MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BỔ ĐỀ THƯỜNG GẶP..3
1. Tính chất của bất đẳng thức..3
2. Phương pháp biến đổi tương đương và những bổ đề thường gặp....................................3
3. Bất đẳng thức cơ bản thường gặp...8
4. Một số bài tập tự luyện, củng cố kiến thức:...16
CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP CHỌN ĐIỂM RƠI..17
1. Lý thuyết phương pháp chọn điểm rơi...17
2. Điểm rơi của biểu thức đối xứng và ác kỹ thuật liên quan.......................................17
3. Điểm rơi của biểu thức không đối xứng và kỹ thuật liên quan.....................................29
4. Điểm rơi đạt tại biên và các ví dụ minh hoạ..35
5. Ứng dung nguyên lý Dirichlet chứng minh bất đẳng thức...37
6. Một số bài lập tự luyện củng cố kiến thức..39
CHỦ ĐỀ 3 : PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN...42
1. Giới thiệu phương pháp đổi biến..42
2. Phân loại các kiểu đổi biến :..42
3. Bất đẳng thức Schur và ứng dụng...52
4. Một số bài tập tự luyện củng cố kiến thức..55
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH (UCT)..56
1. Giới thiệu phương pháp hệ số bất định (UCT)...56
2. Các ví dụ minh họa...56
3. Kỹ thuật chuẩn hóa bất đẳng thức...61
4. Một số bài tập tự luyện củng cố kiến thức...64
CHỦ ĐỀ 5: CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC................................66
1.Phương pháp đồng bậc chứng minh bất đẳng thức..66
2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky..67
3. Phương pháp miền giá trị...71
4. Phương pháp dồn biến..72
5. Phương pháp phản chứng...74
6. Phương pháp làm trội...75
7. Một số bài tập tự luyện, củng cố kiến thức..75
CHỦ ĐỀ 6: CÁC BÀI BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC...76
CHỦ ĐỀ 7: ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC..86

1. Ứng dụng vào dạng toán rút gọn biểu thức..86
2. Ứng dụng vào dạng toán liên quan định lý Vi-et...89
3.Ứng dụng vào giải phương trình vô tỉ và hệ phương trình vô tỉ...92
PHẦN B – GỢI Ý, ĐÁP ÁN..95

A- CÁC CHỦ ĐỀ DẲNG THỨC
CHỦ ĐỀ 1: CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BỔ ĐỀ THƯỜNG GẶP

1. Tính chất của bất đẳng thức.

1.1. Tính chất bắc cầu.

Với mọi số thực a,b,c:
Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$
Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

1.2. Tính chất liên hệ phép cộng và phép trừ.

Với mọi số thực a,b,c :
Nếu $a > b$ thì $a \pm c > b \pm c$
Nếu $a < b$ thì $a \pm c < b \pm c$

1.3 Tính chất liên hệ phép nhân và phép chia:
Với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $a > b$:

Nếu $c > 0$ thì $ac > bc$ và $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
Nếu $c = 0$ thì $ac = bc$
Nếu $c < 0$ thì $ac < bc$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
Nếu $a > b$ và $ab > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
Nếu $a > b$ và $ab < 0$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
Với mọi số thực a, b,c ,d thỏa mãn $a > b$ và $c > d$.

Nếu $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

Nếu $\begin{cases} b < a < 0 \\ d < c < 0 \end{cases} \Rightarrow ac < bd$

Nếu $\begin{cases} a > b > 0 \\ d < c < 0 \end{cases} \Rightarrow ad < bc$

2. Phương pháp biến đổi tương đương và những bổ đề thường gặp.

2.1. Phương pháp biến đổi tương đương.

Phương pháp biến đổi tương đương là một trong những phương pháp thường được dùng để chứng minh bất đẳng thức.

Muốn sử dụng thành thạo phương pháp biên đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức thì chúng ta cần ghi nhớ các khái niệm, định lý và tính chất về bất đẳng thức để sử dụng vào phép biến đổi tương đương.

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ thì chúng ta thường dùng phương pháp xét hiệu, cụ thể hơn chúng ta đi xét các bổ đề dưới đây:

2.2 Các bổ đề thường gặp khi làm bất đẳng thức

Bổ đề 1.1 . Cho *a,b* là hai số thực .

Chứng minh rằng : $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

Chứng minh

Thực hiện xét hiệu , ta được:

$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \ge 0 \ (\forall a,b)$

$\Rightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$

Thực hiện xét hiệu, ta được :

$2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = (a-b)^2 \ge 0 \ (\forall a,b)$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$

Vậy $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

Đẳng thức xảy ra khi : a = b

Lời bình : Ta viết dưới dạng như : $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ hoặc $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$

Bồ đề 1.2. Cho a,b,c là các số thực .

Chứng minh rằng : $3(ab + bc + ca) \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$

Chứng minh

Thực hiện xét hiệu ta được:

$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0\right]$.

$\Rightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$.

Thực hiện xét hiệu ta được:

$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0, \ \forall a,b,c.$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$

Vậy : $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$

Đẳng thức xảy ra khi : a = b = c

Lời bình: Ta có thể viết dạng : $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

Bồ đề 1.3: Cho a, b > 0. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$

Chứng minh

Thực hiện xét hiệu , ta được:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{a+b}{ab} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{a+b} \ge 0, \ \forall a,b,>0$

Chứng minh

Thực hiện xét hiệu ta được:

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$

¿$>(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

Thực hiện xét hiệu ta được:

$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

¿$>3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$

Vậy: $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$

Đẳng thức xảy ra khi a=b=c;

Lời bình: Ta có thể viết dưới dạng: $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

Bổ đề 1.3: Cho a, b >0 chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Chứng minh

Thực hiện xét hiệu ta được:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0\,\forall\, a,b>0$

¿$>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Lời bình: Ta có thể viết dưới dạng: $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Bổ đề 1.4: Cho a,b,c > 0 chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$

Chứng minh

Xét $P=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+3.$

Xét hiệu $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\ge 0=$¿$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2,\forall\, a,b>0$

Tương tự: $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2,\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2\ \forall\, a,b,c>0$

Vậy: $P\ge 2+2+2+3=9=$¿$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$;

Lời bình: Ta có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c}\le\frac{1}{9}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$.

Mở rộng: $\frac{1}{a_1+a_2+\ldots a_n}\le\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\forall\, a_1,a_2,\ldots a_n>0.$

Bổ đề 1.5. Cho $a,b\ge 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a+b)}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$

Chứng minh

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)=2\sqrt{ab}\ge 0\,\forall\, a,b\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi $ab=0$;

Xét hiệu:

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

$\forall\, a,b\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi a = b;

Vậy: $\sqrt{(a+b)}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}\,\forall\, a,b\ge 0$

Lời bình: Hoàn toàn tương tự ta cũng có:

$\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}\ \forall a,b,c \ge 0$

Bổ đề 1.6. Cho $a,b \ge 0$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$

Chứng minh

Thực hiện xét hiệu ta được:

$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2 \ge 0\ \forall a,b \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi a=b;

Vậy: $a^3+b^3 \ge ab(a+b)\ \forall a,b \ge 0$

Lời bình: Tương tự ta cũng có được $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)\ \forall a,b \ge 0$

Bổ đề 1.7. Cho $a,b \ge 0$. Chứng minh rằng: $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

Chứng minh

Xét hiệu, ta được:

$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0\ \forall a,b \ge 0.$

Đẳng thức xảy ra khi a = b;

Bổ đề 1.8. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng: $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

Chứng minh

Ta đặt $x^3=a,\ y^3=b,\ z^3=c\ (x,y,z) \ge 0$

Ta cần chứng minh: $x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz;$

Thật vậy, ta có:

$x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz\ (x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy] \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-x)^2+(z-x)^2\right] \ge 0,\ \forall x,y,z \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z\, hay\ a=b=c;$

Ngoài ra, độc giả có thể tham khảo cách chứng minh khách như sau:

Sử dụng bổ đề 1.7. ta có:

$(a+b)+(c+\sqrt[3]{abc}) \ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \ge 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}=4\sqrt[3]{abc}$

$\Leftrightarrow a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c;$

Bổ đề 1.9. Cho a,b,c là các số thực dương, chứng minh rằng:

$(a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc$

Chứng minh

Sử dụng bổ đề 1.8. ta có:

$$\begin{cases} a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ ab+bc+ca \ge 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9\sqrt[3]{(abc)^3}=9abc.$$

Vậy: $(a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c;$

Bổ đề 1.10. Cho a.b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \dfrac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a^2b+a^2c)+(b^2a+b^2c)+(c^2a+c^2b)+2abc.$$

Ta có:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a^2b+a^2c)+(b^2a+b^2c)+(c^2a+c^2b)+3abc.$$

Ta có:

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc.$$

Mặt khác, theo bổ đề 1.9 ta có:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc$$
$$\Rightarrow -abc \ge -\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Vậy:

Đẳng thức xảy ra khi: a=b=c

Bổ đề 1.11. Cho a,b là các số thực không âm.

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

Chứng minh rằng:

Chứng minh:

Thực hiện xét hiệu, ta được.

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{4(a^3+b^3)-(a+b)^3}{8}=\frac{3\left[a^3+b^3-ab(a+b)\right]}{8}\ge 0$$

Vì theo bổ đề 1.6 ta có: $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

Vậy:

Đẳng thức đúng khi: a=b.

$$a^3+b^3\ge \frac{1}{4}(a+b)^3$$

Lời bình: Ta có thể viết dạng :

Bổ đề 1.12. Cho a,b là hai số thực dương.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{8}{(a+b)^2}$$

Chứng minh rằng:

Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{2}{ab}\ge \frac{8}{(a+b)^2}$$

Ta có**:**

$$0<ab\le \frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow \frac{1}{ab}\ge \frac{4}{(a+b)^2}\Leftrightarrow \frac{2}{ab}\ge \frac{8}{(a+b)^2}$$

vì:

Đẳng thức xảy ra khi: a=b

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge \frac{2}{1+ab}$$

Bổ đề 1.13. Cho ab ≥ 1. Chứng minh rằng:

Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab}$$

Thực hiện xét hiệu, ta được:

$$=(\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1+ab})+(\frac{1}{1+b^2}-\frac{1}{1+ab})=\frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)}+\frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)}$$

$$=(a-b)\left[\frac{b(1+a^2)-a(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}\right]=(a-b)^2.\frac{(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}$$

Vậy với ab ≥1 thì $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq\frac{2}{1+ab}$

Lời bình: Với -1< ab ≤1 thì: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{2}{1+ab}$

Bổ đề 1.14. Cho a,b là hai sô thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq\frac{1}{1+ab}$

Chứng minh:

Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta có:

$$\frac{(a+1)^2+(b+1)^2}{(ab+a+b+1)^2}\geq\frac{1}{ab+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[(a+1)^2+(b+1)^2\right](ab+1)\geq(ab+a+b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2+2a+2b+2)(ab+1)\ \geq(ab+a+b)^2+2(ab+a+b)+1$$

Mặt khác, ta lại có:

$$(a^2+b^2+2a+2b+2)(ab+1)=(a^3b+ab^3+2a^2b+2ab^2+2ab)+(a^2+b^2+2a+2b+2).$$

Ta cũng có được:

$(ab+a+b)^2+2(ab+a+b)+1= a^2b^2 + a^2 + b^2 +2a^2b + 2ab^2+ 4ab +2a +2b +1$

Thực hiện xét hiệu, ta được:

$(a^2 + b^2 +2a+ 2b +2)(ab + 1) - [(ab+a+b)^2+2(ab+a+b)+1]$

$= a^3b+ab^3+1-2ab-a^2b^2 = ab(a^2-2ab+b^2)+(a^2b^2-2ab+1)$

$= ab(a-b)^2+(ab-1)^2\geq0$, với mọi a,b>0.

Đẳng thức xảy ra khi: a=b=1

Lời bình: Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky để chứng minh (độc giả tham khảo trong chủ đề số 5)

3. Bất đẳng thức cơ bản thường gặp.

3.1.Bất đẳng thức AM-GM (thường gọi là bất đẳng thức Cauchy).

3.1.1. Dạng tổng quát (n số không âm)

Cho $a_1a_2,...a_n,\geq0,$ ta có $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1,a_2,...a_n}.$

Đẳng thức xảy ra khi: $a_1=a_2=...=a_n,$

3.1.2.Dạng cụ thể (2 số, 3 số không âm).

Cho a,b≥0 ta có: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Đẳng xảy ra khi: a=b

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Cho a,b,c ≥0 ta có:

Đẳng thức xảy ra khi: a= b = c

(Cách chứng minh bất đẳng thức trên, độc giả xem lại bổ đề 1.7 và 1.8)

3.1.3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1. Cho a,b,c là các số thực.

Chứng minh rằng: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8a^2b^2c^2$

Chứng minh:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ b^2+c^2 \geq 2bc \Rightarrow (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8a^2b^2ac^2 \\ c^2+a^2 \geq 2ca \end{cases}$$

Sai lầm hay gặp: (sai)

Bổ đề 1.10. Cho a.b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a^2b+a^2c)+(b^2a+b^2c)+(c^2a+c^2b)+2abc.$$

Ta có:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a^2b+a^2c)+(b^2a+b^2c)+(c^2a+c^2b)+3abc.$$

Ta có:

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$$

Mặt khác, theo bổ đề 1.9 ta có:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

$$\Rightarrow -abc \geq -\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Vậy:

Đẳng thức xảy ra khi: a=b=c

Bổ đề 1.11. Cho a,b là các số thực không âm.

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

Chứng minh rằng:

Chứng minh:

Thực hiện xét hiệu, ta được.

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{4(a^3+b^3)-(a+b)^3}{8} = \frac{3\left[a^3+b^3-ab(a+b)\right]}{8} \geq 0$$

Vì theo bổ đề 1.6 ta có: $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

Vậy:

Đẳng thức đúng khi: a=b.

$$a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3$$

Lời bình: Ta có thể viết dạng :

Bổ đề 1.12. Cho a,b là hai số thực dương.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$$

Chứng minh rằng:

Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$$

Ta có**:**

$$0 < ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \Leftrightarrow \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$$

vì:

Đẳng thức xảy ra khi: a=b

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Bổ đề 1.13. Cho ab ≥ 1. Chứng minh rằng:

Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab}$$

Thực hiện xét hiệu, ta được:

$$= \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab}\right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab}\right) = \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)}$$

$$= (a-b)\left[\frac{b(1+a^2) - a(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}\right] = (a-b)^2 . \frac{(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}$$

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Vậy với ab ≥1 thì

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$$

Lời bình: Với -1<ab≤1 thì:

Bổ đề 1.14. Cho a,b là hai sô thực dương.

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$$

minh rằng:

Chứng

Chứng minh:

Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta có:

$$\frac{(a+1)^2 + (b+1)^2}{(ab+a+b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+1)^2 + (b+1)^2\right](ab+1) \geq (ab+a+b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2)(ab+1) \geq (ab+a+b)^2 + 2(ab+a+b) + 1$$

Mặt khác, ta lại có:

$$(a^2+b^2+2a+2b+2)(ab+1)=(a^3b+ab^3+2a^2b+2ab^2+2ab)+(a^2+b^2+2a+2b+2).$$

Ta cũng có được:
$(ab+a+b)^2+2(ab+a+b)+1= a^2b^2 + a^2 + b^2 +2a^2b + 2ab^2+ 4ab +2a +2b +1$
Thực hiện xét hiệu, ta được:
$(a^2 + b^2 +2a+ 2b +2)(ab + 1) - [(ab+a+b)^2+2(ab+a+b)+1]$
$= a^3b+ab^3+1-2ab-a^2b^2 = ab(a^2-2ab+b^2)+(a^2b^2-2ab+1)$
$= ab(a-b)^2+(ab-1)^2\geq 0$, với mọi a,b>0.
Đẳng thức xảy ra khi: a=b=1
Lời bình: Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky để chứng minh
(độc giả tham khảo trong chủ đề số 5)

Ví dụ 1.2. Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

Chứng minh:

Sử dụng bất đẳng thức AM- GM cho 3 số thực dương ta có:

$$\begin{cases} a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}>0 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}>0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi: a=b=c.

3.2. Bất đẳng thức Cauchy- Schwarz (thường được gọi là bất đẳng thức Bunyakovcsky).

3.2.1. Dạng tổng quát.

Cho hai dãy số thực $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ ta luôn có:
$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...\frac{a_n}{b_n}$

Quy ước: Nếu $b_1=0$ thì $a_1=0$ tương tự với $b_2,b_3,...,b_n$

3.2.2. Dạng cụ thể:

3.2.2.1. Dạng 1:

Cho a,b,c,d $\in$ R, ta có: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq (ac+bd)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

3.2.2.2. Dạng 2:

Cho a,b,c,x,y,z $\in$ R, ta có: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$

Đẳng thức xảy ra khi: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$

Độc giả cần chú ý: $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} \geq |ac+bd| \geq ac+bd.$

Chứng minh:

Dạng 1: Biến đổi tương đương ta được:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geq (ac+bd)^2 \Leftrightarrow (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi ad = bc $\Leftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

Dạng 2: Hoàn toàn tương tự đưa về: $(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0.$

Đẳng thức xaye ra khi: $\begin{cases} ay=bx \\ az=cx \\ bz=cy \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}.$

3.2.3. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1.3. Cho a,b là các số thực. Chứng minh rằng: $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2.$

Chứng minh:

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right) \geq (1.a+1.b)^2 \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1} \Leftrightarrow a=b.$

Ví dụ 1.4. Cho a,b,c là các số thực khác 0.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$.

Chứng minh:

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) = \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\left|\frac{a}{b}\right|^2+\left|\frac{b}{c}\right|^2+\left|\frac{c}{a}\right|^2\right) \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)^2.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM- GM cho 3 số không âm ta có:

$$\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)\geq 3\sqrt[3]{\left|\frac{a}{b}\right|.\left|\frac{b}{c}\right|.\left|\frac{c}{a}\right|}=3$$

$$\Rightarrow\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)^2=\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right).\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)\geq 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$.

Vậy: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Lời bình: Vì đề bài chỉ cho các số thực nên chúng ta phải đưa về dạng: $\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left|\frac{a}{b}\right|^2$ để có thể vận dụng bất đẳng thức AM-GM nhằm tránh sai lầm như ví dụ 1.1 đã trình bày.

3.3. Bất đẳng thức Svac-xơ (thường gọi là bất đẳng thức cộng mẫu).

3.3.1. Dạng tổng quát:

Cho dãy số thực $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n>0)$ thì ta luôn có:

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+...+\frac{a_n{}^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

3.3.2. Dạng cụ thể.

3.3.2.1. Dạng 1:

Cho $x,y>0$, ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

3.3.2.2. Dạng 2:

Cho $x,y,z>0,$ ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Chứng minh

Dạng 1:

Sử dụng bất đẳng thức *Bunyakovsky*, ta có:

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right]\geq(a+b)^2\Leftrightarrow\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Độc giả cũng có thể biến đổi tương đương như sau:

Ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$

$\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\ge(a+b)^2xy \Leftrightarrow (ay-bx)^2\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Dạng 2:

Hoàn toàn tương tự ta có: $\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Đẳng thức xảy ra khi : $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Chú ý: Bất đẳng thức *Svac-xơ* là một hệ quả của bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* và khi áp dụng cần lưu ý các mẫu phải là những số dương.

3.3.3. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.5. Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}\ge\frac{(1+1)^2}{a+b}=\frac{4}{a+b}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Leftrightarrow a=b$

Ví dụ 1.6. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\ge\frac{36}{a+b+c}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{3^2}{c}\ge\frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}=\frac{36}{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}$.

3.4. Bất đẳng thức Minkovsky (Mincôpski).

3.4.1. Dạng tổng quát.

Cho hai dãy số thực $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ thì ta luôn có:

$$\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}}+\sqrt{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}}+...+\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}\ge\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n^{\ 2})+(b_1+b_2+...+b_n^{\ 2})}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$

Quy ước: Nếu $b_1=0$ thì $a_1=0$, tương tự áp dụng với $b_2,b_3,\ldots,b_n$.

3.4.2. Dạng cụ thể.

3.4.2.1. Dạng 1:

Cho $a,b,c,d\in R,$ ta có: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

3.4.2.2. Dạng 2:

Cho $a,b,c,d,e,f\in R,$ ta có: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+f^2}\ge\sqrt{(a+c+e)^2+(b+d+f)^2}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}.$

Chứng minh

Dạng 1:

Biến đổi tương đương, ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge(ac+bd)$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2\Leftrightarrow(ad-bc)^2\ge0,\ \forall a,b,c,d.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $ad=bc\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Dạng 2:

Sử dụng kết quả trên, ta có được:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+f^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{e^2+f^2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+f^2}\ge\sqrt{(a+c+e)^2+(b+d+f)^2}$$

Chú ý: Bất đẳng thức *Minkovsky* cũng là một hệ quả của bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz.*

3.4.3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1.7. Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=abc$

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$.

Chứng minh

Biến đổi giả thiết: $ab+bc+ca=abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Ta có: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}$

Sử dụng bất đẳng thức *Minkovsky*, ta có được:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{c}\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2}\ge\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Mặt khác $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

Vậy: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$

Ví dụ 1.8. Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{1}{2}$

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 Hải Phòng năm học 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}$

Theo ví dụ 1.7, ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}\ge\sqrt{3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=\sqrt{3}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mặt khác: $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Rightarrow\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Từ đó, ta có được: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge1$

Vậy: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$

Ví dụ 1.9. Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $(a+2)(b+2)=\frac{25}{4}$

Tìm GTNN của biểu thức $F=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 Hà Tĩnh năm học 2018 - 2019)

Hướng dẫn giải

Do tính đối xứng của a và b nên đẳng thức xẩy ra tại $a=b$.

