2021 \cdot 2^{-\cos x} > 0, \forall x$  nên  $2021 \cdot \log_{\pi} x + \frac{2021}{\log_{\pi} x} > 0, \forall x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$   
 $\Rightarrow \log_{\pi} x > 0, \forall x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$

Do đó:

$$\log_{\pi} x^{2021} + \log_x \pi^{2021} = 2021 \cdot \log_{\pi} x + \frac{2021}{\log_{\pi} x} \geq 2 \cdot 2021$$

$$2021 \cdot 2^{-\cos x} = \log_{\pi} x^{2021} + \log_x \pi^{2021} \Leftrightarrow \begin{cases} 2021 \cdot 2^{-\cos x} = 4042 \\ \log_{\pi} x^{2021} + \log_x \pi^{2021} = 4042 \end{cases}$$

• Do đó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-\cos x} = 2 \\ \log_{\pi} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ x = \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi \in (0; 2\pi)$$

**Câu 13.** Để lắp đặt hệ thống năng lượng mặt trời  $50KWP$ , gia đình bạn A vay ngân hàng một số tiền là 600 triệu đồng với lãi suất  $0,6\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày lắp đặt, gia đình bạn A bắt đầu đưa vào vận hành hòa lưới thì mỗi tháng công ty điện lực trả cho gia đình bạn A  $16$  triệu đồng. Nên sau sau đúng một tháng kể từ khi vay, gia đình bạn A bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi tháng hoàn nợ đúng một số tiền là  $16$  triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng, gia đình bạn A trả hết nợ.

\*A. 43.

B. 42.

C. 41.

D. 44.

**Lời giải**

• Gọi  $n$  là số tháng mà nhà bạn A hoàn trả hết nợ. ( $n > 0$ )

• Để sau  $n$  tháng thì gia đình bạn A trả hết nợ thì

$$600(1+0,6\%)^n - \frac{16}{0,6\%} \left[ (1+0,6\%)^n - 1 \right] = 0$$

$$\begin{aligned} & 600(1+0,6\%)^n - \frac{16}{0,6\%}[(1+0,6\%)^n - 1] = 0 \\ \text{Ta có:} \\ & \Leftrightarrow \frac{6200}{3}(1+0,6\%)^n = \frac{8000}{3} \\ & \Leftrightarrow (1+0,6\%)^n = \frac{40}{31} \\ & \Leftrightarrow n = 42,6 \end{aligned}$$

Vậy gia đình An sau 43 tháng thì sẽ trả hết nợ.

**Câu 14.** Biết  $\log_7 12 = a$ ;  $\log_{12} 24 = b$ . Giá trị của  $\log_{54} 168$  được tính theo  $a$  và  $b$  là

- \*A.  $\frac{ab+1}{a(8-5b)}$       B.  $\frac{ab-1}{a(8+5b)}$       C.  $\frac{2ab+1}{8a-5b}$       D.  $\frac{2ab+1}{8a+5b}$

**Lời giải**

Do  $\log_7 12 = a$ ;  $\log_{12} 24 = b \Rightarrow a, b > 0$

- $\log_7 12 = a \Leftrightarrow \log_7 (2^2 \cdot 3) = a \Leftrightarrow 2\log_7 2 + \log_7 3 = a$  (1)
- $\log_{12} 24 = b \Leftrightarrow \frac{\log_7 24}{\log_7 12} = b \Leftrightarrow \frac{3\log_7 2 + \log_7 3}{a} = b \Leftrightarrow 3\log_7 2 + \log_7 3 = ab$  (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2\log_7 2 + \log_7 3 = a \\ 3\log_7 2 + \log_7 3 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 2 = ab - a \\ \log_7 3 = 3a - 2ab \end{cases}$$

$$\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 (2^3 \cdot 3 \cdot 7)}{\log_7 (2 \cdot 3^3)} = \frac{3\log_7 2 + \log_7 3 + 1}{\log_7 2 + 3\log_7 3}$$

Mặt khác:

$$\Rightarrow \log_{54} 168 = \frac{3(ab - a) + 3a - 2ab + 1}{ab - a + 3(3a - 2ab)} = \frac{3ab - 3a + 3a - 2ab + 1}{ab - a + 9a - 6ab} = \frac{ab + 1}{8a - 5ab} = \frac{ab + 1}{a(8 - 5b)}$$

$$\log_{54} 168 = \frac{ab + 1}{a(8 - 5b)}$$

Vậy

**Câu 15.** Có bao nhiêu số nguyên  $a$  để phương trình  $6^x - 2^x - 3^x = \frac{a}{5}$  có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 1.      B. 5.      C. Vô số.      \*D. 4.

**Lời giải**

Xét hàm số  $f(x) = 6^x - 2^x - 3^x$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có:  $f'(x) = 6^x \ln 6 - 2^x \ln 2 - 3^x \ln 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6^x \ln 6 - 2^x \ln 2 - 3^x \ln 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 3 = \ln 6$$

Dễ thấy,  $x = 0$  là nghiệm duy nhất của phương trình  $f'(x) = 0$ .

Bảng biến thiên:

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       |
| $f(x)$  | $0$       | $-1$ | $+\infty$ |

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình  $6^x - 2^x - 3^x = \frac{a}{5}$  là số giao điểm của đường thẳng  $y = \frac{a}{5}$  với đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

Do vậy, phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt  $\Leftrightarrow -1 < \frac{a}{5} < 0 \Leftrightarrow -5 < a < 0$ .

Vậy  $a \in (-5; 0)$ .

**Câu 16.** Có bao nhiêu số nguyên  $x$  sao cho tồn tại số thực  $y$  thỏa mãn  $3^{x^2+y^2} = 4^{x+y}$

- A. Vô số.      B. 5.      \*C. 2.      D. 1.

**Lời giải**

$$3^{x^2+y^2} = 4^{x+y} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \log_3 4^{x+y} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x+y) \log_3 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y \log_3 4 + x^2 - x \log_3 4 = 0, (*)$$

Ta xem phương trình  $(*)$  là phương trình ẩn  $y$ , tham số  $x$ .