Khi đó : $(a+2)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{2}\Rightarrow F=\frac{\sqrt{17}}{2}\\a=\frac{-9}{2}\Rightarrow b=\frac{-9}{2}\Rightarrow F=\frac{\sqrt{6577}}{2}\end{array}\right.$

$$MinF = \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Vậy ta dự đoán :

Sử dụng bất đẳng thức *Minkovsky* , ta có :

$$\sqrt{1^2 + (a^2)^2} + \sqrt{1^2 + (b^2)^2} \geq \sqrt{(1+1)^2 + (a^2+b^2)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)^2 + 4}.$$

$$(a+2)(b+2) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 2(a+b) + ab = \frac{9}{4}$$

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b) \leq 2(a^2+b^2) \\ ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \end{cases}$$

Từ đó xét :

Thực hiện cộng các vế với nhau, ta được :

$$\frac{9}{4} = 2(a+b) + ab \leq \frac{5}{2}(a^2+b^2) + 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4} \geq \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$MinF = \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Vậy :

3.4. Bất đẳng thức Vonicur Schur

3.4.1. Dạng tổng quát

Cho a,b,c là các số thực không âm và $r \geq 0$

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(c-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

3.4.2. Dạng cụ thể

Khi $r = 1$ ta có : $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$

Khi $r = 2$ ta có : $a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$

Sau đây chúng tôi trình bày cách chứng minh bất đẳng thức trên ứng với trường hợp $r = 1$

Chứng minh

Do vai trò a,b,c bình đẳng nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a \geq b \geq c \geq 0$

$$\begin{cases} c - a \leq 0 \\ c - b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Khi đó, ta có :

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) \geq 0$$

Ta cần chứng minh

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) - b(b-c)(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)\left[a(a-c) - b(b-c)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) = (a-b)^2(a+b-c) \geq 0$$

Ngoài hướng trên, ta có thể đặt $x = a - b \geq 0,\ y = b - c \geq 0,\ \Rightarrow a - c = x + y.$

(Các ví dụ và ứng dụng hệ quả của bất đẳng thức này sẽ trình bày trong chủ đề số 3)

3.5. Bất đẳng thức Nesbitt.

Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *Svac-xơ*, ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{2}$$

Vì

$$ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{2(a+b+c)^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$

Lời bình: Hiện nay có hơn 49 cách chứng minh bất đẳng thức này, độc giả tự tìm hiểu thêm.

4. Một số bài tập tự luyện, củng cố kiến thức:

Bài 1.1. Cho a, b, c là các số thực bất kì.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+3 \ge 2(a+b+c)$

Bài 1.2. Cho x, y là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x} \ge x+y$

Bài 1.3. Cho x, y là các số thực khác 0.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2} \ge \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

Bài 1.4. Cho x, y là các số thực khác 0.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+4 \ge 3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$

Bài 1.5. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2} > a$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 chuyên, TP Hồ Chí Minh năm học 2005 - 2006)

Bài 1.6. Cho $a, b > 0$ và $a+b \le 2\sqrt{2}$. Tìm GTNN của biểu thức $P=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Sơn La năm học 2018-2019)

Bài 1.7. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc} \ge 16$

(Trích ĐTTS vào 10 chuyên, Hà Tĩnh năm học 2007-2008)

Bài 1.8. Cho a, b, c là các số dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c} \geq 4\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)$.

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Ninh Bình năm học 2012-2013)

Bài 1.9. Cho a, b, c là các số dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 3\left(\dfrac{1}{a+2b}+\dfrac{1}{b+2c}+\dfrac{1}{c+2a}\right)$.

(Trích ĐTTS vào lớp 10, THPT chuyên Ngoại ngữ năm học 2007-2008)

Bài 1.10. Cho $a, b, c > 0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=16$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3a+2b+c}+\dfrac{1}{a+3b+2c}+\dfrac{1}{2a+b+3c} \leq \dfrac{8}{3}$

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Hải Phòng năm học 2017-2018)

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP CHỌN ĐIỂM RƠI

1. Lý thuyết phương pháp chọn điểm rơi.

Chọn điểm rơi chính là việc dự đoán dấu bằng xảy ra tại các giá trị của biến.

Nếu biểu thức có điiều kiện rằng buộc thì GTNN hoặc GTLN thường đạt tại vị trí biên. Thông thường với các biểu thức đối xứng thì dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau.

2. Điểm rơi của biểu thức đối xứng và ác kỹ thuật liên quan.

2.1. Biểu thức đối xúng với các biến.

Cho biểu thức $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$.

Nếu ta hoán đổi vai trò của x, y cho nhau thì biểu thức P không thay đổi nên ta nói biểu thức P là biểu thức đối xứng với vai trò các biến bình đẳng với nhau.

Vậy điểm rơi đạt được khi các biến có giá trị bằng nhau tức là $x=y=z$

2.2. Phương pháp giải và các ví dụ minh họa.

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra (chọn điểm rơi) tại giá trị các biến bằng nhau rồi ghép từng cặp áp dụng bất đẳng thức Côsi, cụ thể hơn ta đi xét ác ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.1. Cho $a \ge 3$. Tìm GTNN của biểu thức $P=a+\frac{1}{a}$

Phân tích

Sai lầm: Nếu vội vàng, ta dẫn đến lời giải sau:

Sử dụng đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta được:

$$P=a+\frac{1}{a} \ge 2\sqrt{a.\frac{1}{a}}=2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a=1<3$

Vậy không có a thỏa năm nên lời giải trên là **sai.**

Từ đó việc dự đoán dấu “ =” xảy ra (tức chọn điểm rơi) là vô cùng quan trọng.

Lời giải đúng: Chọn điểm rơi tại $a=3$.

Với $a=3 \Rightarrow a \ne \frac{1}{a}$ nên để sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta phải thêm hệ số $k>0$ như sau:

$$P=\left(\frac{1}{a}+ka\right)+(a-ka)$$

Tìm k dựa trên dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}=ka \\ a=3\end{cases} \Rightarrow 3k=\frac{1}{3} \Leftrightarrow k=\frac{1}{9}$.

Với hướng phân tích như trên, ta có lời giải chi tiết:

$$P=\frac{1}{a}+\frac{a}{9}+\frac{8a}{9} \ge 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{a}{9}}+\frac{8.3}{9}=\frac{10}{3} \Rightarrow MinP=\frac{10}{3} \Leftrightarrow a=3$$

Ngoài cách phân tích trên, ta còn có nhiều hướng tư duy khác:

Hướng 2:

$$P=\left(a+\frac{9}{a}\right)\ \frac{10}{3}\ge 6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}\Rightarrow \min P=\frac{10}{3}\Leftrightarrow a=3$$

Ta có:

Hướng 3:

$$P-\frac{10}{3}=a+\frac{1}{a}-\frac{10}{3}=\frac{3a^2-10a+3}{3a}=\frac{3(a-3)^2+8(a-3)}{3a}\ge 0\Rightarrow P\ge\frac{10}{3}$$

Đẳng thức xảy ra tại $a=3$

Ví dụ 2.2 Cho $a\ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P=a^2+\frac{1}{a}$

Hướng 1: Ta dễ thấy điẻm rơi đạt tại $a=2$

$$P=a^2+\frac{1}{a}=\left(a^2+\frac{8}{a}+\frac{8}{a}\right)\ \frac{15}{a}\ge 3\sqrt[3]{64}-\frac{15}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow \min P=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=2$$

Khi đó:

Hướng 2:

$$P=a^2+\frac{1}{a}=\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{a^2}{16}\right)+\frac{15}{16}a^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\frac{15}{16}.4=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}=\frac{9}{2}$$

Ta có:

$\Rightarrow \min P=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=2$

Hướng 3:

$$P-\frac{9}{2}=a^2+\frac{1}{a}-\frac{9}{2}=\frac{2a^3-9a+2}{2a}=\frac{(a-2)(2a^2+4a-1)}{2a}\ge 0\ (\forall a\ge 2)\Rightarrow P\ge\frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra tại $a=2$

Hướng 4:

$$P=(a-2)^2+\left(4a+\frac{16}{a}\right)\ \frac{15}{a}-4\ge 0+2\sqrt{64}-\frac{15}{2}-4=\frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra tại $a=2$

Ví dụ 2.3. Cho $a\ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{1}{a^2}+a$

Hướng dẫn giải

Hướng 1: Ta dễ thấy điẻm rơi đạt tại $a=2$

$$P=\frac{1}{a^2}+\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{3a}{4}=\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\frac{3}{4}.2=\frac{9}{4}\Rightarrow \min P=\frac{9}{4}\Leftrightarrow a=2$$

Ta có:

Hướng 2:

$$P=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{4}{a^2}\right)-\frac{3}{a^2}\ge 3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow MinP=\frac{9}{4}\Leftrightarrow a=2.$$

Ta có:

Hướng 3:
Xét hiệu:

$$P-\frac{9}{4}=\frac{1}{a^2}+a-\frac{9}{4}=\frac{4a^3-9a^2+4}{4a^2}=\frac{(a-2)(4a^2-a-2)}{4a^2}\ge 0\ (\forall a\ge 2)\Rightarrow P\ge\frac{9}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra tại $a=2.$

Hướng 4:

Ta có:

$$P=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{4}\right)+\frac{3a}{4}-\frac{1}{4}\ge 0+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=2.$

Ví dụ 2.4. Cho $x>0; y>0$ và $x+y=2.$ Chứng minh rằng: $x^2+y^2\ge 2.$

Hướng dẫn giải

Hướng 1:

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: $x=y=1.$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x^2+1\ge 2x \\ y^2+1\ge 2y \end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+2\ge 2(x+y)=4\Rightarrow x^2+y^2\ge 2.$$

Hướng 2:

Ta có:

$$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2=4\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2.$$

Hướng 3:

Ta có:

$$2=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow \sqrt{xy}\le 1\Leftrightarrow xy\le 1\Rightarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\ge 2^2-2.1=2.$$

Qua 4 ví dụ trên, tuy bản chất chỉ là một nhưng chúng tôi muốn mở rộng thêm nhiều hướng suy nghĩ, tìm tòi hơn khi làm bất đẳng thức nhằm khơi dạy niềm đam mê, rèn tư duy cũng như sự sáng tạo của mỗi học sinh để chinh phục các bài bất đẳng thức khó hơn, phức tạp hơn. Dưới đây là một số bất đẳng thức cho độc giả tự rèn luyện.

Ví dụ 2.5. Cho $a>0; b>0.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$

Hướng dẫn giải

Đặt:

$$t=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}(t\ge 2)\Rightarrow P=t+\frac{1}{t}=\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{t}\right)+\frac{3t}{4}\ge 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

Vậy:

$$MinP=\frac{5}{2}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow a=b>0.$$

Ví dụ 2.6. Cho $x, y>0$ thỏa mãn $x\ge 2y.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x^2+y^2}{xy}.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Hà Nội năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải

Đặt:

$$t=\frac{x}{y}(t\ge 2)\Rightarrow \mathrm{M}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t+\frac{1}{t}=\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{t}\right)+\frac{3t}{4}\ge 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

Vậy $MinM = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 2y.$

Ví dụ 2.7. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y \le 1.$ Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}.$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: $x = y = \frac{1}{2}.$

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \frac{1}{2xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} \ge \frac{6}{(x+y)^2} \ge 6.$$

Vậy $\min P = 6 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$

Ví dụ 2.8. Cho $x, y > 0.$ Tìm GTNN của biểu thức $S = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}.$

Hướng dẫn giải

Sử dụng kết quả của ví dụ 2.7, ta được:

Ta có: $$S = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy} = (x+y)^2 \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} \right) \ge (x+y)^2 \cdot \frac{6}{(x+y)^2} = 6.$$

Vậy: $\min S = 6 \Leftrightarrow x = y.$

Ví dụ 2.9. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y = 3.$ Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{5}{x^2 + y^2} + \frac{3}{xy}.$

Hướng dẫn giải

$$P = \frac{5}{x^2 + y^2} + \frac{3}{xy} = 5\left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \frac{1}{2xy} \ge 5 \cdot \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} = \frac{22}{(x+y)^2} = \frac{22}{9}.$$

Vậy: $MinP = \frac{22}{9} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2}.$

Ví dụ 2.10. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1.$ Chứng minh $\frac{3}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} \ge 14.$

Hướng dẫn giải

$$\frac{3}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} = 3\left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \frac{1}{2ab} \ge 3 \cdot \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+b)^2} = \frac{14}{(a+b)^2} = 14.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = \frac{1}{2}.$

Ví dụ 2.11. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y \le 1.$ Tìm GTNN của $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy.$

Hướng dẫn giải

$$x = y = \frac{1}{2}.$$
Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại:

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy}\right) + \frac{1}{4xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2} + 2 + \frac{1}{(x+y)^2} \ge 7.$$

$$MinP = 7 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$
Vậy:

Ví dụ 2.12. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y \le 1.$ Tìm GTNN của $P = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}.$

Hướng dẫn giải

$$x = y = \frac{1}{2}.$$
Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại:

$$P = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} = \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} + \frac{1}{6xy}\right) + \frac{1}{3xy}.$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{4}{(x+y)^2 + 4xy + 1} + \frac{1}{3xy} \ge \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 4xy + 1 \le 3 \\ 3xy \le \frac{3}{4} \end{cases}$$
Vì:

$$MinP = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$
Vậy

$$m.xy = 1 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow m = \frac{1 + x^2 + y^2}{xy} = 6$$
Lời bình: Với điểm rơi trên ta cần:

Ví dụ 2.13. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y \le 4$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy$

(Trích đề ĐTTS vào lớp 10, hưng Yên năm học 2017 – 2018)

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi tại $x = y = 2$

$$P = \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy = 2\left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(2xy + \frac{32}{xy}\right) + \frac{2}{xy}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{8}{(x+y)^2} + 16 + \frac{8}{(x+y)^2} \ge 17$$

$$MinP = 17 \Leftrightarrow x = y = 2$$
Vậy

Ví dụ 2.14. Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \le 4$. Tìm GTNN của biểu thức $S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab$

(Trích đề ĐTTS vào lớp 10, Ninh Bình năm học 2017 – 2018)

Hướng dẫn giải

Với điểm rơi đạt tại $a = b = 2$ nên ta có hướng phân tích sau:

$$S = \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \left(ab + \frac{16}{ab}\right) + \frac{17}{2ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 8 + \frac{34}{(a+b)^2} \geq \frac{19}{8} + 8 = \frac{83}{8}$$

Vậy $\text{Min}S = \frac{83}{8} \Leftrightarrow a = b = 2$

Ví dụ 2.15. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $(x + y - 1)^2 = xy$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y}$.

(Trích đề ĐTTS vào lớp 10, Thái Bình năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$xy = (x + y - 1)^2 \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 8(x+y) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x + y \leq 2$$

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại $x = y = 1$

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(\frac{\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{1}{2xy}\right)$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2}{\sqrt{2(x+y)\sqrt{xy}}} \geq 2$$

Vì $(x+y)2\sqrt{xy} \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(x+y)2\sqrt{xy}}} \geq \frac{2}{x+y} \geq 1$

Vậy $\text{Min}P = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

Ví dụ 2.16. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $xy + 4 \leq 2y$. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2y \geq xy + 4 \geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{y} \geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} \geq 4$

Ta đặt $t = \frac{y}{x}\ (t \geq 4)$

$$\Rightarrow A = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{t} + 2t = \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{16}\right) + \frac{31}{16}t \geq 2\sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{31}{16}.4 = \frac{33}{4}$$

$$MinA = \frac{33}{4} \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy

Ví dụ 2.17. Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $ab + 4 \le 2b$. Tìm GTLN của biểu thức $B = \frac{ab}{a^2 + 2b^2}$

Hướng dẫn giải

$$2b \ge ab + 4 \ge 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{b} \ge 2\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \ge 4$$

Ta có:

$$t = \frac{b}{a}\ (t \ge 4)$$

Ta đặt

$$\Rightarrow \frac{1}{B} = \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} = \frac{1}{t} + 2t = \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{16}\right) + \frac{31}{16}t \ge 2\sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{31}{16}.4 = \frac{33}{4} \Leftrightarrow B \le \frac{4}{33}$$

$$MaxB = \frac{4}{33} \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy

Ví dụ 2.18. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $xy + 1 \le x$. Tìm GTLN của biểu thức $Q = \frac{x + y}{\sqrt{3x^2 - xy + y^2}}$

(Trích đề ĐTTS vào lớp 10, Quảng Ninh năm học 2018 – 2019)

Hướng dẫn giải

$$x \ge xy + 1 \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 2\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \ge 4$$

Ta có:

$$t = \frac{x}{y}\ (t \ge 4) \Rightarrow Q^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{3x^2 - xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 1} = \frac{t^2 + 2t + 1}{3t^2 - t + 1}$$

Ta đặt

$$\frac{5}{9} - Q^2 = \frac{5}{9} - \frac{t^2 + 2t + 1}{3t^2 - t + 1} = \frac{6t^2 - 23t - 4}{9(3t^2 - t + 1)} = \frac{6(t - 4)^2 + 25(t - 4)}{9(3t^2 - t + 1)} \ge 0\ (\forall t \ge 4)$$

Xét hiệu:

$$\Leftrightarrow Q^2 \le \frac{5}{9} \Rightarrow Q \le \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow MaxQ = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2.19. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ge 3$

(Trích đề ĐTTS vào lớp 10, TP Hà Nội năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải

$$a+b+c+ab+bc+ca=6abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=6$$

Ta có:

Ta đặt: $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}\ (x,y,z>0) \Rightarrow x+y+x+xy+yz+zx=6$

Ta cần chứng minh: $x^2+y^2+z^2 \ge 3$

Dễ thấy điểm rơi đạt tại $x=y=z=1$

Từ đó: $x^2+1\ge 2x;\ y^2+1\ge 2y;\ z^2+1\ge 2z \Rightarrow x^2+y^2+z^2+3\ge 2(x+y+z)$

Mặt khác $2(x^2+y^2+z^2)\ge 2(xy+yz+zx)$

Cộng vế với nhau, ta được:

$$3(x^2+y^2+z^2)+3\ge 2(x+y+z+xy+yz+zx)=12 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge 3$$

Vậy: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$.

2.3. Kỹ thuật ghép cặp.

Để sử dụng kỹ thuật này, ta cần chú ý đến bậc của biểu thức để ghép chúng với nhau. Cụ thể hơn chúng ta cùng xét các ví dụ dưới đây:

Ví dụ 2.20. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$.

Hướng dẫn giải

Ta để ý bậc của chúng là bậc 1 nên ta cần ghép các biểu thức đồng bậc với nhau:

Ta có: $\frac{a^2}{b}+b\ge 2a$; $\frac{b^2}{c}+c\ge 2c$; $\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$.

Đẳng thức xảy ra tại a = b = c.

Đây là một ví dụ rất cơ bản minh họa cho kỹ thuật ghép cặp ứng dụng AM-GM.

Ví dụ 2.21. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$.

Hướng dẫn giải

Ta để ý bậc của chúng là bậc hai nên ta cần ghép các biểu thức đồng bậc với nhau:

$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc\ge 3ab$; $\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ac\ge 3bc$; $\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab\ge 3ac$.

Cộng các vế, ta được: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$.

Đẳng thức xảy ra tại a = b = c.

Ví dụ 2.22. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\ge \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta để ý bậc của chúng là bậc 0, tức là ta cần ghép với hệ số:

$\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^3}{b^3}+1\ge 3\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{b^3}{c^3}+\frac{b^3}{c^3}+1\ge 3\frac{b^2}{c^2}$; $\frac{c^3}{a^3}+\frac{c^3}{a^3}+1\ge 3\frac{c^2}{a^2}$.

Từ đó ta có: $2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)+3\ge 3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$.

Mặt khác, ta cũng có được: $3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)=2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3$.

Vậy: $2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)+3\ge 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3 \Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)\ge\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$.

Đẳng thức xảy ra tại: a = b = c.

Ví dụ 2.23. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)=\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}\ge 3$.

Mặt khác, ta có:

$\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)+\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)=\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3$.

Vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

Ví dụ 2.24. Cho a, b, c > 0 và thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta để ý bậc của chúng là bậc 1 và điểm rơi tại a = b = c = 1.

Ta có: $\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{a+c}{8}\ge\frac{3a}{4}$.

Tương tự ta cũng có:

$\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{b+c}{8}+\frac{b+a}{8}\ge\frac{3b}{4}$; $\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\frac{c+a}{8}+\frac{c+b}{8}\ge\frac{3c}{4}$.

Cộng vế ta được: $VT\ge\frac{3(a+b+c)}{4}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra tại: a = b = c = 1.

Ví dụ 2.25. Cho a, b, c > 0 và thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge 1$.

Hướng dẫn giải

Ta để ý bậc của chúng là bậc 1 và điểm rơi đạt tại a = b = c = 1.

Ta có:

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b}{3}+\frac{2c+a}{9}\ge a.$$

Tương tự:

$$\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c}{3}+\frac{2a+b}{9}\ge b \quad ; \quad \frac{c^3}{a(2b+c)}+\frac{a}{3}+\frac{2b+c}{9}\ge c.$$

Vậy

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge a+b+c-\frac{2(a+b+c)}{3}=1.$$

Đẳng thức xảy ra tại: a = b = c = 1.

Ví dụ 2.26. Cho a, b, c > 1.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}\ge 12.$$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 Hưng Yên năm học 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta thấy điểm rơi đạt tại a = b = c = 2.

Ta có:

$$\frac{a^2}{b-1}+4(b-1)\ge 4a.$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c-1}+4(c-1)\ge 4b \quad ; \quad \frac{c^2}{a-1}+4(a-1)\ge 4c.$$

Đẳng thức xảy ra tại a = b = c = 2.