Phương trình  $(*)$  có nghiệm thực  $y \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-\log_3 4)^2 - 4(x^2 - x \log_3 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{2})\log_3 4}{2} \leq x \leq \frac{(1+\sqrt{2})\log_3 4}{2} \quad (*)'$$

Do đó có hai số nguyên  $x=0$  và  $x=1$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 17.** Cho  $a$  là số thực dương sao cho  $3^x + a^x \geq 6^x + 9^x$  với mọi  $x \in \mathbf{R}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a \in (14; 16]$       \*B.  $a \in (16; 18]$       C.  $a \in (12; 14]$       D.  $a \in (10; 12]$

**Lời giải**

$$Ta \text{ có } 3^x + a^x \geq 6^x + 9^x \Leftrightarrow a^x - 18^x \geq 6^x + 9^x - 3^x - 18^x \Leftrightarrow a^x - 18^x \geq -3^x(2^x - 1)(3^x - 1) \quad (*)$$

VP  $(*) \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}$  nên  $(*)$  đúng với  $\forall x \in \mathbf{R}$  khi và chỉ khi

$$a^x - 18^x \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{18}\right)^x \geq 1, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a = 18.$$

**Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $4^x - (m+2)2^{x+1} + 3m - 5 = 0$  có hai nghiệm trái dấu.

- \*A.  $\frac{5}{3} < m < 8$       B.  $m > \frac{5}{3}$       C.  $m < 8$       D.  $-2 < m < 8$

**Lời giải**



Đặt  $t = 2^x, t > 0$  ta được phương trình  $t^2 - 2(m+2)t + 3m - 5 = 0$  (\*)

Vì  $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 0 < t_1 = 2^{x_1} < 1 < 2^{x_2} = t_2$ , bài toán trở thành: Tìm tham số  $m$  để phương trình (\*) có hai nghiệm dương phân biệt thỏa  $t_1 < 1 < t_2$ .

Điều kiện để (\*) có hai nghiệm dương phân biệt là

$$\begin{cases} \Delta' = (m+2)^2 - (3m-5) > 0 \\ P = 3m-5 > 0 \\ S = 2(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}$$

Khi đó  $t_1 < 1 < t_2 \Rightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 3m - 5 - 2(m+2) + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 8$$

Vậy  $\frac{5}{3} < m < 8$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 19.** Một khu rừng có trữ lượng gỗ là  $7 \cdot 10^6$  mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong khu rừng đó là 4% mỗi năm. Nếu hàng năm không khai thác thì sau 6 năm khu rừng đó có bao nhiêu mét khối gỗ?

- A.  $7 \cdot 14^6$       B.  $7 \cdot 14^5$       C.  $7 \cdot (10,4)^5$       \*D.  $7 \cdot (10,4)^6$

**Lời giải**

Áp dụng công thức “lãi kép”:  $A = a(1+r)^n$

Trong đó:  $A$  là trữ lượng gỗ của khu rừng sau  $n$  năm,  $a$  là trữ lượng gỗ ban đầu,  $r$  là tốc độ sinh trưởng hàng năm.

Vậy sau 6 năm không khai thác, khu rừng đó có số mét khối gỗ là:

$$A = 7 \cdot 10^6 \cdot (1 + 4\%)^6 = 7 \cdot (10 + 40\%)^6 = 7 \cdot (10,4)^6$$

**Câu 20.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $(\sqrt{2} + 1)^x - (\sqrt{2} - 1)^{x-2} \leq 2(\sqrt{2} + 1)$

- A.  $(-\infty; \sqrt{2}]$       B.  $[-2; +\infty)$       \*C.  $(-\infty; 2]$       D.  $[-1; 1]$

**Lời giải**

Đặt  $t = (\sqrt{2} + 1)^x, t > 0$  ta có bất phương trình:

$$t - \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{t} \leq 2(\sqrt{2} + 1) \Leftrightarrow t^2 - 2(\sqrt{2} + 1)t - (3 + 2\sqrt{2}) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

Kết hợp điều kiện có  $0 < t \leq 3 + 2\sqrt{2}$  hay  $(\sqrt{2} + 1)^x \leq 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x \leq 2$

**Lời bình:** Học sinh có thể dùng máy tính cầm tay để chọn đáp án theo 2 cách sau:

Cách 1: Dùng chức năng CALC để thử và loại nghiệm.

Cách 2: Lập bảng (TABLE) để chọn nghiệm.

**Câu 21.** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $\log_2 \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{5x - 1}} + x^2 - 4x + 2 = 0$

- A. 3.      \*B. 4.      C. 5.      D. 2.

**Lời giải**

Với điều kiện:  $x > \frac{1}{5}$ , ta có:

$$\log_2 \sqrt{\frac{x^2+x+1}{5x-1}} + x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x^2+x+1) + (x^2+x+1) = \frac{1}{2} \log_2 (5x-1) + (5x-1).$$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{2} \log_2 t + t; f'(t) = \frac{1}{2t \ln 2} + 1 > 0$  với  $\forall t \in (0; +\infty)$ .

$$f(x^2+x+1) = f(5x-1) \Leftrightarrow x^2+x+1 = 5x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ (tmdk).}$$

Vậy tổng 2 nghiệm của phương trình là 4.

**Lời bình:** Học sinh có thể dùng máy tính cầm tay, sử dụng lệnh SHIFT SOLVE để tìm ra 2 nghiệm và tính tổng.

**Câu 22.** Cho ba số thực  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện:  $5^a = 7^b = 35^c$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2$

A. 18.

B.  $\log_2 35$ .

C.  $\log_2 5$ .

\*D. 8.

**Lời giải**

$$5^a = 7^b = 35^c = t \Rightarrow \begin{cases} 5^a = t \\ 7^b = t \\ 35^c = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = t^{\frac{1}{a}} \\ 7 = t^{\frac{1}{b}} \\ 35 = t^{\frac{1}{c}} \end{cases} \Rightarrow t^{\frac{1}{a}} \cdot t^{\frac{1}{b}} = t^{\frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Đặt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) + 12 \\ &= (a+b+c)^2 - 4(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) + 12 \\ &= (a+b+c)^2 - 4(a+b+c) + 12 = (a+b+c-2)^2 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} ab+bc+ca=0 \\ a+b+c=2 \\ 3^a=5^b=35^c \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a+a\log_3 3 - a\log_{35} 3 = 2 \\ b\log_3 5 + b - b\log_{35} 5 = 2 \\ -c\log_{35} 3 - c\log_{35} 5 + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{1+\log_3 3 - \log_{35} 3} \\ b = \frac{2}{1+\log_3 5 - \log_{35} 5} \\ c = \frac{2}{1-\log_{35} 5 - \log_{35} 3} \end{cases} \\ \Rightarrow P_{\min} &= 8 \text{ khi} \end{aligned}$$

**Câu 23.** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình  $\log_2 \left( \frac{2x^2+1}{2x} \right) + 2^{\left( x + \frac{1}{2x} \right)} = 5$ .

A. 1.

B. 0.

\*C.  $\frac{1}{2}$ .

D. 2.

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > 0$ .

$$\text{Đặt } t = \frac{2x^2+1}{2x} \geq \frac{2\sqrt{2x^2}}{2x} = \sqrt{2}.$$

Phương trình có dạng:  $\log_2 t + 2^t = 5$  (\*).

Hàm số  $f(t) = \log_2 t + 2^t$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \quad \forall t \geq \sqrt{2}$  là hàm số đơn điệu nên phương trình (\*) có nhiều nhất một nghiệm.

Mặt khác  $f(2) = \log_2 2 + 2^2 = 5$ , suy ra  $t = 2$  là nghiệm duy nhất của phương trình (\*).

Với  $t = 2$ , ta có:  $\frac{2x^2 + 1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$  (\*\*).

Phương trình (\*\*) có  $\Delta' = 4 - 2 > 0$  nên luôn có hai nghiệm phân biệt và tích  $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ .

**Câu 24.** Một người gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất  $6,1\%$  năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc và tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu, giả định trong thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- \*A. 12 năm.      B. 11 năm.      C. 10 năm.      D. 13 năm.

**Lời giải**

Số tiền gửi ban đầu là  $A$  thì số tiền nhận được (cả gốc và lãi) sau  $n$  năm là  $S = A(1 + 0,061)^n$ . Theo đề bài số tiền lãi ít nhất bằng số tiền vốn ban đầu nên ta có:

$$\begin{aligned} S &\geq 2A \\ \Rightarrow A(1 + 0,061)^n &\geq 2A \\ \Leftrightarrow (1,061)^n &\geq 2 \\ \Leftrightarrow n &\geq \log_{1,061} 2 \approx 11,7062 \end{aligned}$$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó sẽ thu được số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu.

**Câu 25.** Cho  $x, y$  là hai số nguyên không âm thỏa mãn  $\log_2(x + y) = \log_3(x - y)$ . Hỏi tổng  $x + y$  là bao nhiêu?

- \*A. 1.      B. 4.      C. 3.      D. 7.

**Lời giải**

Điều kiện  $\begin{cases} x - y > 0 \\ x, y \in \mathbf{Z}_+ \end{cases}$ .

Đặt  $t = \log_2(x + y) = \log_3(x - y)$  ta có hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2^t \\ x - y = 3^t \end{cases}$  suy ra  $\frac{x + y}{x - y} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$ .

Ta có  $\begin{cases} x, y \in \mathbf{Z}_+ \\ x > y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \geq x - y \\ x - y \geq 1 \end{cases}$  do vậy  $\frac{x + y}{x - y} \geq 1$  từ đây ta có  $\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq 1 \Leftrightarrow t \leq 0$ .

Mặt khác  $x - y \geq 1$  do đó  $t = \log_3(x - y) \geq 0$ .

Từ đây  $t = 0$  vậy  $x + y = 1$ .

**Câu 26.** Ba năm trước, An tốt nghiệp Đại học với tấm bằng loại giỏi và xin được việc làm ngay sau khi ra trường. Sau 3 năm ra trường, An tiết kiệm được khoản tiền 600 triệu đồng. An quyết định vay thêm 400 triệu đồng từ ngân hàng để mở công ty riêng với hợp đồng thỏa thuận là đều đặn hàng tháng sau khi ngân hàng giải ngân cho vay 1 tháng An sẽ bắt đầu trả một khoản tiền cố định hàng tháng cho ngân hàng, mức lãi suất  $0,6\%$  tháng (lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình vay tiền) và trả hết nợ sau đúng 5 năm (60 tháng). Hỏi số tiền An cần trả hàng tháng cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào sau đây?

- A. 7,9018 triệu đồng.      B. 7,8530 triệu đồng.      \*C. 7,9582 triệu đồng.      D. 7,8030 triệu đồng.

**Lời giải**

An vay số tiền  $A = 400$  triệu đồng, lãi suất  $r = 0,6\%$ .  $a$  (triệu đồng) là số tiền mà An trả hàng tháng.

Gọi  $T_n$  là số tiền mà An phải trả sau  $n$  tháng.

Ta có:

$$T_1 = 400 \cdot (1 + 0,6\%) - a$$

$$T_2 = (400 \cdot (1 + 0,6\%) - a) \cdot (1 + 0,6\%) - a = 400 \cdot (1 + 0,6\%)^2 - a \cdot (1 + 0,6\%) - a$$

$$T_3 = (400 \cdot (1 + 0,6\%)^2 - a \cdot (1 + 0,6\%) - a) \cdot (1 + 0,6\%) - a$$

$$= 400 \cdot (1 + 0,6\%)^3 - a(1 + 0,6\%)^2 - a(1 + 0,6\%) - a$$

$$T_n = 400 \cdot (1 + 0,6\%)^n - a(1 + 0,6\%)^{n-1} - a(1 + 0,6\%)^{n-2} - \dots - a$$

$$= 400 \cdot (1 + 0,6\%)^n - (a(1 + 0,6\%)^{n-1} + a(1 + 0,6\%)^{n-2} + \dots + a) = 400 \cdot (1 + 0,6\%)^n - a \frac{(1 + 0,6\%)^n - 1}{0,6\%}$$

$$T_{60} = 0 \Leftrightarrow 400 \cdot (1 + 0,6\%)^{60} - a \frac{(1 + 0,6\%)^{60} - 1}{0,6\%} = 0 \Rightarrow a \approx 7,9582$$

Theo đề bài triệu đồng.

**Câu 27.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+3) \geq 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 3x + 4y$  có dạng  $5\sqrt{M} + m$  với  $M, m \in \mathbb{Z}$ . Tính  $M + m$ ?

A. -2.

B. 11.

\*C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

$$\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+3) \geq 1 \Leftrightarrow 2x-4y+3 \geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 6$$

$$P = 3x + 4y = 3(x-1) + 4(y+2) - 5$$

$$(3(x-1) + 4(y+2))^2 \leq (3^2 + 4^2)((x-1)^2 + (y+2)^2) \leq 150$$

Ta có

$$\text{Suy ra } P = 3(x-1) + 4(y+2) - 5 \leq 5\sqrt{6} - 5$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = \pm \frac{3\sqrt{6}}{5} + 1; y = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5} - 2. \text{ Giá trị lớn nhất của } P \text{ bằng } 5\sqrt{6} - 5.$$

$$\text{Vậy } M + m = 6 - 5 = 1$$

**Câu 28.** Biết phương trình  $\log_2^2(x^2+1) - m \log_2(x^2+1) + 8 - m = 0$  có đúng ba nghiệm phân biệt. Hỏi  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

A. (21; 28)

B. (1; 9)

\*C. (-10; 1)

D. (15; 21)

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \log_2(x^2+1), t \geq 0$$

$$\text{Phương trình trở thành } t^2 - mt + 8 - m = 0 (*)$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m^2 - 4(8-m) > 0 \\ 8-m=0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=8$$

**Câu 29.** Số  $2021^m$  ( với  $m$  là số tự nhiên) viết trong hệ thập phân có 6678 chữ số. Kết luận nào sau đây đúng?

- A.  $2010 < m < 2015$ . B.  $m < 2010$ . C.  $m > 2025$ . \*D.  $2015 < m < 2025$ .