Lời bình: Ta có thể sử dụng BĐT *Svac-xơ* như sau:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{c-1}+\frac{c^2}{a-1}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c-3}.$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c-3}\ge 12.$$

Thật vậy:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c-3}\ge 12 \Leftrightarrow (a+b+c-6)^2\ge 0, \quad \forall a,b,c>1.$$

2.4. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

Có những bài toán áp dụng BĐT Cauchy dẫn đến việc chiều của BĐT bị ngược.

Để giải quyết vấn đề đó ta dùng kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

Ví dụ 2.27. Cho a, b, c > 0 và thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{2}.$$

Phân tích và tìm lời giải

Ta dễ thấy điểm rơi tại $a=b=c=1$ nên nghĩ đến hướng sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho mẫu:

Khi đó, ta có:

$$a^2+1\ge 2a \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}\le\frac{1}{2a}.$$

Rõ ràng ta thấy chiều của bất đẳng thức sẽ bị ngược so với chiều mà đề bài yêu cầu.
Từ đó vận dụng kĩ thuật Cauchy ngược dấu, ta giải quyết theo hướng tách như sau:

Ta có: $\frac{1}{1+a^2}=1-\frac{a^2}{1+a^2}\geq 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$.

Hoàn toàn tương tự, ta được: $\frac{1}{1+b^2}\geq 1-\frac{b}{2}$; $\frac{1}{1+c^2}\geq 1-\frac{c}{2}$.

Cộng vế với vế, ta có: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq 3-\frac{a+b+c}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Lời bình: Qua ví dụ trên ta thấy kĩ thuật Cauchy ngược dấu giúp ta có lời giải gọn và đẹp.

Ví dụ 2.27. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy điểm rơi đạt tại $a=b=c=1$.

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=a.\frac{1}{1+b^2}=a.\left(1-\frac{b^2}{1+b^2}\right)\geq a\left(1-\frac{b}{2}\right)=a-\frac{ab}{2}$.

Tương tự ta được: $\frac{b}{1+c^2}\geq b-\frac{bc}{2}$, $\frac{c}{1+a^2}\geq c-\frac{ca}{2}$.

Cộng vế với vế, ta có : $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3}{2}$.

Vì : $ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=3\Rightarrow(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}\geq 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Lời bình : Ta có thể mở rộng cho 4 biến với bài toán sau đây :

Cho $a,b,c,d>0$ và $a+b+c+d=4$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{d}{1+a^2}\geq 2$.

(Độc giả tự chứng minh)

Ví dụ 2.28. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm GTNN của biểu thức $Q=\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}$.

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Hải Dương năm học 2017- 2018)

Hướng dẫn giải

Hướng 1 : Ta có : $Q=\left(\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\right)+\left(\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}\right)$.

Sử dụng kết quả của hai ví dụ trên , ta thu được :

$Q\ge\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3 \Rightarrow MinQ=3\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Hướng 2 : Ta cũng áp dụng trực tiếp kỹ thuật Cauchy ngược dấu :

$\frac{a+1}{1+b^2}=(a+1).\frac{1}{1+b^2}=(a+1).\left(1-\frac{b^2}{1+b^2}\right)\ge(a+1).\left(1-\frac{b}{2}\right)=a+1-\frac{ab+b}{2}$.

Tương tự, ta có : $\frac{b+1}{1+c^2}\ge b+1-\frac{bc+c}{2}$; $\frac{c+1}{1+a^2}\ge c+1-\frac{ca+a}{2}$.

Cộng vế với vế, ta có :

$Q\ge\frac{a+b+c}{2}-\frac{ab+bc+ca}{2}+3\ge\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+3=3 \Rightarrow MinQ=3$.

Qua các ví dụ trên ta thấy được việc ứng dụng kĩ thuật Cauchy ngược dấu giúp cho chúng ta có lời giải ngắn gọn và đẹp mắt. Để rèn luyện và khắc sâu ta xét thêm các ví dụ mẫu dưới đây :

Ví dụ 2.29. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm GTNN của biểu thức $Q=\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+a^2b}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy điểm rơi đạt tại $a=b=c=1$.

Ta có : $\frac{a}{1+b^2c}=a.\frac{1}{1+b^2c}=a.\left(1-\frac{b^2c}{1+b^2c}\right)\ge a.\left(1-\frac{b\sqrt{c}}{2}\right)=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}$

Tương tự ta được : $\frac{b}{1+c^2a}\ge b-\frac{bc\sqrt{a}}{2}$; $\frac{c}{1+a^2b}\ge c-\frac{ca\sqrt{b}}{2}$.

Cộng vế với vế, ta có : $Q\ge(a+b+c)-\frac{ab\sqrt{c}+bc\sqrt{a}+ca\sqrt{b}}{2}$.

Mặt khác với điểm rơi trên ta có :

$\sqrt{c}\le\frac{c+1}{2}\Leftrightarrow ab\sqrt{c}\le\frac{abc+ab}{2}\Rightarrow ab\sqrt{c}+bc\sqrt{a}+ca\sqrt{b}\le\frac{1}{2}(3abc+ab+bc+ca)\le3$.

Vì : $\begin{cases} ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3 \\ abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3abc + ab + bc + ca \le 6$

Từ đó :

$$Q \ge (a+b+c) - \frac{ab\sqrt{c} + bc\sqrt{a} + ca\sqrt{b}}{2} \ge 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow MinQ = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Ví dụ 2.30. Cho $a,b,c > 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{a^3}{a^2+b^2} = a.\frac{a^2}{a^2+b^2} = a\left(1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \ge a\left(1 - \frac{b}{2a}\right) = a - \frac{b}{2}$.

Tương tự ta được : $\frac{b^3}{b^2+c^2} \ge b - \frac{c}{2}$; $\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge c - \frac{a}{2}$.

Cộng vế với vế, ta có : $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}$.

Ví dụ 2.31. Cho $a,b,c > 0$ và $a+b+c = 3$.

Chứng minh : $\frac{a^2}{a^2+2b^2} + \frac{b^2}{b^2+2c^2} + \frac{c^2}{c^2+2a^2} \ge 1$.

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại $a = b = c = 1$.

$$a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + b^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^4} \Rightarrow \frac{2b^2}{a^2+2b^2} \le \frac{2b^2}{3\sqrt[3]{a^2b^4}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Từ đó : $\frac{a^2}{a^2+2b^2} = a.\frac{a}{a^2+2b^2} = a.\left(1 - \frac{2b^2}{a^2+2b^2}\right) \ge a\left[1 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right] = a - \frac{2a}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Tương tự ta được : $\frac{b^2}{b^2+2c^2} \ge b - \frac{2b}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^2}$; $\frac{c^2}{c^2+2a^2} \ge c - \frac{2c}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{c}\right)^2}$.

Mặt khác : $\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt[3]{1.\frac{b}{a}.\frac{b}{a}}\le\frac{1+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}}{3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2b}{a}\right)\Rightarrow a.\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\le\frac{1}{3}(a+2b)$.

Do đó : . $a\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}+b\sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^2}+c\sqrt[3]{\left(\frac{a}{c}\right)^2}\le\frac{1}{3}(a+2b+b+2c+c+2a)=a+b+c$.

Vậy : $M=\frac{a^2}{a^2+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+2a^2}\ge(a+b+c)-\frac{2}{3}(a+b+c)=\frac{a+b+c}{3}=1$.

Ví dụ 2.32. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh: $\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge1$

Hướng dẫn giải

Ta dễ tìm thấy điểm dơi đạt tại a = b = c = 1

Với điểm dơi trên ta có :

$$2+a^2b=1+1+a^2b\ge3\sqrt[3]{a^2b}\Rightarrow\frac{a^2b}{2+a^2b^2}\le\frac{a^2b}{3\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^4b^2}$$

Ta có:

$$\frac{1}{2+a^2b}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2b}{2+a^2b}\right)\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^4b^2}\right)\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{a^4b^2}$$

$$\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{18}(a^2+2ab)$$

Vì : $\sqrt[3]{a^4b^2}=a\sqrt[3]{a.b.b}\le\frac{a}{3}(a+2b)=\frac{a^2+2ab}{3}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2+a^2b}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{18}(c^2+2ac)$$

Tương tự : $\frac{1}{2+b^2c}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{18}(b^2+2bc);\frac{1}{2+c^2a}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{18}(c^2+2ca)$

Vậy : $\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge\frac{3}{2}-\frac{1}{18}(a+b+c)^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

Đẳng thức xảy ra : $a=b=c=1$

Ví dụ 2.33. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$

Chứng minh : $\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\ge\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại $a=b=c=1$

$$\frac{a}{b^3+ab}=\frac{a}{b(b^2+a)}=\frac{1}{b}.\frac{a}{a+b^2}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{b^2}{a+b^2}\right)\ge\frac{1}{b}\left(1-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Ta có :

$$\frac{b}{c^3+bc}\ge\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{b}};\frac{c}{a^3+ca}\ge\frac{1}{a}-\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Tương tự :

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+1\right)\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{2\sqrt{b}}+\frac{1}{2\sqrt{c}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{4}$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\left(\frac{9}{a+b+c}-1\right)=\frac{3}{2}$$

Lời bình: Qua các ví dụ trên, ta có thể đưa ra cách tác cho dễ dàng như sau:

$$\frac{M}{K+N}=\frac{M}{K}.\frac{K}{K+N}=\frac{M}{K}.\left(1-\frac{N}{K+N}\right)$$

Ta ghi nhớ: với K là hằng số khác 0

$$\frac{1}{1+a^2}=1-\frac{a^2}{1+a^2};\frac{1}{2+a^2}=\frac{1}{2};\frac{2}{2+a^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{2+a^2}\right)$$

$$\frac{a}{1+b^2}=a.\frac{1}{1+b^2}=a\left(1-\frac{b^2}{1+b^2}\right);\frac{a+1}{1+b^2}=(a+1).\left(1-\frac{b^2}{1+b^2}\right)$$

$$\frac{a}{1+b^2c}=a.\frac{1}{1+b^2c}=a\left(1-\frac{b^2c}{1+b^2c}\right);\frac{1}{2+a^2b}=\frac{1}{2}.\frac{2}{2+a^2b}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2b}{2+a^2b}\right)$$

$$\frac{a^3}{a^3+b^2}=a.\frac{a^2}{a^2+b^2}=a\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right);\frac{a^2}{a+2b^2}=a.\frac{a}{a+2b^2}=a\left(1-\frac{2b^2}{a+2b^2}\right)$$

$$\frac{a}{b^3+ab}=\frac{a}{b(b^2+a)}=\frac{1}{b}.\frac{a}{a+b^2}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{b^2}{a+b^2}\right)$$

3. Điểm rơi của biểu thức không đối xứng và kỹ thuật liên quan

3.1 Biểu thức không đối xứng với các biến

$$P=5x+3y+\frac{10}{x}+\frac{8}{y}$$

Cho biểu thức

Nếu ta hoán đổi vai trò của x,y cho nhau thì biểu thức P sẽ thay đổi nên ta nói biểu thức P không là biểu thức đối xứng với vai trò các biến không bình đẳng với nhau. Vậy điểm dơi x # y

3.2 Phương pháp giải và các ví dụ minh họa

Ví dụ 2. 34. Cho $a,b>0$ và thỏa mãn $a+b\ge3$

$$P=a+b+\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}$$

Tìm GTNN của biểu thức

Hướng dẫn giải

$$a=x,b=y\,(x,y>0)\Rightarrow x+y=3$$

Ta giả sử điểm rơi đạt tại:

Dựa trên liên hệ x và y ta đặt:

$x = ty\,(t > 0) \Rightarrow x + y = y.(t+1) = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{t+1}$

$$P = \frac{t+1}{6t} + \frac{2}{3}(t+1) + 3 = \left(\frac{1}{6t} + \frac{2t}{3}\right) + \frac{32}{6} \ge 2\sqrt{\frac{1}{9}} + \frac{32}{6} = \frac{9}{2}$$

Khi đó thì:

$$\frac{1}{6t} = \frac{2t}{3}(t > 0) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{b}{2}; a + b = 3 \Rightarrow a = 1; b = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$MinP = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = 1, b = 2$$

Vậy

Lời bình: Khi đã biết điểm dơi đạt tại $a = 1, b = 2$

Ta tách như sau:

$$M = a + b + \frac{1}{2a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{2}{b} + \frac{b}{2}\right) + \frac{a+b}{2} \ge 2\sqrt{\frac{1}{4}} + 2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Ví dụ 2.35. Cho $a, b > 0$ và $a + b \ge 6$

$$P = 3a + 2b + \frac{6}{a} + \frac{8}{b}$$

Tìm GTNN của biểu thức

Hướng dẫn giải

$$a = x, b = y\,(x, y > 0) \Rightarrow x + y = 6$$

Ta giả sử điểm dơi đạt tại:

$$x = ty\,(t > 0) \Rightarrow x + y = y(t+1) = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{t+1} \Rightarrow x = \frac{6t}{t+1}$$

Ta đặt :

$$P = \frac{18t + 12}{t+1} + \frac{t+1}{t} + \frac{4(t+1)}{3} = \left[12 + \frac{6t}{t+1} + \frac{4(t+1)}{3} + \frac{1}{t}\right] + 1 \ge 3\sqrt[3]{8} + 13 = 19$$

Khi đó thì :

$$\frac{6t}{t+1} = \frac{4(t+1)}{3} = \frac{1}{t}(t > 0) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2; b = 4$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$MinP = 19 \Leftrightarrow a = 2, b = 4$$

Vậy :

Lời bình : Khi đã biết điểm rơi đạt tại $a = 2, b = 4$

Ta tách như sau:

$$P = 3a + 2a + \frac{6}{a} + \frac{8}{b} = \left(\frac{6}{a} + \frac{3a}{2}\right) + \left(\frac{8}{b} + \frac{b}{2}\right) + \frac{3}{2}(a+b) \ge 2.3 + 2.2 + \frac{3}{2}.6 = 19$$

Ví dụ 2.36 Cho $a, b > 0$ và $a + b = \dfrac{5}{4}$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \dfrac{4}{a} + \dfrac{1}{4b}$

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Bắc Giang năm học 2008-2009)

Hướng dẫn giải

$$a = x, b = y\,(x, y > 0) \Rightarrow x + y = \frac{5}{4}$$

Ta giả sử điểm dơi đạt tại:

$$x = ty\,(t>0) \Rightarrow y(t+1) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow y = \frac{5}{4(t+1)} \Rightarrow x = \frac{5t}{4(t+1)}$$

Ta đặt :

$$P = \frac{16(t+1)}{5t} + \frac{t+1}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{16}{t}+t\right) + \frac{17}{5} = 5.$$

Khi đó :

$$\frac{16}{t} = t\,(t>0) \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x+y = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a = 1 \\ y = b = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Đẳng thức xảy ra khi :

$$MinP = 5 \Leftrightarrow a = 1, b = \frac{1}{4}.$$

Vậy :

Lời bình : Với điểm rơi bên trên, ta có hướng tách như sau :

$$a = 1, b = \frac{1}{4} \Rightarrow P = \left(\frac{4}{a}+4a\right) + \left(\frac{1}{4b}+4b\right) - 3 \ge 2\sqrt{16} + 2 - 5 = 5.$$

Ta có :

Ví dụ 2.37. Cho $a,b>0$ và $\sqrt{ab}(a-b) = a+b.$

Tìm GTNN của biểu thức $P = a+b$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 chuyên, ĐHSPHN năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{ab}(a-b) = a+b > 0 \Rightarrow a > b.$$

Từ giả thiết ta có:

Ta giả sử điểm rơi đạt tại: $a = x, b = y$ ($x > y$ do $a > b$) $\Rightarrow \sqrt{xy}(x-y) = x+y.$

Ta đặt: $x = ty$ ($t > 1$ do $x > y$) $\Rightarrow y\sqrt{t}(t-1) = t+1 \Leftrightarrow y = \frac{t+1}{\sqrt{t}(t-1)}$.

$$P = y(t+1) = \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t}(t-1)} = \frac{(t-1)^2+4t}{\sqrt{t}(t-1)} = \frac{t-1}{\sqrt{t}} + \frac{4\sqrt{t}}{t-1} \ge 4.$$

Ta có:

$$\frac{t-1}{\sqrt{t}} = \frac{4\sqrt{t}}{t-1}(t>1) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3+2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} x = (3+2\sqrt{2})y \\ x+y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a = 2+\sqrt{2} \\ y = b = 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó:

$$MinP = 4 \Leftrightarrow a = 2+\sqrt{2}, b = 2-\sqrt{2}.$$

Vậy :

Lời bình : Với ví dụ trên thì vị trí điểm rơi *"rất xấu"* nên kỹ thuật này tỏ ra rất hiệu quả, khi đã biết điểm rơi ta có thể làm như sau:

$$(a+b)^2 = ab(a-b)^2 = \frac{1}{4}.4ab.\left[(a+b)^2 - 4ab\right].$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \le \frac{1}{16}\left[4ab + (a+b)^2 - 4ab\right]^2 = \frac{(a+b)^4}{16}.$$

$$a+b\ge 4\Rightarrow MinP=4\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4\\ \sqrt{ab}\left(a-b\right)=a+b\quad \left(a>b>0\right)\\ 4ab=\left(a+b\right)^2-4ab \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=2+\sqrt{2}\\ b=2-\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy :

Ví dụ 2.38. Cho $a,b>0$ và $4a+b+\sqrt{ab}=1.$

Tìm GTNN của biểu thức $P=\dfrac{1}{ab}.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 chuyên, ĐHSPHN năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải

$$a=x,b=y\left(x,y>0\right)\Rightarrow\ 4x+y+\sqrt{xy}=1.$$

Ta giả sử điểm rơi đạt tại:

$$x=ty\left(t>0\right)\Rightarrow\ y\left(4t+1+\sqrt{t}\right)=1\Leftrightarrow\ y=\frac{1}{4t}+1+\sqrt{t}\ \Rightarrow\ x=\frac{t}{4t+1+\sqrt{t}}.$$

Ta đặt :

$$P=\frac{1}{ty^2}=\left(\frac{4t+1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)^2=\left(4\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+1\right)^2\ \ge\left(4+1\right)^2=25.$$

Khi đó thì:

$$4\sqrt{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(t>0\right)\Leftrightarrow\ t=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \begin{cases} y=4x\\ 25xy=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=a=\dfrac{1}{10}\\ y=b=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi :

$$MinP=25\Leftrightarrow\ a=\frac{1}{10},b=\frac{2}{5}.$$

Vậy :

Lời bình : Với điểm rơi bên trên, ta có hướng tách như sau :

$$a=\frac{1}{10},b=\frac{2}{5}\Rightarrow\ 4a=b\Rightarrow\ 1=4a+b+\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{4ab}+\sqrt{ab}=5\sqrt{ab}\Leftrightarrow\ P=\frac{1}{ab}\ge 25.$$

Ta có:

Ví dụ 2.39. Cho $a,b>0$ và $\dfrac{2017}{a}+\dfrac{2018}{b}=1.$

Tìm GTNN của biểu thức $P=a+b.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 chuyên, Bình Định năm học 2017 – 2018)

Hướng dẫn giải

$$a=x,b=y\left(x,y>0\right)\Rightarrow\ \frac{2017}{x}+\frac{2018}{y}=1.$$

Giả sử điểm rơi đạt tại :

Ta đặt :

$$x=ty\left(t>0\right)\Rightarrow\ t.y=2017+2018t\Leftrightarrow\ y=\frac{2018t+2017}{t}\Rightarrow\ x=2018t+2017.$$

$$P=2018t+2017+\frac{2018t+2017}{t}=\left(2018t+\frac{2017}{t}\right)+4035\ge\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)^2.$$

Khi đó :

Đẳng thức xảy ra khi :

$$2018t=\frac{2017}{t}(t>0)\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2018}}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a=\sqrt{2017}\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)\\y=b=\sqrt{2018}\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)\end{cases}.$$

$$MinP=\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)^3\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2017}\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)\\b=\sqrt{2018}\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)\end{cases}.$$

Vậy :

Lời bình :

Ta có thể làm nhanh hơn sử dụng bất đẳng thức *Svac – xơ* như sau :

$$1=\frac{2017}{a}+\frac{2018}{b}=\frac{\left(\sqrt{2017}\right)^2}{a}+\frac{\left(\sqrt{2018}\right)^2}{b}\ge\frac{\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)^2}{a+b}$$

Ta có :

$$\Leftrightarrow P=a+b\ge\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)^2.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2017}}{a}=\dfrac{\sqrt{2018}}{b}\\\dfrac{2017}{a}+\dfrac{2018}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2017}\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)\\b=\sqrt{2018}\left(\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)\end{cases}.$$

Đẳng thức xảy ra khi :

Ví dụ 2.40. Cho $a,b>0$ và $2a+3b\le 4$.

$$P=\frac{2002}{a}+\frac{2017}{b}=2996a-5501b.$$

Tìm GTNN của biểu thức:

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Bắc Giang năm học 2017 – 2018)

Hướng dẫn giải

$$a=\frac{1}{2},b=1.$$

Ta thấy điểm rơi đạt tại :

$$P=2002\left(\frac{1}{a}+4a\right)+2017\left(\frac{1}{b}+b\right)-2506(2a+3b)\ge 2018.$$

Ta tách :

$$MinP=2018\Leftrightarrow a=\frac{1}{2},b=1.$$

Vậy :

Ví dụ 2.41. Cho $a,b>0$ và $2a+b\ge 7$.

$$S=a^2-a+3b+\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+9.$$

Tìm GTNN của biểu thức

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Quảng Ninh năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại a=3, b = 1

$$S=a^2-a+3b+\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+9=(a-3)^2+\left(\frac{9}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)+2(2a+b)$$

Khi đó:

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$S \geq 0 + 2\sqrt{\frac{+}{a}.a} + 2\sqrt{b.\frac{1}{b}} + 2.7 + 9 = 6 + 2 + 14 = 22$

Vạy: Mins = 22 $\Leftrightarrow$ a=3, b=1

3.2.2. Kỹ thuật cân bằng hệ số

Ví dụ 2.42. Cho a, b, c >0 và a+b+c =3

(Trích ĐTTS vào lớp 10, Bắc Ninh năm học 2018 – 2019)

Hướng dẫn giải

Ta giả sử điểm rơi đạt tại: a=x, b=y, c=z(x,y,z>0) $\Rightarrow$ x+y+z=3

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 4\left(a^2 + x^2\right) \geq 8ax \\ 6\left(b^2 + y^2\right) \geq 12by \\ 3\left(c^2 + z^2\right) \geq 6cz \end{cases} \Rightarrow \left(4a^2 + 6b^2 + 3c^2\right) + \left(4x^2 + 6y^2 + 3z^2\right) \geq 8ax + 12by + 6cz$$

$$\begin{cases} 8x = 12y = 6z \\ x + y + z = 3 \end{cases} (x, y, z > 0) \Leftrightarrow x = 1, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}$$

Ta cần tìm x, y, z sao cho:

$$A \geq 8x(a + b + c) - \left(4x^2 + 6y^2 3z^2\right) = 24 - 12 = 12$$

Từ đó:

$$MinA = 12 \Leftrightarrow x = 1, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3} \; hay \; a = 1, b = \frac{2}{3}, c = \frac{4}{3}$$

Vậy:

Ví dụ 2.43. Cho $a, b, c > 0$ và a+b+c=3

Tìm GTNN của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^3$

Hướng dẫn giải

Do vai trò a, b là như nhau, ta giả sử điểm rơi tại:

$a = b = x, c = y(x, y > 0) \Rightarrow 2x + y = 3$

$$\begin{cases} a^2 + x^2 \geq 2ax \\ b^2 + x^2 \geq 2bx \\ c^3 + y^3 + y^3 \geq 3cy^2 \end{cases} \Rightarrow \left(a^2 + b^2 + c^3\right) + 2\left(x^2 + y^3\right) \geq 2ax + 2bx + 3cy^2$$

Khi đó có:

$$\begin{cases} 2x = 3y^2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} (x, y > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19 - \sqrt{37}}{12} \\ y = \dfrac{\sqrt{37} - 1}{6} \end{cases}$$

Ta cần tìm x, y sao cho:

$$P \geq 2x(a + b + c) - 2\left(x^2 + y^3\right) = \frac{541 - 37\sqrt{37}}{108}$$

Vậy:

$$MinP = \frac{541 - 37\sqrt{37}}{108} \Leftrightarrow a = b = \frac{19 - \sqrt{37}}{12}, c = \frac{\sqrt{37} - 1}{6}$$

Vậy:

Ví dụ 2.44. Cho x,y,z>0 và xy + yz + zx = 1

Tìm GTNN của biểu thức $B = x^2 + 28y^2 + 28z^2$

Cách 1

Vì vai trò bình đẳng của y và z nên điểm rơi đạt được tại: $y = z \neq x$

Do đó:

$$B = x^2 + 28y^2 + 28z^2 = (28-k)(y^2+z^2) + \left(\frac{x^2}{2} + ky^2\right), (0 < k < 28)$$

$$B \geq 2(28-k)yz + 2\sqrt{\frac{k}{2}}.xy + 2\sqrt{\frac{k}{2}}.zx$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy*, ta có:

$$\begin{cases} 28 - k = \sqrt{\frac{k}{2}} \Rightarrow k = \frac{49}{2} \\ 0 < k < 28 \end{cases}$$

Dựa trên giả thiết ta cần tìm k sao cho:

$$B = \frac{7}{2}(y^2+z^2) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{49y^2}{2}\right) \geq 7(xy+yz+zx) = 7$$

Vậy:

$$\begin{cases} y = z = \frac{x}{7} \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{\sqrt{15}} \\ y = z = \frac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi:

Cách 2

Vì vai trò bình đẳng của y và z nên điểm rơi đạt được tại: $y = z \neq x$

Do đó:

$$\begin{cases} a(y^2+z^2) \geq 2a.yz \\ bx^2 + cz^2 \geq 2\sqrt{bc}.zx \Rightarrow 2bx^2 + (a+c)y^2 + (a+c)z^2 \geq 2\sqrt{bc}.xy + 2a.yz + 2\sqrt{bc}.zx \\ bx^2 + cy^2 \geq 2\sqrt{bc}.xy \end{cases}$$

Dựa trên giả thiết ta cần tìm a, b, c sao cho:

$$\begin{cases} a = \sqrt{bc} \\ 2b = 1 \\ a + c = 28 \end{cases} (a,b,c > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{49}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$B = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{49}{2}z^2\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{49}{2}y^2\right) + \frac{7}{2}(y^2+z^2) \geq 7(xy+yz+zx) = 7$$

$$MinB=7 \Leftrightarrow \begin{cases} y=z=\frac{x}{7} \\ xy+yz+zx=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{\sqrt{15}} \\ y=z=\frac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

Vậy:

Ví dụ 2.45. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy+yz+zx=1$

Tìm GTNN của biểu thức $P=10x^2+10y^2+z^2$

Hướng dẫn giải

Vì vai trò bình đẳng của x và y nên dấu bằng đạt được tại: $x=y\neq z$

$$P=(10-k)(x^2+y^2)+\left(\frac{z^2}{2}+kx^2\right)+\left(\frac{z^2}{2}+ky^2\right),(0<k<10)$$

Do đó:

$$P\geq 2(10-k)xy+2\sqrt{\frac{k}{2}}.zx+2\sqrt{\frac{k}{2}}.\text{yz}$$

Theo *Cauchy* có:

$$\begin{cases} 10-k=\sqrt{\frac{k}{2}} \Rightarrow k=8 \\ 0<k<10 \end{cases}$$

Dựa trên giả thuyết cần tìm k sao cho:

$$P=2(x^2+y^2)+\left(\frac{z^2}{2}+8x^2\right)+\left(\frac{z^2}{2}+8y^2\right)\geq 4(xy+yz+zx)=4$$

Vậy:

$$\begin{cases} x=y=\frac{z}{4} \\ xy+yz+zx=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\pm\frac{1}{3} \\ z=\pm\frac{4}{3} \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi:

Ví dụ 2.46. cho a, b, c thỏa mãn $a,b\geq 0, c\geq 3, a+b+c=6$

Chứng minh rằng: $abc\leq\frac{27}{4}$

Hướng dẫn giải

Do vai trò a, b như nhau nên ta dễ thấy điểm rơi đạt tại:

$a=b=\frac{3}{2}, c=3 \Rightarrow c=2a=2b$

Khi đó abc = $\frac{1}{4}(2a)(2b).c\leq\frac{1}{4}\left(\frac{2a+2b+c}{3}\right)^3\leq\frac{1}{4}\left(\frac{9}{3}\right)^3=\frac{27}{4}$

Vì : 2a + 2b +c = 2(a = b + c) $\leq$ 2(a + b + c) – 3 = 2.6 – 3 = 9

Ví dụ: 2.47. Cho a, b thoã mãn 0 $\leq$ a $\leq$ 3, a = b = 11

Chứng minh rằng : ab $\leq$ 24.

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi tại a = 3, b = 8 $\Rightarrow$ 8a = 3b

Khi đó có : ab = $\frac{1}{24}(8a).(3b)\le\frac{1}{96}(8a+3b)^2\le\frac{1}{96}.48^2=24$

Vì: 8a + 3b = 3(a + b) + 5a $\le$ 3.11 + 5.3 = 48

Với các bài toán có điểm rơi đẹp thì độc giả có thể dùng kỹ thuật lập bảng hoặc sự hỗ trợ máy tính. Cụ thể ta quay lại *ví dụ* 2.34.

Ví dụ 2.34: Cho a,b > 0 và thoã mãn a + b $\ge$ 3

Tìm GTNN của biểu thức M = a + b + $\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}$

Hướng dẫn giải

Để tìm điểm rơi ta giả sử đạt tại:

a = x, b = y $\Rightarrow$ x + y = 3 $\Leftrightarrow$ y = 3 – x > 0 $\Rightarrow$ 0 < x < 3.

Ý tưởng là quy về một ẩn x xét cho dễ:

$$M_{\min}=(x+y)+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}=3+\frac{1}{2x}+\frac{2}{3-x}(0<x<3).$$

Dùng máy tính CASIO với chức năng TABLE tìm ra : x = 1 $\Rightarrow$ y = 2

Như vậy điểm rơi đạt tại : a = 1, b = 2

Ta tách: M = a + b + $\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{2}{b}+\frac{b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}\ge2\sqrt{\frac{1}{4}}+2+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

Vậy *Min*M = $\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=1,b=2$

Lời bình: Kinh nghiệm cho thấy điểm rơi thường là giá trị đẹp như số nguyên hoặc hữu tỉ nên ta có thể lập bảng thử để tìm GTNN hoặc GTLN đạt tại đâu từ đó tìm đúng diểm rơi, nhớ thu gọn khoảng cần xét dựa trên giả thiết như bài trên là 0 < x < 3.

Độc giả có thể lập bảng sau để tìm điểm rơi như sau:

x	0,5	1	1,5	2	2,5
M	4,8	4,5	4,(6)	5,25	7,2

Để có thể tính giá trị điền bảng cho nhanh, độc giả có thể dùng chức năng CALC.

4. Điểm rơi đạt tại biên và các ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 2.48. Cho x, y > 0 và xy $\ge$ 6, y $\ge$ 3.

Tìm GTNN của biểu thức P = x + y + 2013

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}xy=6\\y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\Rightarrow x+1=y.$$

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại biên:

Từ đó ta ghép :

P = (x + 1 + y) + 2012 $\ge$ 2$\sqrt{(x+1)y}+2012=2\sqrt{xy+y}+2012\ge2018$

Vì: $\begin{cases} xy \ge 6 \\ y \ge 3 \end{cases} \Rightarrow xy + y \ge 9 \Rightarrow 2\sqrt{xy+y} \ge 2.3 = 6$

Vậy: *Min*P = 2018 $\Leftrightarrow$ x = 2, y = 3

Ví dụ 2.49. Cho a,b,c thoã mãn $abc \ge 6, bc \ge 6, c \ge 3$

Chứng minh rằng : a + b + c $\ge$ 6

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại biên : $\begin{cases} abc = 6 \\ bc = 6 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$

Từ đó ta ghép :

P = a + b + c = $\left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) + \frac{c}{3} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{6}} + 2\sqrt{\frac{bc}{6}} + \frac{c}{3} \ge 3 + 2 + 1 = 6$

Vậy : a + b + c $\ge$ 6.

Ví dụ 2.50. Cho x, y thoã mãn 0 < x ≤ 1 , 2 $\le y < 3$, x + y = 3

Tìm GTNN của biểu thức P = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại biên: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$

Từ đó ta xét : 2P = $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{2x} \ge \frac{9}{2(x+y)} + \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow P \ge \frac{3}{2}$

Vậy *Min*P = $\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1, y = 2$

Ví dụ 2.51. Cho $0 \le x, y, z \le 1$

Tìm GTLN của biểu thức M = $x^{10} + y^6 + z^{2016}$ - xy - yz - zx

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại (x,y,z) = (1,0,0) và các hoán vị.

Từ đó : $\begin{cases} x^{10} \le x \\ y^6 \le y \\ z^{2016} \le z \end{cases} \Rightarrow M \le x + y + z - xy - yz - zx \le 1 - xyz \le 1$

Bởi từ giả thiết, ta có :

(x – 1)(y – 1)(z – 1) $\le$ 0 $\Leftrightarrow xyz + x + y + z - xy - yz - zx - 1 \le 0$

Vậy: *Max*M = 1 $\Leftrightarrow$ (x,y,z) = (1,0,0) và các hoán vị.

Ví dụ 2.52. Cho a,b,c ≥ 0 và a + b + c = 1

Chứng minh rằng : $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\geq 7$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 chuyên, ĐHSP Hà Nội năm học 2016 – 2017)

Cách 1

Ta dễ thấy điểm rơi tại (a,b,c) = (1,0,0) và các hoán vị.

Từ giả thiết ta có :

$$0\leq a\leq 1\Rightarrow a^2\leq a\Rightarrow \sqrt{5a+4}=\sqrt{a+4a+4}\geq\sqrt{a^2+4a+4}=a+2$$

Tương tự ta có: $\sqrt{5b+4}\geq b+2,\quad \sqrt{5c+4}\geq c+2$

Vậy: $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\geq a+b+c+6=7$

Cách 2

Ta đặt: x = $\sqrt{5a+4}$, y = $\sqrt{5b+4}$, z = $\sqrt{5c+4}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=17$

Vì $0\leq a,b,c\leq 1\Rightarrow 2\leq x,y,z\leq 3\Rightarrow (x-2)(x-3)\leq 0\Leftrightarrow x^2\leq 5x-6.$

Tương tự ta được : $y^2\leq 5y-6$, $z^2\leq 5z-6$.

Cộng vế với vế ta được :

$$5(x+y+z)-18\geq 17\Leftrightarrow 5P\geq 35\Leftrightarrow P\geq 7$$

Ví dụ 2.53. Cho $0\leq x\leq 1.$

Tìm GTNN của biểu thức $P=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{x}.$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại x = 0

Từ giả thiết ta có: 0 ≤ x ≤ 1 ⇔ $\begin{cases}\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\geq\sqrt{1-x+x}=1\\ \sqrt{1+x}+\sqrt{x}\geq\sqrt{1+0}+\sqrt{0}=1\end{cases}\Rightarrow P\geq 2$

Vậy: MinP = 2 ⇔ x = 0.

Lời bình: Ta còn có hướng tư duy khác dựa trên: 0 ≤ x ≤ 1 thì $\sqrt{t}\geq t$

5. Ứng dung nguyên lý Dirichlet chứng minh bất đẳng thức.

5.1. Nguyên lý Dirichlet cơ bản.

Nếu nhốt n+1 con thỏ vào n chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ (n∈N*).

Nguyên lý này tưởng chừng đơn gián nhưng nó có nhiều áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học (số học, hình học tổ hợp …). Cụ thể hơn ta có mệnh đề sau.

5. 2. Mệnh đề:

Trong ba số thức bất kỳ a,b,c luôn tìm được hai số có tích không âm (cùng dấu).

Đây là một mệnh đề quan trọng bởi khi ta đã tìm ra điểm rơi thì ta có thể áp dụng mệnh đề trên để chứng minh bất đẳng thức. Cụ thể nếu điểm rơi đạt tại a = b = c = k thì ta có thể giả sử hai số là a- k và b - k có tích không âm tức là (a-k)(b-k) ≥ 0.

5.3. Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 2.54. Cho a, b, c, > 0

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Hướng dẫn giải.

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $a = b = c = 1$.
Theo mệnh đề trên trong 3 số a-1; b-1và c-1 luôn có hai số có tích không âm.
Không mất tính tổng quát ta giả sử: $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$
$\Leftrightarrow 2c(ab + 1) \geq 2c(a + b) \Leftrightarrow 2abc \geq 2ac + 2bc - 2c$.
Vậy ta cần chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2ab + 2c$.
Thật vậy: $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2ab + 2c \Leftrightarrow (a - b)^2 + (c - 1)^2 \geq 0\ \forall a,b,c$.
Bất đẳng thức sau luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xẩy ra khi: $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.55. Cho a, b, c, > 0
Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a + 1)(b+1)(c+1)$.

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $a = b = c = 1$.
Ta có: $(a + 1)(b+1)(c+1) = abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$
Biến đổi tương đương ta được;
$2(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 4 \geq 2(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)$.
Theo ví dụ 2.54 ta đã có: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$.
Vậy ta cần chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.
Thật vậy:
$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0\ \forall a,b,c$.
Bất đẳng thức sau luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xẩy ra khi: $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.56. Cho a, b, c, > 0 và abc = 1.
Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)$.

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $a = b = c = 1$.
Sử dụng bất đẳng thức cauchy, ta có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3$$

Ta cần chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca)$.
Ta để ý: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1$ (do abc = 1).
Theo ví dụ 2.54 ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xẩy ra khi: $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.57 (USA 2001). Cho a, b, c, > 0 và $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.
Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq 2$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $a = b = c = 1$.
Theo mệnh đề trên trong 3 số a-1; b-1và c-1 luôn có hai số có tích không âm.
Không mất tính tổng quát ta giả sử: $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ac + bc - c \leq abc$ (1).
Mặt khác:
$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 2ab + c^2 + abc \Leftrightarrow 4 - c^2 \geq ab(c + 2) \Leftrightarrow ab \leq 2 - c$ (2).
Cộng vế của (1) và (2) ta được: $ab + bc + ca \leq abc + 2$.
Đẳng thức xẩy ra khi: $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.58 (IRAN 2002). Cho a, b, c, > 0 và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.
Chứng minh rằng: $a + b + c \leq 3$

Hướng dẫn giải

Theo ví dụ 2.57, ta chứng minh được: $ab + c \leq 2 \Leftrightarrow c \leq 2 - ab$.
Từ: $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow a + b \leq ab + 1$.
Vậy: $a + b + c \leq ab + 1 + 2 - ab = 3$

Đẳng thức xẩy ra khi: a = b = c = 1.

Ví dụ 2.59(VMO 2006). Cho a, b, c, > 0 và abc = 1.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ + 3 ≥ 2 (a + b+ c)

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}$ (x;y;z > 0 và xyz = 1).

Ta cần chứng minh: $x^2+y^2+z^2+3 \ge 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3 \ge 2(xy+yz+zx)$.

Ta để ý: $x^2+y^2+z^2+3 = x^2+y^2+z^2+2xyz+1 \ge 2(xy+yz+zx)$.

Theo ví dụ 2.54 ta có điều phải chứng minh

Đẳng thức xẩy ra khi: a = b = c = 1.

Ví dụ 2.60(VMO 1996). Cho a, b, c > 0 và thỏa mãn ab + bc + ca + abc = 4

Chứng minh rằng: a + b + c $\ge$ ab + bc + ca

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: a = b = c =1.

Theo mệnh đề trên trong 3 số a – 1, b – 1, và c – 1 luôn có hai số tích không âm.

$$(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow c \ge ac+bc-abc.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử:

$$a+b \ge ab+abc (1).$$

Ta cần chứng minh:

$$ab+bc+ca+abc=4 \Leftrightarrow c(a+b+ab)=4-ab \Leftrightarrow c=\frac{4-ab}{a+b+ab}$$

Từ giả thiết ta có: .

$$\Leftrightarrow a+b \ge ab\left(1+\frac{4-ab}{a+b+ab}\right) \Leftrightarrow (a+b)(a+b+ab) \ge ab(a+b+4)$$

Từ đó có: (1)

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0, \forall a,b.$$

Vậy bất đẳng thức (1) luôn đúng nên hoàn tất chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi: a = b = c = l.

Ví dụ 2.61. Cho a, b, c > 0 và $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tìm GTLN của P = ab + bc + ca - abc.

(Trích đề thi HSG9 thành phố Hà Nội 2017 -2018)

Hướng dẫn giải

Do vai trò của a, b, c, như nhau nên đẳng thức xảy ra tại: a = b = c.

$$2a^3+3a^2-1=0 \Leftrightarrow (2a-1)(a+1)^2=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Thay vào ta được:

Ta tìm được điểm rơi đạt tại: a = b = c = $\frac{1}{2}$.

Theo mệnh đề trên trong 3 số $a-\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2}$ và $c-\frac{1}{2}$ *luôn có hai số tích không âm.*

Không mất tính tổng quát ta giả sử:

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow 4c\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)\ge 0.$$

$$\Leftrightarrow 4abc-2ac-2bc+c\ge 0\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca-abc)\le 2ab(c+1)+c$$

$$\Rightarrow 2P\le 2ab(c+1)+c$$

Từ giả thiết có: $1-c^2=a^2+b^2+2abc\ge 2ab+2abc=2ab(c+1)\Leftrightarrow 1-c\ge 2ab$

Khi đó:

$$2P\le 2ab(c+1)+c\le (1-c)(1+c)+c=1-c^2+c=\frac{5}{4}-\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow P\le\frac{5}{8}$$

Vậy: MaxP = $=\frac{5}{8}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}.$

Ngoài cách giải trên, chúng tôi cũng trình bày theo phương pháp đổ biến trình bày trong chủ đề số 3 tới đây.

6. Một số bài lập tự luyện củng cố kiến thức

Bài 2.1. Cho x, y > 0 và x + y +xy = 15

Tìm GTNN của biếu thức P = $x^2 + y^2$.

(Trích ĐTTS vào lớp 10 tỉnh Quảng Ninh năm học 2016 – 2017)

Bài 2.2. Cho x, y > 0 và 2x + 3y $\le$ 2

Tìm GTNN của biếu thức $A=\frac{4}{4x^2+9y^2}+\frac{9}{xy}$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TP Hải phòng năm học 2012 - 2013)

Bài 2.3. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1

Tìm GTNN của $P=\frac{9}{2(ab+bc+ca)}+\frac{2}{a^2+b^2+c^2}.$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TP Hải phòng năm học 2016 - 2017)

Bài 2.4. Cho a, b, c > 0 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=16.$

Chứng minh rằng : $\frac{1}{3a+2b+c}+\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{2a+b+3c}\le\frac{8}{3}.$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TP Hải phòng năm học 2017 - 2018)

Bài 2.5. Cho x, y, z > 0 và và x + y + z = $\frac{3}{4}$. Chứng mình rằng:

$$6(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx)+2\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)\ge 9.$$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TP Hải phòng năm học 2018 - 2019)

Bải 2.6. Cho x, y, z > 0 và x(x + 1) + y(y + 1) + z(z + 1) $\le$ 18

$$P = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1}.$$

Tìm GTNN của biểu thức:

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Thái Bình năm học 2014 - 2015)

Bài 2.7. Cho x, y, z > 0 và x + y $\le$ z.