**Lời giải**

Áp dụng lý thuyết số tự nhiên  $x^\alpha$  có  $n$  chữ số thập phân thì  $n = [\alpha \cdot \log x] + 1$  với  $[\alpha \cdot \log x]$  là phần nguyên của  $\alpha \cdot \log x$

Vậy  $[m \cdot \log 2021] = 6677 \Rightarrow m = 2020$ .

**Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $4^x - 6 \cdot 2^x + m \geq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

- A.  $m \geq 0$ . B.  $m \geq -9$ . C.  $m \leq 0$ . \*D.  $m \geq 9$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = 2^x > 0 \Rightarrow$  bất phương trình đã cho tương đương  $t^2 - 6t + m \geq 0$  đúng với mọi  $t \in (0; +\infty)$ .  
 $\Rightarrow m \geq -t^2 + 6t = f(t), \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $f(t)$ .

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $t$     | 0 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |   | + | -         |
| $f(t)$  | 0 | 9 | $-\infty$ |

$\Rightarrow m \geq f(t), \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow m \geq \max f(t), \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow m \geq 9$ . Vậy  $m \geq 9$ .

**Câu 31.** Cho phương trình  $4^x - 2m \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in [-10; 7]$  để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 7. B. 8. \*C. 6. D. 9.

**Lời giải**

$$4^x - 2m \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2m \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x (t > 0)$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t^2 - 2mt + 3 = 0 \Leftrightarrow 2m = t + \frac{3}{t} \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(t) = t + \frac{3}{t}$$

$$\text{Có: } f'(t) = 1 - \frac{3}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $f(t) = t + \frac{3}{t}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$

|         |           |            |             |           |
|---------|-----------|------------|-------------|-----------|
| $t$     | 0         | $\sqrt{3}$ | $+\infty$   |           |
| $f'(t)$ |           | -          | 0           | +         |
| $f(t)$  | $+\infty$ |            | $2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình  $(1)$  có nghiệm dương  
 $\Leftrightarrow 2m \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{3}$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z}; m \in [-10; 7] \Rightarrow m \in \{2; 3; \dots; 7\}$ . Có 6 giá trị  $m$  thỏa mãn.

**Câu 32.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|        |           |   |                 |           |
|--------|-----------|---|-----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 3 | 1               | $+\infty$ |

Bất phương trình  $f(x) < \cos^2 x + 3m$  đúng với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  khi và chỉ khi

A.  $m \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{6}$ .

B.  $m > \frac{1}{3}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

C.  $m \geq \frac{1}{3}[f(0) - 1]$ .

\*D.  $m \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải**

• Từ bảng biến thiên của hàm số  $y = f'(x)$  ta thấy  $f'(x) > 1, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

• Xét bất phương trình  $f(x) < \cos^2 x + 3m$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3m > f(x) - \cos^2 x$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

• Xét hàm số  $g(x) = f(x) - \cos^2 x$  với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$g'(x) = f'(x) + 2\cos x \sin x = f'(x) + \sin 2x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có

Bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(x) - \cos^2 x$  với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

|         |        |                               |
|---------|--------|-------------------------------|
| $x$     | 0      | $\frac{\pi}{2}$               |
| $g'(x)$ |        | +                             |
| $g(x)$  | $g(0)$ | $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |

Khi đó:  $3m > g(x)$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3m \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3m \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$   
 $\Leftrightarrow 3m \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 33.** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$  có 2 nghiệm thực phân biệt?

\*A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

**Lời giải**

Điều kiện  $\begin{cases} 2x+m > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ .

Với điều kiện trên ta có:

$$\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1 \Leftrightarrow \log_2(2x+m) + 2(2x+m) = \log_2 \frac{x^2}{2} + x^2$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_2(t) + 2t, f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2 > 0, \forall t > 0$ .

Từ đó ta có:  $f(2x+m) = f\left(\frac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow 2x+m = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow m = \frac{x^2}{2} - 2x$ .

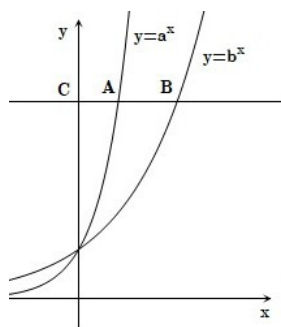
Đặt  $g(x) = \frac{x^2}{2} - 2x, x \in (0; +\infty)$   $g'(x) = 2x - 2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên hàm số  $g(x)$  trên  $(0; +\infty)$ :

|      |   |            |            |
|------|---|------------|------------|
| $x$  | 0 | 1          | $+\infty$  |
| $y'$ |   | -          | 0          |
| $y$  | 0 | $\searrow$ | $\nearrow$ |
|      |   | $3/2$      | $+\infty$  |

Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt khi  $m \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ . Vậy có 1 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

**Câu 34.** Cho  $a, b$  là các số thực dương khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục hoành mà cắt các đồ thị  $y = a^x, y = b^x$  và trục tung lần lượt tại  $A, B, C$  phân biệt ta đều có  $2CB = 5CA$  (hình vẽ minh họa). Khẳng định nào sau đây là đúng?



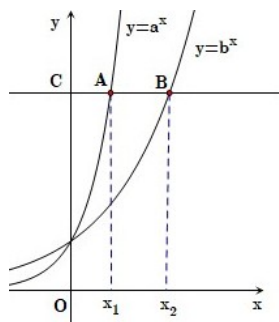
A.  $2b = 5a$ .

B.  $2a = 5b$ .

\*C.  $a^2 = b^5$ .

D.  $b^2 = a^5$ .

**Lời giải**



Giả sử đường thẳng  $y=t$  cắt các đồ thị  $y=a^x$ ,  $y=b^x$  và trục tung lần lượt tại  $A$ ,  $B$ ,  $C$  phân biệt khi đó  $A(x_1;t)$ ,  $B(x_2;t)$ ,  $C(0;t)$ .

Ta có  $CA=x_1$ ,  $CB=x_2 \Rightarrow 2x_2=5x_1 \Rightarrow x_1=\frac{2}{5}x_2$ .

Mặt khác ta có  $a^{x_1}=b^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2 \log_a b \Rightarrow \log_a b=\frac{2}{5} \Rightarrow b^5=a^2$ .

**Câu 35.** Cho hàm số  $f(x)=\log_{0,2}(x^2-6x)$ . Gọi  $S$  là tập nghiệm của bất phương trình  $f'(x)>0$ . Số các nghiệm nguyên thuộc nửa khoảng  $(-2021;2021]$  của tập  $S$  là

- A. 2023. B. 2019. \*C. 2020. D. 2022.

**Lời giải**

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x>0 \\ \frac{2x-6}{(x^2-6x).\ln 0,2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x>0 \\ \frac{2x-6}{(x^2-6x)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow x<0$$

Do đó  $S=(-\infty;0)$ .

Vậy có 2020 nghiệm nguyên thuộc nửa khoảng  $(-2021;2021]$  của tập  $S$ .

**Câu 36.** Tất cả các giá trị của  $m$  để bất phương trình:  $2020^x+21^x \geq m.2022^x$  có nghiệm không âm là:

- \*A.  $m \leq 2$ . B.  $m \geq 1$ . C.  $m \leq 3$ . D.  $m \leq 4$ .

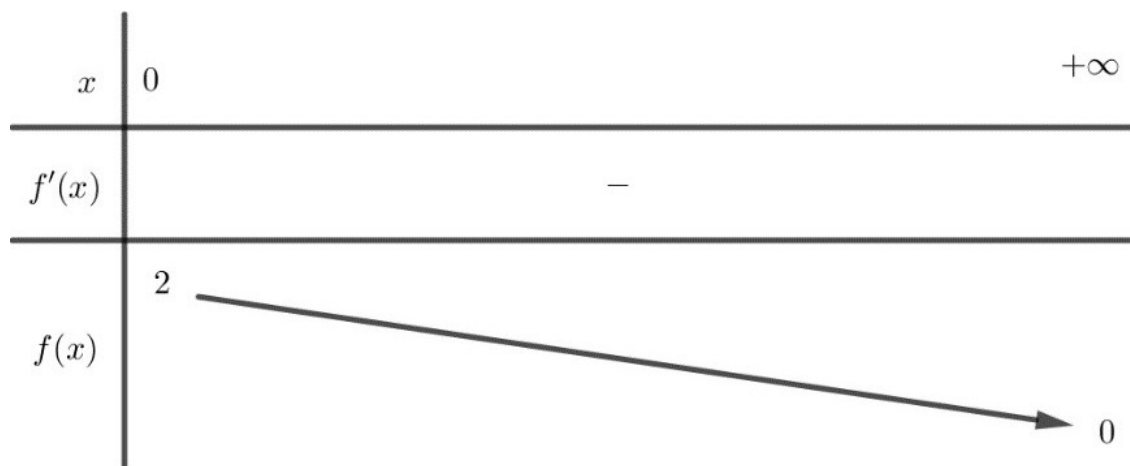
**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2020^x+21^x \geq m.2022^x \Leftrightarrow m \leq \left(\frac{2020}{2022}\right)^x + \left(\frac{21}{2022}\right)^x$$

Xét hàm số  $f(x)=\left(\frac{2020}{2022}\right)^x + \left(\frac{21}{2022}\right)^x$  với  $x \geq 0$  có  $0 < \frac{2020}{2022}; \frac{21}{2022} < 1$  nên hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $(0;+\infty)$ .

BBT





Vậy bất phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow m \leq 2$ .

**Câu 37.** Xét  $a, b$  là hai số thực dương tùy ý. Đặt  $x = 2020 \log_{2^{2020}}(a^2 + b^2)$ ,  $y = \frac{1}{2021} \log_2(a + b)^{2021}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- \*A.  $x - 2y \geq -1$ .      B.  $x - 2y \leq -1$ .      C.  $x - 2y > -1$ .      D.  $x - 2y < -1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\forall a, b > 0$  thì  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ,  $x = \log_2(a^2 + b^2)$ ,  $y = \log_2(a + b)$   
 $\Rightarrow x - 2y = \log_2(a^2 + b^2) - 2\log_2(a + b) = \log_2\left(\frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}\right) \geq \log_2\frac{1}{2} \Rightarrow x - 2y \geq -1$ .

**Câu 38.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $A = 2 \cdot 3^y + \frac{1}{24} \cdot 3^{2x}$  là

A.  $A_{\min} = 2$ .      B.  $A_{\min} = \frac{81}{8}$ .      \*C.  $A_{\min} = \frac{9}{2}$ .      D.  $A_{\min} = \frac{51}{8}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ .

Xét:  $A = 2 \cdot 3^y + \frac{1}{24} \cdot 3^{2x} = 2 \cdot 3^{2-x} + \frac{1}{24} \cdot 3^{2x} = \frac{18}{3^x} + \frac{1}{24} \cdot (3^x)^2$ .

Đặt  $t = 3^x$ ,  $t > 0$ , khi đó  $A = \frac{18}{t} + \frac{t^2}{24}$ .

Xét:  $A' = \frac{t}{12} - \frac{18}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 6$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $A = \frac{18}{t} + \frac{t^2}{24}$  trên  $(0; +\infty)$ .

|      |   |   |           |
|------|---|---|-----------|
| $x$  | 0 | 6 | $+\infty$ |
| $A'$ |   | 0 |           |
| $A$  |   |   |           |

Khi đó:  $A$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $t = 6 \Rightarrow A_{\min} = \frac{9}{2}$ .

**Câu 39.** Cho hàm số  $f(x) = e^x - e^{-x} + 2020x$ . Có bao nhiêu số nguyên dương  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$  có đúng 10 số nguyên dương  $x$  thỏa mãn bất phương trình  $f(mx+1) + f(2x-2021) < 0$ ?

- A. 2018.                      B. 19.                      \*C. 18.                      D. 2019.

**Lời giải**

Ta có:  $f(-x) = e^{-x} - e^x - 2020x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Hàm số  $f(x)$  là hàm số lẻ.

Lại có:  $f'(x) = e^x + e^{-x} + 2020 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Khi đó:  $f(mx+1) + f(2x-2021) < 0 \Leftrightarrow f(mx+1) < f(2021-2x)$

$$\Leftrightarrow mx+1 < 2021-2x \Leftrightarrow (m+2)x < 2020 \Leftrightarrow x < \frac{2020}{m+2} \text{ (do } m > 0)$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 10 < \frac{2020}{m+2} \leq 11 \Leftrightarrow \frac{1998}{11} \leq m < 200$$

Do  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{182; 183; \dots; 199\}$ .

Vậy có 18 số nguyên dương  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 40.** Biết rằng phương trình  $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x$  có hai nghiệm  $x_1; x_2$ . Giá trị của  $x_1^2 + x_2^2$  bằng

- \*A. 13.                      B. 2.                      C. 5.                      D. 25.

**Lời giải**

Phương trình đã cho xác định  $\Leftrightarrow x > 0$

Khi đó:  $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 x \log_3 x + \log_3 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (1 - \log_3 x) - (1 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \log_3 x)(\log_2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_3 x = 0 \\ \log_2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_3 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $x_1 = 2; x_2 = 3 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

Vậy  $x_1^2 + x_2^2 = 13$ .

**Câu 41.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $9^x - (2m-2) \cdot 3^x - m+4 = 0$  có hai nghiệm phân biệt?

- A. 3.                      \*B. 1.                      C. 2.                      D. Vô số.

**Lời giải**

• Đặt  $t = 3^x > 0$ , phương trình trở thành  $t^2 - (2m-2)t - m+4 = 0 (*)$ .