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \ge \frac{27}{2}.$$

Chứng minh rằng :

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nghệ An năm học 2014 - 2015)

$$x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} \ge \frac{9}{2}.$$

Bài 2.8. Cho x, y > 0 và x + y ≥ 3 Chứng minh rằng :

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nghệ An năm học 2015 - 2016)

Bài 2.9. Cho l < a, b, c < 3 và thỏa mãn a + b + c = 6.

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

Tìm GTLN của

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh chuyên Hậu Giang năm học 2017 - 2018)

Bài 2.10. Cho a, b, c > 0.

$$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \le 1$$

Chứng minh rằng :

Bài 2.11. Cho hai số thực x, y thỏa mãn x > y, xy = 1.

$$M = \frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

Tìm GTNN của

(Trích ĐTTS vào lớp 10 tỉnh Ninh Bình năm học 2016 - 2017)

Bài 2.12. Cho x, y > 0

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x(2x+y)} + \sqrt{y(2y+x)}}.$$

Tìm GTNN của

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Phú Thọ năm học 2013 - 2014)

Bài 2.13. Cho a, b, c > 0

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + \frac{18}{ab+bc+ca}.$$

Tìm GTNN của

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Phú Thọ năm học 2016 - 2017)

Bài 2.14. Cho a, b, c > 0 và thỏa mãn 2ab + c(a+b) = 6.

$$P = \frac{2a+2b+c}{\sqrt{4a^2+12} + \sqrt{4b^2+12} + \sqrt{4c^2+12}}.$$

Tìm GTNN của

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT LTV năm học 2019 - 2020)

CHỦ ĐỀ 3 : PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1. Giới thiệu phương pháp đổi biến.

Phương pháp đổi biến là một trong những phương pháp phổ biến nhất khi chứng minh bất đẳng thức, thông qua việc **chuyển đổi sang biến mới** giúp chúng ta có cách nhìn nhận, đánh giá dữ kiện đề bài một cách dễ dàng hơn từ đó giải quyết được bài toán.

Để giúp độc giả hình dung cách tiếp cận, chúng tôi phân loại các kiểu đổi biến như sau:

2. Phân loại các kiểu đổi biến :

2.1. Đổi biến các mẫu phức tạp.

Trong một số bài toán mà biểu thức ở mẫu phức tạp thì việc đổi biến đặc biệt có hiệu quả. Cụ thể chúng ta cùng đi xét các ví dụ dưới đây:

Ví dụ 3.1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$.

Hướng dẫn giải:

Ta đặt : $\begin{cases} x=a+b-c>0 \\ y=b+c-a>0 \\ z=c+a-b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$

Ta cần chứng minh : $\frac{(x+y)^2}{4z}+\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(x+z)^2}{4y}\ge x+y+z$

Ta có : $\frac{(x+y)^2}{4z}+\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(x+z)^2}{4y}\ge \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}(1)$

Mặt khác: $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\ge 2y$, $\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 2x,$ $\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\ge 2y.$

$$2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right)\ge 2(x+y+z)\Leftrightarrow \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\ge x+y+z(2)$$

Từ đó ta được : $\frac{(x+y)^2}{4z}+\frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(x+z)^2}{4y}\ge x+y+z$

Từ (1) và (2) ta được :

Vậy : $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$

Lời bình :

Ta có thể đặt : 4x = a + b – c > 0; 4y = b + c – a > 0 ; 4z = c + a – b > 0

Khi đó : a = 2 (x + z) ; b = 2 (x + y) ; c = 2 (y + z).

Bài toán quy về chứng minh : $\frac{(x+y)^2}{z}+\frac{(y+z)^2}{x}+\frac{(x+z)^2}{y}\ge 4(x+y+z)$

Ví dụ 3.2 . Cho a,b,c > 0 . Chứng minh rằng : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải :

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$$

Ta đặt : x = b + c , y = c + a , z = a + b (x, y, z >0)

$$a=\frac{y+z-x}{2},b=\frac{z+x-y}{2},c=\frac{x+y-z}{2}$$

Khi đó :

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\frac{3}{2}$$

Ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-3\right)\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\ge 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3.3. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tâm giác tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{4c}{a+b-c}$$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 ĐHKHTN Hà Nội năm học 2002-2003)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x=a+b-c>0\\ y=b+c-a>0\\ z=c+a-b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{x+z}{2}\\ b=\frac{x+y}{2}\\ c=\frac{y+z}{2}\end{cases}$$

Ta đặt

$$P=\frac{4(y+z)}{2x}+\frac{9(z+x)}{2y}+\frac{16(x+y)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{16x}{z}\right)+\left(\frac{9z}{y}+\frac{16y}{z}\right)\right]\ge 26$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\frac{3}{2}x\\ z=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{7}{5}c\\ b=\frac{6}{5}c\end{cases}$$

Vậy : MinP = 26

Lời bình : Độc giả có thể làm theo các hướng khác như sau:

$$2P=\left(\frac{8a}{b+c-a}+4\right)+\left(\frac{18b}{c+a-b}+9\right)+\left(\frac{32c}{a+b-c}+16\right)-29$$

Tách :

$$\Leftrightarrow 2P = (a+b+c)\left(\frac{2^2}{b+c-a} + \frac{3^2}{c+a-b} + \frac{4^2}{a+b-c}\right) - 29$$

$$\Rightarrow 2P \ge (a+b+c)\frac{(2+3+4)^2}{a+b+c} - 29 = 52 \Leftrightarrow P \ge 26$$

Ví dụ 3.4. Cho a, b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Tìm GTNN của biểu thức

$$S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c}$$

(Trích đề thi vào 10 chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có a + b + c = 2

$$\begin{cases} x = a+b-c > 0 \\ y = b+c-a > 0 \\ z = c+a-b > 0 \\ x+y+z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x+z}{2} \\ b = \dfrac{x+y}{2} \\ c = \dfrac{y+z}{2} \end{cases}$$

Ta đặt :

$$S = \frac{(y+z)}{2x} + \frac{4(z+x)}{2y} + \frac{9(x+y)}{2x} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{9x}{z}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z}\right)\right]$$

$$\Rightarrow S \ge 2+3+6 = 11$$

$$MinS = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, z = 3x, 2z = 3y \\ x+y+z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1 \Rightarrow a = \frac{5}{6}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{2}$$

Khi đó thì tam giác đó trở thành tam giác vuông bởi $a^2 = b^2 + c^2$

Lời bình : Độc giả có thể làm cách khác như sau

$$8S = \left(\frac{8a}{b+c-a} + 4\right) + \left(\frac{32b}{c+a-b} + 16\right) + \left(\frac{72c}{a+b-c} + 36\right) - 56$$

$$\Leftrightarrow 8S = (a+b+c)\left(\frac{2^2}{b+c-a} + \frac{4^2}{c+a-b} + \frac{6^2}{a+b-c}\right) - 56$$

$$\Rightarrow 8S \ge (a+b+c)\frac{(2+4+6)^2}{a+b+c} - 56 = 88 \Leftrightarrow S \ge 11$$

Trang 91

Ví dụ 3.5 Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+3c}{a+b} + \dfrac{c+3a}{b+c} + \dfrac{4b}{c+a} \ge 6$

Hướng dẫn giải

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$$

Ta đặt x = a + b; y = b + c; z = c + a(x, y, z > 0)

$$a=\frac{x+z-y}{2}; b=\frac{x+y-z}{2};\ c=\frac{y+z-x}{2}$$

Khi đó:

$$\begin{cases} a+3c=\frac{x+z-y}{2}+\frac{3(y+z-x)}{2}=y+2z-x \\ c+3a=\frac{y+z-x}{2}+\frac{3(x+z-y)}{2}=x+2z-y \\ 4b=2(x+y-z) \end{cases}$$

Từ đó:

$$\frac{y+2z-x}{x}+\frac{x-y+2z}{y}+\frac{2(x+y-z)}{z}\geq 6$$

Ta cần chứng minh:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+2\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-4\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+2\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 10$$

Thật vậy:

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2;\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2;\ \frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+2\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 10$$

$$\frac{a+3c}{a+b}+\frac{c+3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}\geq 6$$

Vậy

$$\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$$

Ví dụ 3.6. Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng:

Hướng dẫn giải

$$\Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$$

Ta đặt: a = x+y, b = z + x, c = x + y (a, b, c > 0)

$$x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{c+a-b}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$$

Khi đó:

$$\frac{25(b+c-a)}{2a}+\frac{4(c+a-b)}{2b}+\frac{9(a+b-c)}{2c}>12$$

Ta chứng minh:

Thật vậy:

$$\left(\frac{25b}{2a}+\frac{4a}{2b}\right)+\left(\frac{25c}{2a}+\frac{9a}{2c}\right)+\left(\frac{4c}{2b}+\frac{9b}{2c}\right)-19\geq 10+15+6-19=12$$

VT =

$$\begin{cases} 5b=2a \\ 5c=3a \end{cases}\Rightarrow 5b+5c=5a\Rightarrow x=b+c-a=0$$

Đẳng thức trên xảy ra khi: (trái gt)

Vậy $\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$

2.2. Đổi biến dựa trên giả thiết bài toán

Ví dụ 3.7. Cho a, b, c là các số thực dương và thoả mãn abc = 1

Chứng minh rằng: $\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết abc = 1, ta đặt: $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ (x, y, z > 0).

Khi đó: $\frac{a}{ab+1}=\frac{1}{b+\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{y}{z}+\frac{y}{x}}=\frac{zx}{xy+yz}.$

Tương tự có: $\frac{b}{bc+1}=\frac{xy}{yz+zx}$, $\frac{c}{ca+1}=\frac{yz}{xz+xy}$

Ta cần chứng minh: $\frac{xy}{yz+zx}+\frac{yz}{zx+xy}+\frac{zx}{xy+yz}\ge\frac{3}{2}$

Theo Ví dụ 3.2 ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}(\forall a,b,c>0).$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi: a = b = c = 1.

Ví dụ 3.8. Cho a, b, c là các số thực dương và thoả mãn abc = 1.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết abc = 1, ta đặt : $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}(x,y,z>0)$

Khi đó : $\frac{1}{a(b+1)}=\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}+1\right)}=\frac{1}{\frac{x}{z}+\frac{x}{y}}=\frac{yz}{zx+xy}.$

Tương tự có: $\frac{1}{b(c+1)}=\frac{zx}{xy+yz}$, $\frac{1}{c(a+1)}=\frac{xy}{yz+zx}$

Ta cần chứng minh: $\frac{xy}{yz+zx}+\frac{yz}{zx+xy}+\frac{zx}{xy+yz}\ge\frac{3}{2}.$

Theo Ví dụ 3.2 ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Ví dụ 3.9.(IMO 2000). Cho a, b, c > 0 và thoả mãn abc = 1.

Chứng minh rằng: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le1.$

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ (x, y, z > 0)

Khi đó: $a - 1 + \frac{1}{b} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} = \frac{x - y + z}{y}$

Tương tự ta cũng có được: $b - 1 + \frac{1}{c} = \frac{y - z + x}{z}$, $c - 1 + \frac{1}{a} = \frac{z - x + y}{x}$.

Vậy ta cần chứng minh: $(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \le xyz.$

Không mất tính tổng quát giả sử: $x \ge y \ge z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z > 0 \\ y - z + x > 0 \end{cases}$

TH1: $z - x + y \le 0 \Rightarrow (x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \le 0 \le xyz, \forall x, y, z > 0.$

TH2: $z - x + y > 0 \Rightarrow 0 < \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \le \frac{x - y + z + y - z + x}{2} = x$

Tương tự ta có:

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{(y - z + x)(z - x + y)} \le y \\ 0 < \sqrt{(z - x + y)(x - y + z)} \le z \end{cases} \Rightarrow (x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \le xyz.$$

Vậy: $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1.$

Ví dụ 3.10. Cho a, b, c là các số thực dương và thoả mãn abc = 1.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{ab + a + 2} + \frac{1}{bc + b + 2} + \frac{1}{ca + c + 2} \le \frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết abc = 1, ta đặt: $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ (x, y, z > 0)

Khi đó: $\frac{1}{ab + a + 2} = \frac{1}{\frac{x}{y}.\frac{y}{z} + \frac{x}{y} + 2} = \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + 2} = \frac{yz}{zx + xy + 2yz}.$

Tương tự có: $\frac{1}{bc + b + 2} = \frac{zx}{xy + yz + 2zx}$, $\frac{1}{ca + c + 2} = \frac{xy}{yz + zx + 2xy}$

Ta cần chứng minh: $\frac{xy}{yz + zx + 2xy} + \frac{yz}{zx + xy + 2yz} + \frac{zx}{xy + yz + 2zx} \le \frac{3}{4}.$

$$\frac{xy}{yz + zx + 2xy} = xy.\frac{1}{(xy + yz) + (xy + zx)} \le \frac{xy}{4}\left(\frac{1}{xy + yz} + \frac{1}{xy + zx}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{yz + zx + 2xy} \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x + z} + \frac{y}{y + z}\right)$$

Tương tự có:

$$\frac{yz}{zx+xy+2yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)\quad;\quad\frac{zx}{xy+yz+2zx}\le\frac{1}{4}\left(\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}\right)$$

Cộng vế được:

$$\frac{xy}{yz+zx+2xy}+\frac{yz}{zx+xy+2yz}+\frac{xz}{xy+yz+2xz}\le\frac{3}{4}$$

Vậy :

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 3.11. Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng : $\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\le 1$

Hướng dẫn giải

Biến đổi ta được:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\le 1$$

Đặt :

$$x=\frac{a}{b}\ ;\ y=\frac{b}{c}\ ;\ z=\frac{c}{a}\ ;(x,y,z>0)\Rightarrow\ xyz=1$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\ (y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)+(x+2)(y+2)\le(x+2)(y+2)(z+2)$$

$$\Leftrightarrow\ (xy+yz+zx)+4(x+y+z)+12\le xyz+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+8$$

$$\Leftrightarrow 1+xy+yz+zx\ge 4\Leftrightarrow\ xy+yz+zx\ge 3$$ (đúng do $xy+yz+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$)

Vậy :

$$\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\le 1$$

Ví dụ 3.12. Cho *a, b, c* là các số thực dương . Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

Hướng dẫn giải

Biến đổi thành:

$$\frac{b}{c}.\frac{a}{c+a}+\frac{c}{a}.\frac{b}{a+b}+\frac{a}{b}.\frac{c}{b+c}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{b}{c}.\frac{1}{\frac{c}{a}+1}+\frac{c}{a}.\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{a}{b}.\frac{1}{\frac{b}{c}+1}\ge\frac{1}{\frac{c}{a}+1}+\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1}{\frac{b}{c}+1}$$

Ta đặt :

$$x=\frac{a}{b}\ ;\ y=\frac{b}{c}\ ;\ z=\frac{c}{a}\ ;(x\ ;y\ ;z>0\ ;\ xyz=1)$$

$$\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}+\frac{x}{y+1}\ge\frac{1}{z+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$$

Ta cần chứng minh :

Độc giả đưa về :

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x+y+z-3)+\left(xy^2+yz^2+zx^2-3\right)\ge 0 \qquad (*)$$

$$\begin{cases} x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3 \\ xy^2+yz^2+zx^2\ge 3xyz=3 \end{cases}$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng vì :

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

Vậy :

Ngoài kiểu biến đổi trên, chúng tôi giới thiệu một kiểu đổi biến dựa trên đẳng thức đã biết.

$$(x+y)(y+z)(z+x)=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz$$

Ta đã biết:

$$\Leftrightarrow \frac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(y+z)(z+x)}+\frac{yz}{(z+x)(x+y)}+\frac{zx}{(x+y)(y+z)}+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}=1$$

$$a=\frac{x}{y+z}\ ;\ b=\frac{y}{z+x}\ ;\ c=\frac{z}{x+y} \quad \Rightarrow ab+bc+ca+2abc=1$$

Đặt :

$$a=\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}}\ ;\ b=\sqrt{\frac{yz}{(z+x)(x+y)}}\ ;\ c=\sqrt{\frac{zx}{(x+y)(y+z)}} \quad \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc=1$$

Đặt :

$$a=\frac{2x}{y+z}\ ;\ b=\frac{2y}{z+x}\ ;\ c=\frac{2z}{x+y} \quad \Rightarrow ab+bc+ca+abc=4$$

Đặt:

Ví dụ 3.13. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 4(a+b+c)$$

Chứng minh rằng :

Hướng dẫn giải

$$a=\frac{x}{y+z}\ ;\ b=\frac{y}{z+x}\ ;\ c=\frac{z}{x+y}\ ;\ (x;y;z>0)$$

Từ giả thiết ta đặt :

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{y+z}\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}\ge\frac{4x}{y+z}$$

Ta có :

$$\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\ge\frac{4y}{y+z};\frac{z}{x}+\frac{y}{y}\ge\frac{4z}{x+y}$$

Tương tự :

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Cộng vế với vế được:

$$a=b=c=\frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi

Ví dụ 3.14. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z + 2 = xyz$.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$$

Chứng minh :

Hướng dẫn giải

$$x+y+z+2=xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x}.\frac{1}{y}+\frac{1}{y}.\frac{1}{z}+\frac{1}{z}.\frac{1}{x}+2.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\frac{1}{z}=1$$

Ta biến đổi :

$$\frac{1}{x}=\frac{a}{b+c};\frac{1}{y}=\frac{b}{c+a};\frac{1}{z}=\frac{c}{a+b}$$

Theo trên ta đặt :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{y}.\frac{1}{z}}+\sqrt{\frac{1}{z}.\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}\le\frac{3}{2}$$

Ta biến đổi :

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}\le\frac{3}{2}$$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{b}{c+a}.\dfrac{c}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{b}{a+b}.\dfrac{c}{c+a}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{c+a}\right)\\ \sqrt{\dfrac{c}{a+b}.\dfrac{a}{b+c}}=\sqrt{\dfrac{c}{b+c}.\dfrac{a}{a+b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{a+b}\right)\\ \sqrt{\dfrac{a}{b+c}.\dfrac{b}{c+a}}=\sqrt{\dfrac{a}{c+a}.\dfrac{b}{b+c}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c+a}+\dfrac{b}{b+c}\right)\end{cases}$$

Ta có:

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}\le\frac{3}{2}$$

Cộng vế với vế được:

Ví dụ 3.15. Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx + xyz = 4$

$$x+y+z\ge xy+yz+zx$$

Chứng minh rằng :

Hướng dẫn giải

$$x=\frac{2a}{b+c}\ ;\ y=\frac{2b}{c+a}\ ;\ z=\frac{2c}{a+b}\ ;(a\ ;b\ ;c>0)$$

Từ giả thiết ta đặt:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}$$

Ta chứng minh :

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Độc giả đưa về: (Schur)

Ví dụ 3.16. Cho $x, y, x > 0$ và $x + y + z + 1 = 4xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi giả thiết:

$x + y + z + 1 = 4xyz \Leftrightarrow (2x) + (2y) + (2z) + 2 = (2x).(2y).(2z)$

Theo trên ta đặt: $\frac{1}{2x} = \frac{a}{b+c}, \frac{1}{2y} = \frac{b}{c+a}, \frac{1}{2z} = \frac{c}{a+b}$ $(a, b, c > 0)$

Ta cần chứng minh:

$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Nesbitt)

Ví dụ 3.17. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

Tìm GTLN của $P = ab + bc + ca - abc$.

(Trích đề thi HSG lớp 9, TP Hà Nội năm học 2018 – 2019)

Hướng dẫn giải

Đặt: $a = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}, b = \sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}, c = \sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}$ $(x, y, z > 0)$

Ta có: $2P = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 1 = (a + b + c)^2 - 1$

Mặt khác: $a = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} = \sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}\right)$

Từ đó: $a + b + c \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+z}{x+z} + \frac{y+z}{y+z} + \frac{x+y}{x+y}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow 2P \leq \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow P \leq \frac{5}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = c = \frac{1}{2}$. Vậy: MaxP = $\frac{5}{8} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

2.3 Đổi biến bất đẳng thức có điều kiện

Ví dụ 3.18. Cho $a \leq 1$ và $a + b \geq 3$. Chứng minh rằng: $3a^2 + b^2 + 3ab \geq \frac{25}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $\begin{cases} 1 - a = x \\ a + b = 3 + y \end{cases} (x, y \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - x \\ b = x + y + 2 \end{cases}$

Ta có: $M = 3a^2 + b^2 + 3ab - \frac{27}{4}$

$$= 3(1 - x)^2 + (x + y + 2)(x + y + 2 + 3 - 3x) - \frac{27}{4}$$

Biến đổi thu được:

$$M = x^2 + y^2 - 5x + 7y - xy + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{y}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{2}y \ge 0 \quad (\forall x, y \ge 0)$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{2} \end{cases}$

Ví dụ 3.19. Cho $a \le 4$. Chứng minh rằng: $a^2(2-a) + 32 \ge 0$

Hướng dẫn giải

Ta dễ dàng thấy điểm rơi đạt tại: $a = 4$

Ta đặt: $4 - a = x\,(x \ge 0) \Rightarrow a = 4 - x$

$$\Rightarrow M = (4-x)^2(x-2) + 32 = (x-2)(x^2 - 8x + 16) + 32 = x^3 - 10x^2 + 32x = x\left[(x-5)^2 + 7\right] \ge 0$$

2.4. Đổi biến p, q, r

2.4.1. Kiến thức cần nhớ

Nếu ta đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc \quad (a, b, c \ge 0)$ thì ta sẽ có các kết quả sau:

1) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow p^2 \ge 3q$

2) $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow q^2 \ge 3pr$

3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{q}{r} \ge \frac{3p}{q} \quad (a, b, c > 0)$

4) $(a+b+c)^3 \ge 27abc \Leftrightarrow p^3 \ge 27r$

5) $(a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc \Leftrightarrow pq \ge 9r$.