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  phương trình  $(*)$  có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + m - 4 > 0 \\ S = 2m - 2 > 0 \\ P = -m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 3 > 0 \\ m > 1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ m < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ m > 1 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} < m < 4$$

• Do  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 3$ . Vậy có 1 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn ycbt.

**Câu 42.** Cho phương trình  $x^{\log_{2020}(x^3)-a} = 2021$ , với  $a$  là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- \*A.  $1 \leq a \leq 2$ .      B.  $3 \leq a \leq 4$ .      C.  $4 < a \leq 5$ .      D.  $2 \leq a < 3$ .

**Lời giải**

$$x^{\log_{2020}(x^3)-a} = 2021 \Leftrightarrow \log_{2020} \left[ x^{\log_{2020}(x^3)-a} \right] = \log_{2020} 2021 \Leftrightarrow (3\log_{2020} x - a)\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_{2020} x)^2 - a\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0 \quad (*)$$

$$x_1 \cdot x_2 = 32 \Rightarrow \log_{2020}(x_1 \cdot x_2) = \log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \log_{2020} 32$$

$$\text{Mà } \log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3 \cdot \log_{2020} 32$$

**Câu 43.** Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-20; 20)$  để phương trình  $\log_3 x + \log_3 (m-x) = 2$  có nghiệm thực

- A. 15.      \*B. 14.      C. 24.      D. 23.

**Lời giải**

$$\text{Đk: } \begin{cases} x > 0 \\ m > x \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_3 x + \log_3 (m-x) = 2 \Leftrightarrow \log_3 x(m-x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - mx + 9 = 0$$

$$\text{YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 36 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 6$$

Mà  $m \in (-20; 20), m \in \mathbb{Z}$  nên  $6 \leq m \leq 19$ .

Vậy có 14 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn.

**Câu 44.** Cho phương trình  $\log_3^2(9x) - 5\log_{\sqrt{3}} x + m = 7$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x_1 < x_2$  thỏa mãn  $x_2 - 81x_1 < 0$ ?

- A. 7.      \*B. 3.      C. 4.      D. 11.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \log_3^2(9x) - 5\log_{\sqrt{3}} x + m = 7 \Leftrightarrow (2 + \log_3 x)^2 - 10\log_3 x + m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 6\log_3 x + m - 3 = 0$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 12$$

$$\text{Khi đó } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < \log_3(81x_1) \Leftrightarrow \log_3 x_2 - \log_3 x_1 < 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x_2 + \log_3 x_1)^2 - 4\log_3 x_2 \cdot \log_3 x_1 < 16 \Leftrightarrow 36 - 4(m-3) < 16 \Leftrightarrow m > 8$$

$$\text{Vậy } 8 < m < 12 - m \in \mathbb{N} \rightarrow m \in \{9, 10, 11\}$$

**Câu 45.** Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 8% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Để người đó nhận được số tiền 300 triệu đồng (cả tiền gốc và lãi) thì cần gửi ít nhất bao nhiêu năm, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

- A. 14 năm.                      \*B. 15 năm.                      C. 16 năm.                      D. 10 năm.

**Lời giải**

- Theo dữ kiện bài toán: đây là hình thức gửi tiền vào ngân hàng theo lãi suất kép.
- Số tiền (cả tiền gốc và lãi) tại thời điểm nhận được tính theo công thức lãi kép là:

$$T_n = A \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow 300000000 = 100000000 \cdot (1+8\%)^n \Leftrightarrow n = \log_{1,08} 3 \approx 14,27 \text{ (năm)}.$$

Vậy người gửi tiền vào ngân hàng cần gửi ít nhất 15 năm.

**Câu 46.** Tỷ lệ tăng dân số hằng năm của một quốc gia  $X$  là 0,2%. Năm 1998 dân số của quốc gia  $X$  là 125500000 người. Hỏi sau bao nhiêu năm thì dân số của quốc gia  $X$  là 140000000 người?

- A. 54 năm.                      B. 6 năm.                      \*C. 55 năm.                      D. 5 năm.

**Lời giải**

- Gọi  $A$  là số dân của quốc gia  $X$  tại thời điểm năm 1998.

Tỷ lệ tăng dân số hằng năm của quốc gia  $X$  là  $r$ .

$A_n$  là số dân của quốc gia  $X$  sau  $n$  năm.

- Ta có:  $A_1 = A + A \cdot r = A(1+r)$

$$A_2 = A_1 + A_1 \cdot r = A_1(1+r) = A(1+r)^2$$

$$A_3 = A_2 + A_2 \cdot r = A_2(1+r) = A(1+r)^3$$

...

$$A_n = A(1+r)^n = 125500000(1+0,002)^n = 125500000 \cdot (1,002)^n$$

$$125500000 \cdot (1,002)^n = 140000000 \Leftrightarrow (1,002)^n = \frac{280}{251}$$

- Từ đó suy ra:

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,002} \frac{280}{251} \approx 54,72298215$$

- Vậy cần phải sau 55 năm.

**Câu 47.** Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam tính đến hết tháng 6 năm 2020 khoảng  $97,3$  triệu người. Giả sử tỷ lệ gia tăng dân số hằng năm của Việt Nam trong giai đoạn 2020 đến 2025 ở mức không đổi 1,14%. Hỏi đến năm nào dân số Việt Nam đạt mức  $120,5$  triệu người?

- \*A. 2039.                      B. 2042.                      C. 2043.                      D. 2037.

**Lời giải**

- Gọi  $A_n$  là dân số của Việt Nam sau  $n$  năm, tính từ năm 2020.

Khi đó ta có  $A_n = 97,3 \cdot (1+1,14\%)^n$ .

$$97,3 \cdot (1+1,14\%)^n = 120,5 \Leftrightarrow n = \log_{1,0114} \frac{120,5}{97,3} \approx 18,86.$$

- Theo đề ta có:

- Vậy sau 19 năm, tức là đến năm 2039.

**Câu 48.** Cho phương trình  $\log_2^2 x - 4\log_2 x + m - 3 = 0$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $x_1 > x_2 > 1$ ?

\*A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

**Lời giải**

Đặt  $\log_2 x = t \ (t > 0)$ . Phương trình trở thành:  $t^2 - 4t + m - 3 = 0 \quad (1)$

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  Phương trình  $(1)$  có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - (m - 3) > 0 \\ 4 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 7$$

Do  $m$  nguyên nên  $m \in \{4; 5; 6\}$ .

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 49.** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2 + 2\log_2 x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} y$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 10x^2 - 2(x + y) - 3$  là

A. -3.

B.  $-\frac{1}{9}$ .

C.  $\frac{1}{2}$ .

\*D.  $-\frac{7}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2 + 2\log_2 x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} y \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 x^2 = \log_2 y \Leftrightarrow 4x^2 = y$

Khi đó  $P = 10x^2 - 2(x + y) - 3 = 10x^2 - 2(x + 4x^2) - 3 = 2x^2 - 2x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \geq -\frac{7}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P = 10x^2 - 2(x + y) - 3$  là  $-\frac{7}{2}$  khi  $x = \frac{1}{2}; y = 1$

**Câu 50.** Có bao nhiêu giá trị của tham số thực  $m$  để phương trình  $9^{x^2} - 3m \cdot 3^{x^2} + 2m^2 = 0$  có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 0.

\*B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Lời giải**

Xét phương trình  $9^{x^2} - 3m \cdot 3^{x^2} + 2m^2 = 0$

Đặt  $t = 3^{x^2} \ (t > 0)$

Suy ra phương trình có dạng:  $t^2 - 3mt + 2m^2 = 0 \quad (*)$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình  $(*)$  có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$2m^2 - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pt $(*)$  có nghiệm  $t = 1$ , suy ra

$$m = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ t = 2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\log_3 2} \end{cases}$$

Với

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Leftrightarrow 3^{x^2}=1 \Leftrightarrow x=0 \\ t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3^{x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=\log_3 \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

Với (không thỏa ycbt)

Suy ra  $m=1$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 51.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $2020^{2x} - 3 \cdot 2020^x + 1 = 0$  là:

A. 3.

B. 1.

\*C. 0.

D. -1.

**Lời giải**

Đặt  $2020^x = t, (t > 0)$

$$pt \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \log_{2020} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x_2 = \log_{2020} \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Khi } x_1 + x_2 = \log_{2020} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \log_{2020} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.$$

**Câu 52.** Bác Hải gửi 100 triệu đồng vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm bác rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại bác tiếp tục gửi vào ngân hàng. Tính số tiền lãi bác Hải thu được sau 10 năm.

A. 46,933 triệu.

B. 82,453 triệu.

C. 34,480 triệu.

\*D. 81,413 triệu.

**Lời giải**

Số tiền nhận được của bác Hải sau 5 năm đầu gửi ngân hàng là:  $T_1 = 100 \cdot 10^6 (1+r)^5$

$\Rightarrow$  Số tiền lãi thu được sau 5 năm là:  $L_1 = T_1 - 100 \cdot 10^6 = 100 \cdot 10^6 [(1+r)^5 - 1]$

Số tiền thu được sau khi gửi vào ngân hàng 5 năm tiếp theo là:  $T_2 = \left( \frac{T_1}{2} \right) (1+r)^5$

$\Rightarrow$  Số tiền lãi thu được sau khi gửi lần 2 là:  $L_2 = T_2 - \frac{T_1}{2} = \frac{T_1}{2} [(1+r)^5 - 1]$

$$= \frac{100 \cdot 10^6 (1+r)^5}{2} [(1+r)^5 - 1]$$

Vậy tổng số tiền lãi của bác Hải sau 10 năm gửi ngân hàng là:  $L_1 + L_2 \approx 81,413$  triệu

**Câu 53.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  lớn hơn  $-10$  để phương trình  $16^x - 2 \cdot 12^x + (m+2)9^x = 0$  có nghiệm dương?

A. 7.

\*B. 8.

C. 9.

D. 10.

**Lời giải**

$$16^x - 2 \cdot 12^x + (m+2)9^x = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{4}{3} \right)^{2x} - 2 \cdot \left( \frac{4}{3} \right)^x + m+2 = 0 (*)$$

Đặt  $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ , với  $t > 0$ . Khi đó, (\*) trở thành:  $t^2 - 2t + m + 2 = 0$  (1).

Để phương trình (\*) có nghiệm dương khi và chỉ khi (1) có nghiệm  $t > 1$ .

Khi đó:  $t^2 - 2t + m + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = -1 - m$ .

Vì  $t > 1$  nên  $-1 - m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ .

Vậy  $m < -1$  thỏa yêu cầu đề bài.

Kết hợp với điều kiện bài toán ta được  $-10 < m < -1$ .

Mặt khác  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; -8; \dots; -2\}$ . Vậy có 8 giá trị nguyên của  $m$ .

**Câu 54.** Phương trình  $\ln(x^2 - 1) \cdot \ln(x + 2) \cdot \ln(x + 3) = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

\*D. 2.

**Lời giải**

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \\ x > -2 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ x > 1 \end{cases}.$$

Điều kiện:

$$\ln(x^2 - 1) \cdot \ln(x + 2) \cdot \ln(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2 - 1) = 0 \\ \ln(x + 2) = 0 \\ \ln(x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \\ x + 2 = 1 \\ x + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ta có

So sánh với điều kiện ta có  $x = \pm\sqrt{2}$  thỏa mãn.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm.

**Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $x$  thỏa mãn ba giá trị  $\log_2 x; \log_4 x; 3$  là độ dài ba cạnh của một tam giác?

\*A. 59.

B. 62.

C. 61.

D. 58.

**Lời giải**

Để 3 giá trị  $\log_2 x; \log_4 x; 3$  tạo thành một tam giác thì:

$$|\log_4 x - 3| < \log_2 x < \log_4 x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x - 3 < \log_2 x, x \geq 64 \\ -\log_4 x + 3 < \log_2 x, x < 64 \\ \log_2 x < \log_4 x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2 x - 3 < \log_2 x, x \geq 64 \\ -\frac{1}{2}\log_2 x + 3 < \log_2 x, x < 64 \\ \log_2 x < \frac{1}{2}\log_2 x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > -3, x \geq 64 \\ \log_2 x > 2, x < 64 \\ \log_2 x < 6 \Leftrightarrow x < 64 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{8}, x \geq 64 \\ x > 4, x < 64 \\ x < 64 \end{cases} \Rightarrow 4 < x < 64$$

Kết hợp với điều kiện:  $\log_2 x > 0, \log_4 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Ta được:  $x \in \{5; 6; 7; \dots; 61; 62; 63\}$ . Vậy có 59 giá trị cần tìm.

**Câu 56.** Cho các số thực dương  $x \neq 1, y \neq 1$  thỏa mãn  $\log_2 x = \log_y 16$  và tích  $xy = 64$ . Giá trị của biểu thức  $\left(\log_2 \frac{x}{y}\right)^2$  là

\*A. 20.

B. 25.

C.  $\frac{45}{2}$ .

D.  $\frac{25}{2}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết  $\log_2 x = \log_y 16$  ta suy ra  $\log_2 x = \frac{4}{\log_2 y} \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_2 y = 4$

Lại có  $xy = 64$  suy ra  $\log_2 x + \log_2 y = 6$

$$\left(\log_2 \frac{x}{y}\right)^2 = (\log_2 x - \log_2 y)^2 = (\log_2 x + \log_2 y)^2 - 4\log_2 x \cdot \log_2 y = 36 - 16 = 20$$

**Câu 57.** Một sinh viên mới ra trường, đi làm, dự định mua xe máy SH trị giá 80 triệu đồng bằng cách đầu mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng số tiền 6 triệu đồng với lãi suất 0,5% trên mỗi tháng theo thể thức lãi kép. Hỏi sau thời gian ít nhất bao lâu sinh viên đó đủ số tiền để mua xe máy SH nói trên?