Ngoài ra ta cũng thu được những đẳng thức quen thuộc dưới đây:

6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = p^2 - 2q$

7) $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$

$$= p(p^2 - 3q) + 3r = p^3 - 3pq + 3r$$

8) $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = pq - r$

9) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc = pq - 3r$

10) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = q^2 - 2pr$

Do khuôn khổ cuốn sách nên không trình bày hết được, mời độc giả tự khám phá thêm.

2.4.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 3.20. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Chứng minh rằng: $2(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 9$.

Hướng dẫn giải

Hướng 1: Theo kỹ thuật đổi biến p, q, r ta quy về bài toán sau:

Cho $p, q, r > 0$ và thỏa mãn $p^2 - 2p = 3$. Chứng minh rằng: $M = 2p + \frac{q}{r} \ge 9$

Theo trên ta đã có: $q^2 \ge 3pr \Leftrightarrow \frac{q}{r} \ge \frac{3p}{q} = \frac{6p}{p^2-3} \Rightarrow M \ge 2p + \frac{6p}{p^2-3}$

Ta cần chứng minh:

$$2p + \frac{6p}{p^2-3} \ge 9 \Leftrightarrow 2p^3 - 9p^2 + 27 \ge 0 \Leftrightarrow (p-3)^2(2p+3) \ge 0, \forall p > 0$$

Đẳng thức xảy ra tại: $a = b = c = 1$

Hướng 2: Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (a+b+c) + (a+b+c) + \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{(a+b+c)^2.\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)}$$

Mặt khác ta biết:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} \ge \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

Ta cũng có:

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)(ab+bc+ca) \le \frac{(a+b+c)^6}{27}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \ge 9(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{ab+bc+ca} \ge \frac{27}{(a+b+c)^3}.$$

$$M \ge 3\sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)^3}{ab+bc+ca}} = 3(a+b+c)\sqrt[3]{\frac{3}{ab+bc+ca}} \ge 3(a+b+c).\frac{3}{a+b+c} = 9$$

Hướng 3: Ta cũng có thể dùng kĩ thuật UCT để giải quyết bài toán trên *(Trình bày chủ đề 4)*

Ví dụ 3.21. Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 12$. Tìm GTNN của biểu thức $M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2(x+y+z)$

(Trích đề thi HSG 9, tỉnh Thái Bình năm học 2015 - 2016

Hướng dẫn giải

Hướng 1: Nếu ta đổi biến sẽ đưa về bài toán quen thuộc:

Ta đặt:

$$\frac{1}{x} = 2a, \frac{1}{y} = 2b, \frac{1}{z} = 2c\ (a,b,c > 0) \Rightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2\right) = 12 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 3$$

Khi đó: $M = 2(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Đây chính là *ví dụ 3.20*, độc giả tham khảo lời giải bên trên

3. Bất đẳng thức Schur và ứng dụng

3.1. Nhắc lại bất đẳng thức Schur

Bất đẳng thức Schur: $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \ge 0$

Chứng minh

Do vai trò *a, b, c* bình đẳng nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $a \ge b \ge c \ge 0$

Khi đó ta có: $\begin{cases} c-a \le 0 \\ c-b \le 0 \end{cases} \Rightarrow c(c-a)(c-b) \ge 0$

Ta cần chứng minh: $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a) \ge 0$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)-b(b-c)(a-b) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)\left[a(a-c)-b(b-c)\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2-ac-b^2+bc\right)=(a-b)^2(a+b-c) \ge 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Ngoài hướng trên, bạn đọc có thể đặt: $x=a-b \ge 0; y=b-c \ge 0 \Rightarrow a-c=x+y$

3.2. *Khai thác ứng dụng của bất đẳng thức Schur.*

Ta có: $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \ge 0$

$\Leftrightarrow a\left[a^2-a(b+c)+bc\right]+b\left[b^2-b(c+a)+ca\right]+c\left[c^2-c(a+b)+ab\right] \ge 0$

$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ (1)

Mặt khác ta biết: $\begin{cases} a^3+b^3+c^3+3abc=p^3-3pq+6r \\ a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=pq-3r \end{cases}$

Vì: $(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

Vậy ta có: (1) $\Leftrightarrow p^3-3pq+6r \ge pq-3r \Leftrightarrow 9r \ge p\left(4q-p^2\right) \Leftrightarrow r \ge \dfrac{p\left(4q-p^2\right)}{9}$

Đây là kết quả quan trọng để xử lí các bài toán bằng phương pháp đổi biến *p, q, r*

Chúng ta cùng tìm hiểu cụ thể hơn qua các ví dụ minh họa sau:

Ví dụ 3.22. Cho *a, b, c* là các số dương và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{81(ab+bc+ca)}+abc \ge \frac{5}{27}$$

Hướng dẫn giải

Theo kĩ thuật đổi biến *p, q, r* ta quy về bài toán sau:

Cho *p, q, r* >0 và thỏa mãn $p=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{4}{81q}+r \ge \dfrac{5}{27}$

Ta đã có: $r \ge \dfrac{p\left(4q-p^2\right)}{9} \Leftrightarrow r \ge \dfrac{4q-1}{9} \Rightarrow \dfrac{4}{81q}+r \ge \dfrac{4}{81q}+\dfrac{4q-1}{9}$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{4}{81q}+\dfrac{4q-1}{9} \ge \dfrac{5}{27}$

Thật vậy: $\dfrac{4}{81q}+\dfrac{4q-1}{9}=\left(\dfrac{4}{81q}+\dfrac{4q}{9}\right)-\dfrac{1}{9} \ge 2\sqrt{\dfrac{16}{729}}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{27}$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Vậy: $\dfrac{4}{81(ab+bc+ca)}+abc\ge\dfrac{5}{27}$

Ví dụ 3.23. (UK 1999) Cho *a, b, c* là các số thực không âm và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $9abc\ge4(ab+bc+ca)-1$

Hướng dẫn giải

Đặt: $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc\ (p,q,r>0;\ p=1)$

Ta cần chứng minh: $9r\ge4q-1$

Thật vậy, theo trên ta đã có: $9r\ge p(4q-p^2)$

Mà: $p=1\Rightarrow 9r\ge1(4q-1)=4q-1$

Ví dụ 3.24. (IMO 1984) Cho *a, b, c* là các số thực không âm và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $0\le ab+bc+ca-2abc\le\dfrac{7}{27}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc\ (p,q,r>0;\ p=1)$

Ta cần chứng minh: $0\le q-2r\le\dfrac{7}{27}\Leftrightarrow 2r\le q\le\dfrac{7}{27}+2r$

Ta đã biết: $\begin{cases}pq\ge9r\\9r\ge p(4q-p^2)=4q-1\end{cases}\Leftrightarrow 9r\le q\le\dfrac{9r+1}{4}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{9r+1}{4}\le2r+\dfrac{7}{27}\Leftrightarrow r\le\dfrac{1}{27}$ (do $p^3\ge27r$)

Vậy: $0\le ab+bc+ca-2abc\le\dfrac{7}{27}$

Ví dụ 3.25. Cho *a, b, c* là các số thực không âm và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ac+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge\sqrt{2}$$

Hướng dẫn giải

$$P=\frac{a^4}{ab^2+abc+ac^2}+\frac{b^4}{bc^2-abc+ba^2}+\frac{c^4}{aa^2-abc+cb^2}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{1}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-6abc}$$

Đặt: $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc\ (p,q,r\ge0)$

Từ: $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow p^2-2q=1\Leftrightarrow q=\dfrac{p^2-1}{2}\Leftrightarrow 4q-p^2=p^2-2$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{1}{pq-6r} \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow pq-6r \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{p(p^2-1)}{2} \le 6r + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Mặt khác: $r \ge \dfrac{(4q-p^2)p}{9} = \dfrac{(p^2-2)p}{9} \Leftrightarrow 6r + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ge \dfrac{2}{3}(p^3-2p) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{2}{3}(p^3-2p) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ge \dfrac{p(p^2-1)}{2}$

$\Leftrightarrow 4(p^3-2p)+3\sqrt{2} \ge 3(p^3-p) \Leftrightarrow p^3-5p+3\sqrt{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow (p-\sqrt{2})(p^2+p\sqrt{2}-3) \ge 0$

TH1: $p<\sqrt{2} \Rightarrow p^2<2 \Rightarrow \dfrac{p(p^2-1)}{2} < \dfrac{p}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le 6r + \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

TH2: $p \ge \sqrt{2} \Rightarrow (p-\sqrt{2})(p^2+p\sqrt{2}-3) \ge 0,\ \forall p \ge \sqrt{2}.$

Để dễ nhớ, chúng tôi tổng hợp lại giúp độc giả dễ dàng tra cứu vận dụng vào làm bài tập.

Nếu ta đặt $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc\ (a,b,c \ge 0)$ thì ta sẽ có các kết quả sau:

1) $p^2 \ge 3q;\quad p^3 \ge 27r;\quad pq \ge 9r;\quad q^2 \ge 3pr;\quad (4q-p^2)p \le 9r.$

2) $a^2+b^2+c^2 = p^2-2q.$

3) $a^3+b^3+c^3 = p^3-3pq+3r.$

4) $(a+b)(b+c)(c+a) = pq-r.$

5) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) = pq-3r.$

6) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = q^2-2pr.$

4. Một số bài tập tự luyện củng cố kiến thức.

Bài 3.1. Cho *a*, *b*, *c* là các số thực đôi một phân biệt.

Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2}{(b-c)^2} + \dfrac{b^2}{(c-a)^2} + \dfrac{c^2}{(a-b)^2} \ge 2.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 THPT chuyên Vĩnh Phúc năm học 2009 – 2010)

Bài 3.2. Cho $a,b>0$ và thỏa mãn $a+b=4ab.$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1} \ge \frac{1}{2}.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 THPT chuyên Hùng Vương năm học 2012 – 2013)

Bài 3.3. Cho $a,b \ge 0$ và $(a-b)^2 = a+b+2.$

Chứng minh rằng : $\left[1+\frac{a^3}{(b+1)^3}\right]\left[1+\frac{b^3}{(a+1)^3}\right] \le 9.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 THPT chuyên ĐH Vinh năm học 2018 – 2019)

Bài 3.4. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $xyz = 1.$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$

(Trích đề thi tuyển sinh cào đại học khối A năm học 2007 – 2008)

Bài 3.5. Cho $a,b,c > 0$ và $abc = 1$.

Chứng minh rằng : $\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ca}{b^2c+b^2a}+\frac{ab}{c^2a+c^2b} \ge \frac{3}{2}.$

Bài 3.6. Cho *a*, *b*, *c* là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng : $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$.

Bài 3.7. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $xy+yz+xz+2xyz = 1$.

Chứng minh rằng $2(x+y+z)+1 \ge 32xyz$.

Bài 3.8. Cho $a,b,c > 0$ và $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \ge 6.$

Bài 3.9. Cho $x, y, z \ge 0$ và $x+y+z = \frac{3}{2}.$ Tìm GTNN của $P = x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2.$

(Trích ĐTTS vào lớp 10 chuyên THPT Hùng Vương năm học 2012 – 2013)

Bài 3.10. Cho $x, y, z \ge 0$ và $x+y+z = 2$. Chứng minh $x+2y+z \ge (2-x)(2-y)(2-z).$

(Trích đề thi HSG lớp 9, tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2015 – 2016)

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH (UCT)

1. Giới thiệu phương pháp hệ số bất định (UCT)

Phương pháp hệ số bất định hay thường vẫn gọi là phương pháp UCT (*viết tắt của Undefined Coeffient Technique)* là một trong những phương pháp được dùng rất nhiều khi chứng minh bất đẳng thức, được coi như bước đệm quan trọng trên con đường đi tìm lời giải tự nhiên, sáng sủa, dễ tư duy.

Để hiểu rõ hơn về phương pháp này, chúng tôi đưa ra các ví dụ minh họa kèm phân tích hướng giải giúp độc giả dễ hình dung.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 4.1. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge 5.$

Phân tích và lời giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt được tại $a=b=c=1.$

Để nhìn rõ cấu trúc biểu thức ta viết lại :

$$P=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{3}a^2\right)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2}{3}b^2\right)+\left(\frac{1}{c^2}+\frac{2}{3}c^2\right)$$

Dựa trên giả thiết ta cần đánh giá : $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{3}x^2\ge mx+n\ (1),\ (0<x<3)$

Với điểm rơi tại $x=1\Rightarrow \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{2}{3}.1^1=m.1+n\Leftrightarrow m+n=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow n=\dfrac{5}{3}-m.$

Khi đó :

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x^2\ge mx+\frac{5}{3}-m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x^2\ge m(x-1)+\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}\ge m(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3+x^2\left(2x^2-5\right)\ge 3mx^2(x-1).$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-5x^2+3\ge 3mx(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(2x^2-3\right)\ge 3mx^2(x-1)\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)\left(2x^2-3\right)-3mx^2\right]\ge 0(2).$$

Ta cần (2) luôn đúng tức là cần xuất hiện $(x-1)^2$ nên ta thay $x=1$ vào biểu thức trong ngoặc vuông được:

$$x=1\Rightarrow (x+1)\left(2x^2-3\right)-3mx^2=(1+1)\left(2.1^2-3\right)-3m.1=0\Leftrightarrow m=\frac{-2}{3}.$$

Vậy ta cần chứng minh: $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{3}x^2\ge -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}.$

Phân tích là như vậy còn ta cần trình bày lời giải gọn như sau:

Ta đi chứng minh: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{3}a^2 \ge -\dfrac{2}{3}a+\dfrac{7}{3}\ (0<a<3)$.

Thật vậy ta có: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{3}a^2 \ge -\dfrac{2}{3}a+\dfrac{7}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2a^2+2a-7}{3} \ge 0$ (đúng với $\forall a>0$).

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{3}b^2 \ge -\dfrac{2}{3}b+\dfrac{7}{3},\ \dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2}{3}c^2 \ge -\dfrac{2}{3}c+\dfrac{7}{3}$.

Vậy $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3} \ge -\dfrac{2}{3}\left(a+b+c\right)+7=5.$

Lời bình: Nhờ phương pháp hệ số bất định mà lời giải được tự nhiên, giải đáp được thắc mắc của độc giả khi đưa ra và chứng minh:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{3}a^2 \ge -\frac{2}{3}a+\frac{7}{3},\ \left(0<a<3\right)$$

Ví dụ 4.2. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$

Chứng minh rằng: $2\left(a+b+c\right)+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 9$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt được tại $a=b=c=1$

Để nhìn rõ cấu trúc biểu thức ta viết lại: $P=\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(2b+\dfrac{1}{b}\right)+\left(2c+\dfrac{1}{c}\right)$

Dựa trên giả thiết ta cần đánh giá: $2x+\dfrac{1}{x} \ge mx^2+n\,(1)$, $\left(0<x<\sqrt{3}\right)$.

Với điểm rơi tại $x=1 \Rightarrow 2.1+\dfrac{1}{1} \ge mx^2+3-m \Leftrightarrow 2x+\dfrac{1}{x} \ge m\left(x^2-1\right)+3$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x}-3 \ge m\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x} \ge m\left(x^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2x-1}{x}-m(x-1)\right] \ge 0\ (2)$$

Ta cần (2) luôn đúng tức là cần xuất hiện $(x-1)^2$ nên ta cần thay $x=1$ vào biểu thức trong ngoặc được:

$$x=1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x}-m(x+1)=2-1-m.2=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow n=\frac{5}{2}$$

Sau đây là phần trình bày lời giải sau khi đã phân tích ở trên:

Ta đi chứng minh: $2a+\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{5}{2}\ \left(0<a<\sqrt{3}\right)$

Thật vậy: $2a+\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 4a^2+2 \ge a\left(a^2+5\right) \Leftrightarrow a^3-4a^2+5a-2 \le 0$

$$\Leftrightarrow a^3-4a^2+5a-2 \le 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a-2) \le 0,\ \forall 0<a<\sqrt{3}$$

Vậy: $2\left(a+b+c\right)+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{15}{2}=9$

Lời bình: Qua 2 ví dụ trên chắc hẳn độc giả đã hình dung ra hiệu quả của phương pháp này.
Nhằm khắc sâu và rèn luyện thêm, chúng tôi tiếp tục giới thiệu thêm các ví dụ mẫu:

Ví dụ 4.3. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

Chứng minh rằng: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 27$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt được tại $a = b = c = 1$

Để nhìn rõ cấu trúc biểu thức ta viết lại:

$$P=\left(\frac{4}{a}+5a^2\right)+\left(\frac{4}{b}+5b^2\right)+\left(\frac{4}{c}+5c^2\right)$$

Dựa trên giả thiết ta cần đánh giá: $\frac{4}{x}+5x^2\geq mx^3+n\,(1)$, $\left(0<x<\sqrt[3]{3}\right)$.

Với điểm rơi tại $x=1\Rightarrow m+n=9\Leftrightarrow n=9-m$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{4}{x}+5x^2\geq mx^3+9-m\Leftrightarrow \frac{4}{x}+5x^2\geq m\left(x^3-1\right)+9$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x}+5x^2-9\geq m\left(x^3-1\right)\Leftrightarrow \frac{5x^3-9x+4}{x}\geq m\left(x^3-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{5x^2+5x-4}{x}-m\left(x^2+x+1\right)\right]\geq 0\ (2)$$

Ta cần (2) luôn đúng tức là cần xuất hiện $(x-1)^2$ nên ta cần thay $x=1$ vào biểu thức trong ngoặc được:

$$x=1\Rightarrow \frac{5x^2+5x-4}{x}-m\left(x^2+x+1\right)=6-3m=0\Leftrightarrow m=2\Rightarrow n=7$$

Ta đi chứng minh $\frac{4}{x}+5x^2\geq 2x^3+7,\ \left(0<x<\sqrt[3]{3}\right)$

Từ đó: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+21=27$

Lời bình: *Tình bày lời giải như sau:*

Ta đi chứng minh: $\frac{4}{x}+5a^2\geq 2a^3+7,\ \left(0<a<\sqrt[3]{3}\right)$ (1)

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow 2a^4-5a^3+7a-4\leq 0\Leftrightarrow (a-1)^2\left(2a^2-a-4\right)\leq 0,\ \left(\forall 0<a<\sqrt[3]{3}\right)$

Vì $0<a<\sqrt[3]{3}\Rightarrow 2a^2-a-4=a(2a-1)-4<0$

$\Rightarrow (a-1)^2\left(2a^2-a-4\right)\leq 0$, $\left(\forall 0<a<\sqrt[3]{3}\right)$

Vậy: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+21=27$

Ví dụ 4.4. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt được tại $a = b = c = 1$

Để nhìn rõ cấu trúc biểu thức ta viết lại: $P = \frac{a}{3-a^2} + \frac{b}{3-b^2} + \frac{c}{3-c^2}$

Dựa trên giả thiết ta cần đánh giá: $\frac{a}{3-a^2} \ge mx^2 + n\,(1)$, $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$.

Với điểm rơi tại $x = 1 \Rightarrow m + n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1}{2} - m$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{x}{3-x^2} \ge mx^2 + \frac{1}{2} - m \Leftrightarrow \frac{x}{3-x^2} \ge m\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3-x^2} - \frac{1}{2} \ge m\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{2\left(3-x^2\right)} \ge m\left(x^2-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x+3}{2\left(3-x^2\right)} - m(x+1)\right] \ge 0\ (2)$

Ta cần (2) luôn đúng tức là cần xuất hiện $(x-1)^2$ nên ta cần thay $x = 1$ vào biểu thức trong ngoặc được:

$x = 1 \Rightarrow \frac{x+3}{2\left(3-x^2\right)} - m(x+1) = 1 - 2\mathrm{m} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 0$

Độc giả tự chứng minh: $\frac{x}{3-x^2} \ge \frac{x^2}{2}$, $\left(0 < x < \sqrt{3}\right)$

Từ đó ta được: $\frac{a}{3-a^2} \ge \frac{a^2}{2} \Rightarrow P \ge \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{3}{2}$

Ví dụ 4.5. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 0$

Tìm GTNN của biểu thức: $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - zx + x^2}$

Hướng dẫn giải

Ta cần tìm $m, n > 0$ để: $x^2 - xy + y^2 = m(x+y)^2 + n(x-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 = (m+n)x^2 + 2(m-n)xy + (m+n)y^2$

Đồng nhất:

$$\begin{cases} m+n=1 \\ m-n=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{4} \\ n=\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \ge \frac{1}{4}(x+y)^2$$

Vậy ta đánh giá được: $\sqrt{x^2 - xy + y^2} \ge \frac{x+y}{2}$.

Tương tự ta có : $\sqrt{y^2 - yz + z^2} \ge \frac{y+z}{2}$, $\sqrt{z^2 - zx + x^2} \ge \frac{z+x}{2}$.

Từ đó : $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - zx + x^2} \ge x + y + z = 3.$

Vậy $MinA = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Tổng quát hơn ta cần đánh giá : $\sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} \ge mx + ny.$

Với điểm rơi đạt được tại : $x = y \Rightarrow m + n = \sqrt{a+b+c}.$

TH1: $mx+ny<0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

TH2: $mx+ny\ge 0\Rightarrow ax^2+bxy+cy^2\ge m^2x^2+2mnxy+n^2y^2.$

$(a-m^2)x^2+(b-2mn)xy+(c-n^2)y^2\ge 0.(*)$

Để (*) luôn đúng với mọi x,y thì trước hết ta cần:

$a-m^2=c-n^2\Leftrightarrow m^2-n^2=a-c.$

Vì điểm rơi tại : $x=y\Rightarrow k(x-y)^2\ge 0,\forall k>0.$

Bằng suy luận trên, chúng tôi mạnh dạn đưa ra thủ thuật nhỏ như bên dưới :

TH1: $a=c\Rightarrow m=n=\dfrac{\sqrt{2a+b}}{2}$ (1).

TH2: $a\ne c\Rightarrow \begin{cases} m+n=\sqrt{a+b+c} \\ m-n=\dfrac{a-c}{\sqrt{a+b+c}}\end{cases}$ (2).

Theo *Ví dụ 4.5* thì: $a=c=1\Rightarrow m=n=\dfrac{\sqrt{2a+b}}{2}=\dfrac{\sqrt{2.1-1}}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Vậy ta cần đi chứng minh: $\sqrt{x^2-xy+y^2}\ge \dfrac{1}{2}(x+y).$

Thật vậy : $\sqrt{x^2-xy+y^2}\ge \dfrac{1}{2}(x+y)\Leftrightarrow 4(x^2-xy+y^2)\ge (x+y)^2\Leftrightarrow 3(x-y)^2\ge 0,\forall x,y.$

Từ đó ta có : $A\ge \dfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{1}{2}(y+x)+\dfrac{1}{2}(x+x)=x+y+z=3.$

Vậy : $MinA=3\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Từ nay với các bài toán liên quan, chúng tôi chỉ đưa ra bất đẳng thức cần đánh giá còn phần chứng minh bằng biến đổi tương đương khá đơn giản xin dành cho độc giả tự rèn luyện.

Ví dụ 4.6. Cho $x,y,z\ge 0$ và thỏa mãn $x+y+z=3.$ Tìm GTNN của biểu thức :

$B=\sqrt{2x^2+3xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+3zx+2x^2}.$

(Trích đề thi HSG 9, tỉnh Ninh Bình năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải

Theo trên ta có :

$a=c=2\Rightarrow m=n=\dfrac{\sqrt{4+3}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\Rightarrow \sqrt{2x^2+3xy+2y^2}\ge \dfrac{\sqrt{7}}{2}(x+y).$

Vậy : $B\ge \dfrac{\sqrt{7}}{2}(2x+2y+2z)=3\sqrt{7}\Rightarrow MinB=3\sqrt{7}\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Ví dụ 4.7. Cho $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3.$

Tìm GTLN của $P=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}.$

(Trích đề thi HSG 9, TP Hà Nội năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải

Ta đánh giá được:

$\sqrt{a^2-ab+b^2}\ge \dfrac{1}{2}(a+b)\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\le \dfrac{2}{a+b}\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right).$

Từ đó : $P \le \frac{1}{2}(\ )\ P \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right) = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 3 \Rightarrow MaxP = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

Ví dụ 4.8. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=3.$ Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}} \le 3.$$

(Trích đề thi HSG 9, tỉnh Hải Dương năm học 2016 – 2017)

Hướng dẫn giải

Theo công thức trên ta đánh giá được : $\sqrt{6a^2+8ab+11b^2} \ge 2a+3b.$

Từ đó : $\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \le \frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}.$

Đến đây chúng ta cần đánh giá : $\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \le ma+nb.$

Với điểm rơi đạt tại : $a=b \Rightarrow \frac{a^2+3a^2+a^2}{2a+3a} = a(m+n) \Rightarrow m+n=1 \Leftrightarrow n = 1-m.$

$\Rightarrow \frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \le m(a-b)+b \Leftrightarrow m(a-b) \ge \frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} - b$

$\Leftrightarrow m(a-b) \ge \frac{(a-b)(a+2b)}{2a+3b}.$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(m-\frac{a+2b}{2a+3b}\right) \ge 0\ \ (1).$

Để (1) luôn đúng ta cần : $a=b \Rightarrow \frac{a+2a}{2a+3a} = \frac{3}{5} \Rightarrow n = \frac{2}{5}.$

Vậy ta đánh giá được :

$\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \le \frac{3a+2b}{5} \Rightarrow P \le \frac{1}{5}(5a+5b+5c) = a+b+c.$

Mặt khác: $a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3 \Rightarrow P \le 3.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1.$

Có những bài toán việc sử dụng phương pháp hệ số bất định khá khó khăn. Để hỗ trợ độc giả có thể giải quyết vấn đề đó, chúng tôi xin giới thiệu thêm một số kỹ thuật.

3. Kỹ thuật chuẩn hóa bất đẳng thức.

Đây là một kỹ thuật còn khá xa lạ với độc giả, bởi khá ít tài liệu đề cập đến. Trước hết ta cần tìm hiểu một số khái niệm cơ bản sau:

3.1. Bất đẳng thức thuần nhất.

Một bất đẳng thức được gọi là bất đẳng thức thuần nhất nếu nhân mỗi biến với một số $t>0$ thì bất đẳng thức đó không đổi.

3.2. Bất đẳng thức đối xứng.

Một bất đẳng thức được gọi là bất đẳng thức đối xứng nếu hoán vị hai biến bất kì thì bất đẳng thức đó không đổi (vai trò của các biến như nhau).

Để hiểu kĩ hơn về kỹ thuật chuẩn hóa thì chúng ta đi phân tích ví dụ dưới đây:

Ví dụ 4.9. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Phân tích và lời giải

Trên đây chính là *bất đẳng thức Nesbitt* quen thuộc và đã có rất nhiều cách chứng minh. Bất đẳng thức này là bất đẳng thức đối xứng thuần nhất theo khái niệm đã nêu ở trên.

Để hiểu rõ bản chất của kỹ thuật chuẩn hóa, trước tiên ta chia tử và mẫu cho $a+b+c>0$.

Ta được: $$VT=\frac{\frac{a}{a+b+c}}{\frac{b+c}{a+b+c}}+\frac{\frac{b}{a+b+c}}{\frac{c+a}{a+b+c}}+\frac{\frac{c}{a+b+c}}{\frac{a+b}{a+b+c}}.$$

Ta đặt: $x=\frac{3a}{a+b+c};\ y=\frac{3b}{a+b+c};\ z=\frac{3c}{a+b+c}\Rightarrow x+y+z=\frac{3(a+b+c)}{a+b+c}=3.$

Lúc này: $$P=\frac{\frac{x}{3}}{\frac{y+z}{3}}+\frac{\frac{y}{3}}{\frac{z+x}{3}}+\frac{\frac{z}{3}}{\frac{x+y}{3}}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}.$$

Như vậy bài toán quy về:

Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$.

Nhìn vào rõ ràng ta thấy có thêm ràng buộc: $x+y+z=3$.

Từ đó chúng ta hoàn toàn có thể chuẩn hóa: $a+b+c=3$.

Sau khi đã chuẩn hóa ta quy về chứng minh: $\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{2}$.

Chúng ta dùng phương pháp hệ số bất định để chứng minh như sau:

Chứng minh

Ta dễ thấy điểm rơi đạt được tại $a=b=c=1$.

Ta cần đánh giá: $\frac{a}{3-a}\ge ma+n,\ (0<a<3)$

Với điểm rơi tại $a=1\Rightarrow m+n=\frac{1}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1}{2}-m$.

Khi đó:

$$\frac{a}{3-a}\ge m(a-1)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{3-a}-\frac{1}{2}\ge m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left[\frac{3}{2(3-a)}-m\right]\ge0.$$

$$\Rightarrow m=\frac{3}{2(3-1)}=\frac{3}{4}\Rightarrow n=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}.$$

Độc giả biến đổi đưa về: $\frac{a}{3-a}\ge\frac{3}{4}a-\frac{1}{4},\ (0<a<3)\Leftrightarrow\frac{3(a-1)^2}{4(3-a)}\ge0,\ \forall 0<a<3$.

Từ đó ta có: $\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{4}(a+b+c)-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.3-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$

Lời bình: Với các bất đẳng thức đối xứng thuần nhất chúng ta dùng kỹ thuật chuẩn hóa để có thêm điều kiện ràng buộc, từ đó quy về phương pháp hệ số bất định giải quyết.

Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra các ví dụ phức tạp hơn cho độc giả tiếp cận.

Ví dụ 4.10. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}.$

(Trích Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Hướng dẫn giải

Vế trái có tính thuần nhất theo 3 biến a, b và c nên ta có thể chuẩn hóa: $a+b+c=3$.

Ta đưa về dạng: $\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}$.

Ta đi tìm m và n sao cho: $\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)}\le ma+n$, (luôn đúng với $0<a<3$).

$\Leftrightarrow \frac{3a-a^2}{2a^2-6a+9}-\frac{2}{5}\le m(a-1)\Leftrightarrow m(a-1)\ge\frac{-9a^2+27a-18}{5(2a^2-6a+9)}=\frac{-9(a-1)(a-2)}{5(2a^2-6a+9)}$

$\Leftrightarrow (a-1)\left(m+\frac{9(a-2)}{5(2a^2-6a+9)}\right)\ge 0$, (luôn đúng với $0<a<3$).

$\Rightarrow m=\frac{9(2-1)}{5(2-6+9)}=\frac{9}{25}$ (do $a=1$) và $n=\frac{2}{5}-\frac{9}{25}=\frac{1}{25}$.

Ta cần chứng minh: $\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}\le\frac{9}{25}a+\frac{1}{25}(0<a<3)$.

Thật vậy:

$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}\le\frac{9}{25}a+\frac{1}{25}\Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1)\ge 0$, (luôn đúng với $0<a<3$).

Vậy: $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$.

Ví dụ 4.11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2}+\frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2}\le 8$$

Hướng dẫn giải

Vế trái có tính thuần nhất biến a, b và c nên ta có thể chuẩn hóa: $a+b+c=3$.

Ta đưa về dạng: $\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le 8.$

$$\Leftrightarrow \frac{(3+a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{(3+b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{(3+c)^2}{c^2-2c+3}\le 24.$$

Ta cần tìm m và n sao cho: $\frac{(3+a)^2}{a^2-2a+3}\le ma+n$, (luôn đúng với $0<a<3$).

Tại điểm rơi: $a=1$ ta có: $m+n=8\Rightarrow n=8-m$.

Ta đi tìm m sao cho: $\frac{(3+a)^2}{a^2-2a+3}\le m(a-1)+8,$ (luôn đúng với $0<a<3$).

$$\Leftrightarrow m(a-1)\ge \frac{(a+3)^2}{a^2-2a+3}-8=\frac{-7a^2+22a-15}{a^2-2a+3}=\frac{-(a-1)(7a-15)}{a^2-2a+3}$$

$\Leftrightarrow (a-1)\left(m+\frac{7a-15}{a^2-2a+3}\right)\ge 0$, (luôn đúng với $0<a<3$).

$\Rightarrow m=\frac{15-7}{1-2+3}=4$ (do $a=1$) và $n=8-4=4$.

Độc giả tự chứng minh: $\frac{(3+a)^2}{a^2-2a+3}\le 4(a+1),\ (0<a<3)$.

Từ đó ta có: $\frac{(3+a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{(3+b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{(3+c)^2}{c^2-2c+3}\le 4(a+b+c)+12=24$.

Vậy: $\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2}+\frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2}\le 8$.

Ví dụ 4.12. Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\ge\frac{5}{8}.$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đã cho đối xứng thuần nhất nên ta chuẩn hóa: $x+y=1$.

Từ đó ta cần chứng minh: $x^4+y^4+\sqrt{xy}\ge\frac{5}{8}$.

Ta đặt:

$$t=\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\Rightarrow x^4+y^4=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2(xy)^2=(1-2t^2)^2-2t^4.$$

Ta đi chứng minh: $(1-2t^2)^2-2t^4+t\ge\frac{5}{8}\Leftrightarrow 16t^4-32t^2+8t+3\ge 0$.

$\Leftrightarrow (4t^2-3)(4t^2-1)+8t(1-2t)\ge 0$, $\forall 0<t\le\frac{1}{2}$.

4. Một số bài tập tự luyện củng cố kiến thức.

Bài 4.1. Cho $x>y>0$. Tìm GTNN của biểu thức $A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}$.

Bài 4.2. Cho $0\le x\le 1$. Chứng minh rằng $x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)\le 16.$

Bài 4.3. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1.$ Tìm GTNN của biểu thức $P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}.$

(Trích ĐTTS vào 10, Hưng Yên năm học 2016 - 2017)

Bài 4.4. Cho $a,b,c\geq 0$ và thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3.$ Tìm GTNN của biểu thức $P=\sqrt{3a^2+2ab+3b^2}+\sqrt{3b^2+2bc+3c^2}+\sqrt{3c^2+2ca+3a^2}.$

(Trích ĐTTS vào 10, Ninh Bình năm học 2017 - 2018)

Bài 4.5. Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3.$

Chứng minh rằng $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geq 3.$

Bài 4.6. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác có chu vi bằng 4.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+8>9\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$

Bài 4.7. Cho x, y, z là các số thực và thỏa mãn $x+y+z=3.$

Tìm GTNN của biểu thức: $P=\sqrt{2+x^4}+\sqrt{2+y^4}+\sqrt{2+z^4}.$

Bài 4.8. (HOMC 2015)

Cho các số thực a, b, c, d và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2\leq 12.$

Tìm GTLN của biểu thức $M=4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right).$

Bài 4.9. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1.$

Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}.$

CHỦ ĐỀ 5: CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1.Phương pháp đồng bậc chứng minh bất đẳng thức.

1.1. ***Giới thiệu:***

Khi chứng minh bất đẳng thức,nếu chú ý đến bậc của các biến trong bất đẳng thức rồi tìm các cân bằng, chúng ta sẽ chứng minh được một cách dễ dàng.

Dưới đây chúng tôi đưa ra các ví dụ minh họa kèm phân tích cụ thể để giúp dộc giả hiểu rõ hơn về phương pháp này.

1.2. ***Các ví dụ minh họa***

Ví dụ 5.1. Cho x, y, z là các soosthwci dương và thỏa mãn x + y + z = 1.

$\geq 16xyz \quad (1).$

Chứng minh rằng: y + z

Phân tích và lời giải:

Ta thấy vế trái của bất đẳng thức (1) là bậc nhất trong khi vế phải là bậc ba, do đó để quy bất đẳng thức (1) về cùng bậc ba thì ta biến đổi như sau:

Ta có: $y+z \geq 16xyz \Leftrightarrow (y+z)(x+y+z)^2 \geq 164xyz.$.

$$(x+y+z)^2 \geq 4x(y+z) \Leftrightarrow (y+z)(x+y+z)^2 \geq 4x(y+z)^2 \geq 16xyz.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM -GM ta có:

$$\begin{cases} x = y+z \\ y = z \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Đẳng thức xảu ra khi :

Ví dụ 5.2. Cho a, b, c là các số thực dương và thõa mãn a + b+ c = 3.

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq 9. \quad (2)$$

Chứng minh rằng:

(Trích đề thi vào 10 chuyên tỉnh vĩnh phúc năm học 2016 - 2017)

Phân tích và lời giải:

Đề quy bất đẳng thức (2) về cùng bậc thì ta biến đổi như sau:

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)-3\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq (a+b+c)^3$$

Ta có:

Ta có:

$$\begin{cases} 4\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) = 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+4\left(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right) \\ (a+b+c)^3 = \left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right)+6abc \end{cases}$$

Vì: $(a+b+c)^3 = (a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3.$

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)-3\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq (a+b+c)^3$$

Từ đó:

$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \geq 6abc.$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\begin{cases} a^2b+bc^2 \geq 2abc \\ b^2c+ca^2 \geq 2abc \\ c^2a+ab^2 \geq 2abc \end{cases} \Rightarrow a^2b+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a+ab^2 \geq 6abc$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.3. Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3.$

Chứng minh rằng: $\dfrac{2a^2}{a+b^2}+\dfrac{2b^2}{b+c^2}+\dfrac{2c^2}{c+a^2}\ge a+b+c$

Phân tích lời giải:

Với ý tưởng đưa tử và mẫu về cùng bậc, ta có hướng phân tích sau:

Ta có: $a+b^2=a.1+b^2\le\dfrac{a^2+1}{2}+b^2=\dfrac{a^2+2b^2+1}{2}\Rightarrow\dfrac{2a^2}{a+b^2}\ge\dfrac{4a^2}{a^2+2b^2+1}=\dfrac{4a^4}{a^4+2a^2b^2+a^2}.$

Tương tự ta có: $\dfrac{2b^2}{b+c^2}\ge\dfrac{4b^4}{b^4+2b^2c^2+b^2},\ \dfrac{2c^2}{b+c^2}\ge\dfrac{4b^4}{b^4+2b^2c^2+b^2},$

Cộng vế ta được: $\dfrac{2a^2}{a+b^2}+\dfrac{2b^2}{b+c^2}+\dfrac{2c^2}{c+a^2}\ge\dfrac{4\left(a^4+b^4+c^4\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^2+b^2+c^2}=3.$

Mặt khác: $(a+b+c)^2\le3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9\Leftrightarrow a+b+c\le3.$

Vậy: $\dfrac{2a^2}{a+b^2}+\dfrac{2b^2}{b+c^2}+\dfrac{2c^2}{c+a^2}\ge a+b+c.$

Ví dụ 5.4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng : $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge3$.

Phân tích và lời giải

Để đưa về cùng bậc ta thực hiện bình phương hai vế được :

Ta có :

$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge9\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Thật vậy, Theo Côsi có:

$$\begin{cases}\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}\ge2b^2\\ \dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}\ge2c^2\\ \dfrac{c^2a^2}{b^2}+\dfrac{a^2b^2}{c^2}\ge2a^2\end{cases}\Rightarrow\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Vậy : $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge3$.

2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.

2.1 Nhắc lại lý thuyết bất đẳng thức Bunyakovsky.

Cho dãy số thực $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ thì ta luôn có:

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$.

Dẳng thức xảy ra khi : $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Quy ước : Nếu $b_1=0$ thì $a_1=0$, tương tự áp dụng với $b_2, b_3,..., b_n$.

Đặc biệt : $(a+b)(c+d)\ge\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2, \forall a,b,c,d>0$.

Vì theo Bunyakovsky có : $\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{d}\right)^2\right]\ge\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi : $ac=bd\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Mở rộng : $(a+b+c)(d+e+f)\ge\left(\sqrt{ad}+\sqrt{be}+\sqrt{cf}\right)^2, \forall a,b,c,d,e,f>0$.

2.2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 5.5. Cho $a, b>0$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab}$.

Chứng minh

Ta có : $(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)\ge(1+a)^2>0\Rightarrow\frac{1}{(1+a)^2}\ge\frac{b}{(1+ab)(a+b)}$.

Tương tự ta có được :

$(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)\ge(1+b)^2\Rightarrow\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{a}{(1+ab)(a+b)}$.

Cộng vế với vế ta được : $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab}$.

Đẳng thức xảy ra khi : $a=b=1$.

Ví dụ 5.6. Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn : $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le1$.

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $a=b=c=1$.

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky có :

$\left[a^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]\left[1^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]\ge(a+b+c)^2$.

$\Leftrightarrow a^2+b+c\ge\frac{(a+b+c)^2}{1+b+c}\Rightarrow\frac{1}{a^2+b+c}\le\frac{1+b+c}{(a+b+c)^2}$.

$$\frac{1}{b^2+c+a}\le\frac{1+c+a}{(a+b+c)^2}, \frac{1}{c^2+a+b}\le\frac{1+a+b}{(a+b+c)^2}.$$

Tương tự ta có :

Vậy : $\dfrac{1}{a^2+b+c}+\dfrac{1}{b^2+c+a}+\dfrac{1}{c^2+a+b}\le\dfrac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2}=1.$

Đẳng thức xảy ra khi : $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.7. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}.$$

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2014-2015).

Hướng dẫn giải

Ta dễ dàng thấy điểm rơi đạt tại : $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Ta có :

$$(9a^3+3b^2+c)\left(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c\right)\ge(a^2+b^2+c^2)=1\Leftrightarrow 9a^3+3b^2+c\ge\frac{1}{\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c}.$$

Từ đó : $\dfrac{a}{9a^3+3b^2+c}\le a\left(\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c\right)=\dfrac{a}{3}+ac+\dfrac{1}{9}$.

Tương tự : $\dfrac{b}{9b^3+3c^2+a}\le\dfrac{b}{3}+ba+\dfrac{1}{9},\ \dfrac{c}{9c^3+3a^2+b}\le\dfrac{c}{3}+cb+\dfrac{1}{9}$.

Khi đó : $P\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)+(ac+bc+ca)+\dfrac{1}{3}\le\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=1$.

Vậy $\text{MaxP}=1\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 5.8. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $abc\ge1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, tỉnh Hưng Yên năm học 2016-2017).

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $a=b=c=1$.

Ta có :

$$(a^5+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+b^2+c^2\right)\ge(a^2+b^2+c^2)^2\Leftrightarrow a^5+b^2+c^2\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{a}+b^2+c^2}.$$

Từ đó : $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}\le\dfrac{\frac{1}{a}+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$.

Tương tự : $\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2}\le\dfrac{\frac{1}{b}+c^2+a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},\ \dfrac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\dfrac{\frac{1}{c}+a^2+b^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

Khi đó : $\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$.

Mặt khác : $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}\le ab+bc+ca\left(\text{do } abc\ge1\right)\\ ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\end{cases}$

Vậy : $\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$.