A. 12 tháng.

B. 11 tháng.

\*C. 13 tháng.

D. 14 tháng.

**Lời giải**

• Đặt  $A_0 = 6$ ;  $r = 0,005$ . Gọi số tiền (cả gốc lẫn lãi) ở cuối tháng thứ  $n$  là  $T_n$

• Ta có:  $T_1 = A_0(1+r)$ ;

$$T_2 = (T_1 + A_0)(1+r) = A_0 \left[ (1+r)^2 + (1+r) \right];$$

$$T_3 = (T_2 + A_0)(1+r) = A_0 \left[ (1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r) \right];$$

Sử dụng chứng minh quy nạp ta có:

$$T_n = A_0 \left[ (1+r)^n + (1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) \right] = A_0 \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 6.1.005 \cdot \frac{1,005^n - 1}{0,005}$$

$$T_n \geq 80 \Leftrightarrow 6.1.005 \cdot \frac{1,005^n - 1}{0,005} \geq 80 \Leftrightarrow n \geq 12,87759257...$$

• Yêu cầu bài toán ta có:

• Vì  $n \in \mathbb{Z}$  và  $n$  nhỏ nhất nên  $n = 13$ .

**Câu 58.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

|         |           |                    |                   |                         |
|---------|-----------|--------------------|-------------------|-------------------------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{\pi}{2}$   | $\frac{\pi}{2}$   | $+\infty$               |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$<br>$-4$ | $\nearrow$<br>$0$ | $\searrow$<br>$-\infty$ |

Bất phương trình  $e^{f(x)} - 4x > m + \cos(\pi x)$  có nghiệm trên khoảng  $(-1; 1)$  khi và chỉ khi



\*A.  $m \leq e^{f(1)} - 3$ .

B.  $m < e^{f(-1)} + 5$ .

C.  $m < e^{f(1)} - 3$ .

D.  $m \leq e^{f(-1)} + 5$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

• Ta có  $e^{f(x)} - 4x > m + \cos(\pi x) \Leftrightarrow m < e^{f(x)} - 4x - \cos(\pi x)$

• Xét  $g(x) = e^{f(x)} - 4x - \cos(\pi x)$  trên  $[-1; 1]$

• Theo BBT, ta có:  $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} - 4 + \pi \sin(\pi x) < 0 \quad \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow \min_{[-1; 1]} g(x) = g(1) = e^{f(1)} - 3$

• Theo yêu cầu bài toán:  $m \leq g(1) = e^{f(1)} - 3$

**Câu 59.** Một sinh viên giỏi  $X$  được một công ty trao quỹ học bổng 60 triệu đồng, số tiền đó được công ty gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,5% mỗi tháng, cuối mỗi tháng sinh viên đó được rút đều đặn số tiền 4 triệu đồng. Hỏi tháng cuối cùng sinh viên đó rút bao nhiêu tiền thì hết quỹ học bổng trên?

A. 2,35 triệu đồng.

\*B. 2,53 triệu đồng.

C. 3,53 triệu đồng.

D. 1,53 triệu đồng.

**Lời giải**

• Quỹ học bổng còn lại sau 1 tháng là:

$$P_1 = 60(1 + 0.5\%) - 4 = 60.1,005 - 4$$

• Quỹ học bổng còn lại sau 2 tháng là:

$$P_2 = P_1.1,005 - 4 = (60.1,005 - 4).1,005 - 4 = 60.(1,005)^2 - 4.1,005 - 4$$

• Quỹ học bổng còn lại sau n tháng là:

$$P_n = 60.(1,005)^n - 4.(1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \dots + 1) = 60.(1,005)^n - 4 \cdot \frac{1 - 1,005^n}{1 - 1,005}$$

• Quỹ học bổng còn lại sau 16 tháng là:

$$P_{16} = 60.(1,005)^{16} - 4 \cdot \frac{1 - 1,005^{16}}{1 - 1,005} = -1,472651944 < 0$$

• Quỹ học bổng còn lại sau 15 tháng là:

$$P_{15} = 60.(1,005)^{15} - 4 \cdot \frac{1 - 1,005^{15}}{1 - 1,005} = 2,514774185$$

• Suy ra tháng cuối cùng sinh viên đó rút được 2,527348056 triệu đồng thì hết quỹ học bổng trên.

**Câu 60.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để phương trình  $\frac{1}{\ln(x+2)} + \frac{7}{2^x - 2} = |x| + m$  có 3 nghiệm phân biệt.

A. 2.

B. 8.

C. 10.

\*D. 4.

**Lời giải**

| x      | -2         | -1         | 1          | $+\infty$  |
|--------|------------|------------|------------|------------|
| $f(x)$ | -6,451     | $+\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$  |
|        | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
|        |            | $-\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$  |

• Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình ban đầu có 3 nghiệm thì  $m < -6,451$ .

• Vậy  $m \in [-7; -8; -9; -10]$

**Câu 61.** Có bao nhiêu số nguyên dương  $y$  sao cho ứng với mỗi số  $y$  có không quá 5 số nguyên  $x$  thỏa mãn  $(3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x - 1)(3^x - y) \leq 0$

A. 9.

B. 27.

\*C. 81.

D. 3.

**Lời giải**

Ta có:  $(3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x - 1)(3^x - y) \leq 0 \Leftrightarrow [3 \cdot (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1](3^x - y) \leq 0 \Leftrightarrow (3^x + 1)(3 \cdot 3^x - 1)(3^x - y) \leq 0$   
 $\Leftrightarrow (3^{x+1} - 1)(3^x - y) \leq 0$  (do  $3^x + 1 > 0, \forall x$ ).

TH1:  $3^{x+1} - 1 \leq 0 \Rightarrow x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$  ta có  $3^x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3^x \leq 3^{-1} = \frac{1}{3}$  (vô lý vì  $y$  là số nguyên dương).

TH2:  $3^{x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$  ta có  $3^x - y \leq 0 \Rightarrow y \geq 3^x \geq 3^{-1} = \frac{1}{3}$  (luôn đúng vì  $y$  là số nguyên dương).

Để ứng với mỗi số  $y$  có không quá 5 số nguyên  $x$  thỏa mãn bất phương trình nên nghiệm  $x$  chỉ nằm trong khoảng  $\{-1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow y \leq 3^4 = 81$ .

Vậy có 81 số nguyên dương  $y$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

----HẾT----

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>