Ví dụ 5.9. (IMO 2005) Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $abc\ge1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\ge0.$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}\right)+\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{b^5+c^2+a^2}\right)+\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2}{c^5+a^2+b^2}\right)\ge0$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\right)\le3$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$.

Theo ví dụ 5.8 ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.10. Cho a,b,c là các số dương và thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le1.$$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Hải Dương năm học 2010 – 2011).

Hướng dẫn giải :

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: $a=b=c=1$.

Ta có : $\left(a^3+b^3+1\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)\ge(a+b+c)^2\Leftrightarrow a^3+b^3+1\ge\frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2}$.

Từ đó ta có được : $\frac{1}{a^3+b^3+1}\le\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2}{(a+b+c)^2}$.

Tương tự $\frac{1}{b^3+c^3+1}\le\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a^2}{(a+b+c)^2}$; $\frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+b^2}{(a+b+c)^2}$.

Khi đó : $\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}$.

Mặt khác : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca$ (do $abc=1$).

Vậy $\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1$.

Đẳng thức xảy ra khi : $a=b=c=1$.

Lời bình :

Ngoài cách giải trên , độc giả có thể tham khảo cách giải khác như sau :

$$a^3+b^3\ge ab(a+b)\Leftrightarrow a^3+b^3+1\ge ab(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{1}{a^3+b^3+1}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có : $\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{c+a+b}{a+b+c}=1$.

Ví dụ 5.11. Cho a,b,c là các số dương và thỏa mãn $a+b+c=2016$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2016b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}$$

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, tỉnh Hà Tĩnh năm học 2016 – 2017)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sqrt{2016a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{(a+b)(c+a)}\ge\sqrt{ac}+\sqrt{ab}$

Từ đó ta có được : $\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}\le\frac{a}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Tương tự : $\frac{b}{b+\sqrt{2016b+bc}}\le\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}\le\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Khi đó : $P\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$

Mặt khác : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca$ (do $abc=1$) $\Rightarrow\ \max P=1\Leftrightarrow a=b=c=672$

3. Phương pháp miền giá trị

Ví dụ 5.12. Cho $x>y>0$ và $xy=4$. Tìm GTNN của biểu thức : $P=\frac{x^2+y^2}{x-y+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $P=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y+1}=\frac{(x-y)^2+8}{x-y+1}$.

Ta đặt : $t = x - y > 0 \Rightarrow P = \dfrac{t^2 + 8}{t + 1} \Leftrightarrow t^2 - Pt + 8 - P = 0$

Điều kiện có nghiệm t : $\Delta_t = P^2 - 4(8 - P) \ge 0 \Leftrightarrow P^2 + 4P - 32 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \ge 4 \\ P \le -8 \end{array}\right.$

Vậy : $\min P = 4 \Leftrightarrow t = \dfrac{P}{2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\sqrt{5} + 1; \sqrt{5} - 1\right)$

Lời bình : Ngoài cách giải trên , độc giả có thể tham khảo cách giải khác như sau :

Đặt : $t = x - y > 0 \Rightarrow P = \dfrac{t^2 + 8}{t + 1} \Leftrightarrow t - 1 + \dfrac{9}{t + 1} = \left(t + 1 + \dfrac{9}{t + 1}\right) - 2 \ge 2.3 - 2 = 4$

Hoặc dùng kĩ thuật biến đổi tương đương

Ta đi chứng minh : $P = \dfrac{(x - y)^2 + 8}{x - y + 1} \ge 4 \Leftrightarrow \dfrac{(x - y)^2 - 4(x - y) + 4}{x - y + 1} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x - y - 2)^2}{x - y + 1} \ge 0 \left(\forall x > y > 0\right)$

Vậy : $\min P = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\sqrt{5} + 1; \sqrt{5} - 1\right)$

Ví dụ 5.13. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức : $P = \dfrac{1}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{xy}$.

(Trích đề thi HSG lớp 9, tỉnh Thanh Hóa năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải

Ta có nhận xét : $x, y > 0 \Rightarrow P > 0.$

Ta có : $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy \Rightarrow P = \dfrac{1}{1 - 3xy} + \dfrac{1}{xy}$

Đơn giản ta đặt : $t = xy \le \dfrac{(x + y)^4}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow P = \dfrac{1}{1 - 3t} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{1 - 2t}{t - 3t^2} \Leftrightarrow 3Pt^2 - (P + 2)t + 1 = 0$

Để có nghiệm t : $\Leftrightarrow \Delta = (P + 2)^2 - 12P \ge 0 \Leftrightarrow (P + 2)^2 \ge 12P \Leftrightarrow P \ge 4 + 2\sqrt{3} \quad (P > 0)$

$\text{MinP} = 4 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow t = \dfrac{P + 2}{6P} = \dfrac{2\left(3 + \sqrt{3}\right)}{12\left(2 + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6} \end{cases} \Rightarrow x, y$

(Việc tìm khá đơn giản xin dành cho độc giả tự làm)

4. Phương pháp dồn biến

Ví dụ 5.14. Cho $a , b > 0$ và thỏa mãn $a + b \le 1$. Chứng minh rằng : $a^2 - \dfrac{3}{4a} - \dfrac{a}{b} \le -\dfrac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: $a = b = \dfrac{1}{2}.$

Ta có: $1 \geq a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 4a \leq \frac{1}{b} \Leftrightarrow 4a^2 \leq \frac{a}{b} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} \leq -4a^2$

Từ đó: $M = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \leq a^2 - \frac{3}{4a} - 4a^2 = -3\left(a^2 + \frac{1}{4a}\right) \leq -\frac{9}{4}$

Vì với điểm rơi trên thì ta tách:

$$a^2 + \frac{1}{4a} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{4a}\right) - \frac{1}{4} \geq 0 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = c = \frac{1}{3}.$

Ví dụ 5.15. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

(Trích đề thi Đại học khối B năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải

Ta thấy điểm rơi đạt tại: $a = b = c = 2.$

Từ đó ta có:

$$a^2+b^2+c^2+4 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+2)^2}{2} \geq \frac{(a+b+c+2)^2}{4}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2+4} \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+2)^2}{2} \geq \frac{a+b+c+2}{2}.$$

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq \frac{1}{6}(3a+3b)(a+b+4c) \leq \frac{1}{24}(4a+4b+4c)^2$$

$$\Rightarrow (a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

Vậy:

$$P \leq \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Ta đặt: $t = a+b+c\,(t>0) \Rightarrow P \leq \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2}.$

Với điểm rơi tại: $a = b = c = 2$ thì $t = 6 \Rightarrow P_{max} = \frac{5}{8}.$

Ta có:

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{\frac{2t}{3} + \left(\frac{t}{3}+2\right)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{2t}{3}} + \frac{1}{\frac{t}{3}+2}\right) \leq \frac{3}{8t} + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{t} + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16t} + \frac{1}{32}.$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} = \frac{9}{2t} + \frac{1}{4} - \frac{27}{2t^2} = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{8}.$$

Vậy: $\text{Max}P = \frac{5}{8} \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow a = b = c = 2.$

Ví dụ 5.16. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x^4+y^4+\frac{1}{xy}=xy+2.$ Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}-\frac{3}{1+2xy}.$$

Hướng dẫn giải

Ta thấy điểm rơi đạt tại: $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Ta có: $xy+2=x^4+y^4+\frac{1}{xy}\geq\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}+\frac{1}{xy}\geq 2(xy)^2+\frac{1}{xy}.$

Đặt: $t=xy(t>0)\Rightarrow t+2\geq 2t^2+\frac{1}{t}\Leftrightarrow 2t^3-t^2-2t+1\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq t\leq 1.$

Ta dùng bổ đề: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{2}{1+xy}(0<xy\leq 1)\Rightarrow P\leq\frac{4}{1+xy}-\frac{3}{1+2xy}=\frac{4}{1+t}-\frac{3}{1+2t}.$

Ta có: $\frac{4}{1+t}-\frac{3}{1+2t}=\frac{5t+1}{2t^2+3t+1}\left(\frac{1}{2}\leq t\leq 1\right).$

Xét hiệu: $\frac{7}{6}-\frac{5t+1}{2t^2+3t+1}=\frac{14t^2-9t+1}{6\left(2t^2+3t+1\right)}=\frac{14\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(t-\frac{1}{2}\right)}{6\left(2t^2+3t+1\right)}\geq 0,\forall t\geq\frac{1}{2}.$

Vậy: $P\leq\frac{5t+1}{2t^2+3t+1}\leq\frac{7}{6}\Rightarrow \text{Max}P=\frac{7}{6}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Ví dụ 5.17. Cho $a, b, c>0$ và thỏa mãn $a+b+c=1.$ Tìm GTNN của biểu thức

$$Q=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

(Trích ĐTTS vào 10 chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương năm học 2016 – 2017).

Hướng dẫn giải

Với điểm rơi đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}.$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]=\frac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$$

Ta đã biết: $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(ab^2+bc^2+ca^2\right).$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM:

$a^3+ab^2\geq 2a^2b\Rightarrow\left(a^3+ab^2\right)+\left(b^3+bc^2\right)+\left(c^3+ca^2\right)\geq 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(ab^2+b^2c+c^2a)\Leftrightarrow ab^2+b^2c+c^2a\le\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

$$\Rightarrow Q\ge 14(a^2+b^2+c^2)+\frac{3-3(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}=14(a^2+b^2+c^2)+\frac{3}{2(a^2+b^2+c^2)}-\frac{3}{2}.$$

Ta đặt:

$$t=a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow Q\ge 14t+\frac{3}{2t}-\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{2t}+\frac{27t}{2}\right)+\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ge\frac{23}{3}.$$

Vậy $\operatorname{Min}Q=\dfrac{23}{3}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Lời bình: Ta cần chú ý kết quả: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$.

5. Phương pháp phản chứng.

Ví dụ 5.18. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x^3+y^3=x-y$. Chứng minh rằng $x^2+y^2<1$.

Hướng dẫn giải

Ta giả sử rằng: $x^2+y^2\ge 1$.

Từ giả thiết: $x-y=x^3+y^3\Rightarrow x>y>0$.

Khi đó: $(x-y)(x^2+y^2)\ge x^3+y^3\Leftrightarrow x^3+xy^2-x^2y-y^3\ge x^3+y^3$

$$\Leftrightarrow xy^2-x^2y-2y^3\ge 0\Leftrightarrow y\left[x(y-x)-2y^2\right]<0,\forall x>y>0.$$

Vậy bất đẳng thức $(*)$ không thể xảy ra, nên điều kiện giả sử là sai $\Rightarrow$ (đpcm).

Ví dụ 5.19. Cho a, b là các số thực dương và thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\le 2$.

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $x=\sqrt[3]{a},\quad y=\sqrt[3]{b}\ (x,y>0)\Rightarrow x^3+y^3=2$.

Ta cần đi chứng minh: $x+y\le 2$.

Ta giả sử: $x+y>2\Leftrightarrow (x+y)^3>8\Leftrightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)>8\Leftrightarrow xy(x+y)>2$.

$\Leftrightarrow xy(x+y)>x^3+y^3\ \Leftrightarrow xy>x^2-xy+y^2\Leftrightarrow (x-y)^2<0$ (vô lý).

Vậy điều giả sử là sai nên hoàn tất việc chứng minh.

6. Phương pháp làm trội.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$.

Lời giải

Ta có: $0<a<a+b\ \Rightarrow\dfrac{a}{a+b}<1\Rightarrow\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c}$.

Tương tự ta có được: $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{a+c}<\frac{c+b}{a+b+c}$.

Cộng vế với vế ta được: $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

7. Một số bài tập tự luyện, củng cố kiến thức.

Bài 5.1. Cho a, b, $c>0$ và $2ab+6bc+2ca=7abc$.

Tìm GTNN của biểu thức $Q=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ca}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}$.

(Trích đề thi HSG lớp 9, tỉnh Hải Dương năm học 2013-2014)

Bài 5.2. Cho a, b, $c>0$ và thỏa mãn $7\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=6\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2015.$

Tìm GTLN của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{3(2a^2+b^2)}}+\frac{1}{\sqrt{3(2b^2+c^2)}}+\frac{1}{\sqrt{3(2c^2+a^2)}}$

(Trích đề thi vào 10, Phú Thọ năm học 2015-2016)

Bài 5.3. Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a+b+c\le 3$.

Chứng minh rằng: $M=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670.$

(Trích đề thi vào 10 THPT NK Trần Phú, Hải Phòng năm học 2009-2010)

Bài 5.4. Cho x, $y>0$ và thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm GTNN của $P=\left(x^2+\frac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{4x^2}\right)$.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSPHCM năm học 2015-2016)

Bài 5.5. Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a+b+c=2$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{2}{3}$.

Bài 5.6. Cho a, b, c là các số thực dương.

Tìm GTLN của biểu thức $T=\frac{a+b+c}{(4a^2+2b^2+1)(4c^2+3)}$.

CHỦ ĐỀ 6: CÁC BÀI BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

Ví dụ 6.1. Cho hai số thực x, y khác 0 và thỏa mãn $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Tìm GTLN của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}.$$

(Trích đề thi đại học khối A năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Ta có $(x+y)xy=x^2+y^2-xy\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x}.\frac{1}{y}$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y} \Rightarrow a + b = a^2 - ab + b^2$

Khi đó: $A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^2$.

$a + b = a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow (a+b) = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}$.

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq (a+b) \leq 4 \Rightarrow A = (a+b)^2 \leq 16$

Vậy $MaxA = 16 \Leftrightarrow a = b = 2 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6.2. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{1 + x^2y^2}.$$

(Trích đề thi vào 10 chuyên KHTN vòng II năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải

Ta có: $1 \geq x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}$.

Từ đó: $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{1 + x^2y^2} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}.\sqrt{1 + x^2y^2} = 2\sqrt{\frac{1 + x^2y^2}{xy}} = 2\sqrt{\frac{1}{xy} + xy}$

Đặt: $t = xy\left(0 < t \leq \frac{1}{4}\right) \Rightarrow P \geq 2\sqrt{t + \frac{1}{t}} = 2\sqrt{\left(t + \frac{1}{16t}\right) + \frac{15}{16t}} \geq 2.\frac{\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}.$

Vì: $\left(t + \frac{1}{16t}\right) + \frac{15}{16t} \geq 2\sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(t + \frac{1}{16t}\right) + \frac{15}{16t}} \geq \frac{\sqrt{17}}{2}$

Đẳng thức xãy ra khi: $t = \frac{1}{4} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy: $MinP = \sqrt{17} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6.3. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{y} + 1\right) \geq 4$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$

(Trích đề thi vào 10 chuyên KHTN vòng 1 năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại $x = y = 1$

Khi đó: $\begin{cases} x + 1 \geq 2\sqrt{x} \\ y + 1 \geq 2\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 2\left(\sqrt{x} + 1\right) > 0 \\ y + 3 \geq 2\left(\sqrt{y} + 1\right) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x+3) + (y+3) \geq 2\left[\left(\sqrt{x} + 1\right) + \left(\sqrt{y} + 1\right)\right] \geq 4\sqrt{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{y} + 1\right)} \geq 8 \Leftrightarrow x + y \geq 2$

Từ đó: $P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq \frac{(x+y)^2}{x+y} = x + y \geq 2$. Vậy: $MinP = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Ví dụ 6.4. cho a,b là các số thực dương và thỏa mãn $(1+a)(1+b)=\frac{9}{4}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$$

(Trích đề thi vào 10 chuyên KHTN vòng 1 năm 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng: $\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{4+\left(a^2+b^2\right)^2},\ \forall a,b$

Thật vậy, bình phương hai vế ta được:

$$a^4+b^4+2+2\sqrt{\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)}\ge a^4+b^4+2a^2b^2+4$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)}\ge a^2b^2+1\Leftrightarrow\ a^4b^4+a^4+b^4+1\ge a^4b^4+2a^2b^2+1$$

$$\Leftrightarrow\ \left(a^2-b^2\right)^2\ge 0,\ \forall a,b$$

Mà $\frac{9}{4}=(1+a)(1+b)=ab+a+b+1\le\frac{a^2+b^2}{2}+a^2+\frac{1}{4}+b^2+\frac{1}{4}+1\Leftrightarrow\ a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$

Từ đó $\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{4+\left(a^2+b^2\right)^2}\ge\sqrt{4+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$. Vậy: $MinP=\frac{\sqrt{17}}{2}\Leftrightarrow\ a=b=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 6.5. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1$.

(Trích đề thi vào 10 chuyên KHTN vòng II năm học 2010-2011)

Hướng dẫn giải

Ta có: $(z+x)(z+y)\ge(z+\sqrt{xy})^2\ \Leftrightarrow\ z(x+y+z)+xy\ge(z+\sqrt{xy})^2$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{x+xy}\ge z+\sqrt{xy}.$$

Mặt khác: $\sqrt{2x^2+2y^2}=\sqrt{2(x^2+y^2)}\ge x+y\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge\frac{z+\sqrt{xy}+x+y}{1+\sqrt{xy}}=\frac{(x+y+z)+\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}=1$

Ví dụ 6.6. Cho x,y là hai số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức $P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}$

(Trích đề thi vào 10 chuyên KHTN vòng I năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8y^3}{x^3}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2y}{x}\right)^3}}\ge\frac{x^2}{x^2+2y^2}(1).$

Vì: $\sqrt{1+\left(\frac{2y}{x}\right)^3}=\sqrt{\left(1+\frac{2y}{x}\right)\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{4y^2}{x^2}\right)}\le\frac{2+\frac{4y^2}{x^2}}{2}=1+\frac{2y^2}{x^2}=\frac{x^2+2y^2}{x^2}$.

Tương tự $\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}=\sqrt{\frac{4}{1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3}}=\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3}}$

Mà: $\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3}=\sqrt{\left(2+\frac{y}{x}\right)\left[-\frac{x}{y}+\left(\frac{x}{y}+1\right)^2\right]}\le\frac{2+\left(\frac{x}{y}+1\right)^2}{2}$.

$\Rightarrow\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3}\le 1+\frac{(x+y)^2}{2y^2}\le 1+\frac{2(x^2+y^2)}{2y^2}$.

$\Leftrightarrow\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3}\le 2+\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2+2y^2}{y^2}\Rightarrow\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}\ge\frac{2y^2}{x^2+2y^2}$ (2).

Từ (1) và (2) có $P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}\ge 1$.

Ví dụ 6.7. Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 2. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$$

(Trích đề thi vào 10 chuyên KHTN vòng I năm 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $2\sqrt{y+z-4}=\sqrt{4(y+z-4)}\le\frac{y+z}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}\ge\frac{4x}{y+z}$.

Tương tự ta có: $\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}\ge\frac{4y}{z+x}$, $\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}\ge\frac{4z}{x+y}$

Cộng vế được:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge 4.\frac{3}{2}=6$$

Vì ta đã biết: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$ (Nesbitt). Đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z=4$.

Ví dụ 6.8 Cho số thực x thỏa mãn $1\le x\le 2$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $T=\frac{3+x}{x}+\frac{6-x}{3-x}$.

(Trích đề thi HSG Toán 9, Tỉnh Bắc Giang năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải

Ta có: $1\le x\le 2\Rightarrow(x-1)(x-2)\le 0\Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 3x-x^2\ge 2.$

Mà: $T=\frac{3+x}{x}+\frac{6-x}{3-x}=\frac{9-x^2+6x-x^2}{x(3-x)}=\frac{-2x^2+6x+9}{-x^2+3x}=2+\frac{9}{3x-x^2}\le\frac{13}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Ta có: $\begin{cases}3x-x^2\ge 2\\-x^2+3x=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow T=2+\frac{9}{3x-x^2}\ge 2+4=6$.

Đẳng thức xảy ra khi: $x=\frac{3}{2}$. Vậy: $MinT=6$ khi $x=\frac{3}{2}$, $MaxT=\frac{13}{2}$ khi $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Lời bình: Độc giả có thể tách:

$$T=\frac{3+x}{x}+\frac{6-x}{3-x}=3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3-x}\right)+2\ge 3.\frac{4}{x+3-x}+2=6$$.

Ví dụ 6.9. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz.$$

(Trích đề thi HSG Toán 9, tỉnh Bắc Giang năm học 2015 – 2016)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết có: $x+y+z=xyz \Leftrightarrow \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1.$

Ta đặt: $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ $(a,b,c>0)\Rightarrow ab+bc+ca=1.$

Ta cần chứng minh: $a+b+c+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\frac{1}{abc}.$

Ta có: $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{a^2+ab+bc+ca}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{1}{2}(2a+b+c).$

Tương tự có: $\sqrt{b^2+1}\le\frac{1}{2}(a+2b+c)$, $\sqrt{c^2+1}\le\frac{1}{2}(a+b+2c).$

Vậy: $a+b+c+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le 3(a+b+c)\le\frac{1}{abc}.$

Vì: $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\Leftrightarrow 3(a+b+c)\le\frac{1}{abc}.$

Ví dụ 6.10. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$

(Trích Tạp chí Toán học và tuổi trẻ)

Cách 1: Dùng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương.

Ta có: $\frac{a^3}{bc}+b+c\ge 3a$, $\frac{b^3}{ca}+c+a\ge 3b$, $\frac{c^3}{ab}+a+b\ge 3c.$

Cộng vế được: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c.$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c.$

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương.

Ta có: $\frac{a^3}{bc}+\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 4a.$

Tương tự ta có: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 4b$, $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+\frac{c^3}{ab}\ge 4c$

Cộng vế được: $4\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right)\ge 4(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$.

Cách 3:

Ta có: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{a^4}{abc}+\frac{b^4}{abc}+\frac{c^4}{abc}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3abc}$.

Ta cần chứng minh:

$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3abc}\ge a+b+c\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3abc(a+b+c)$.

Thật vậy: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$.

Cách 4: Dùng biến đổi tương đương.

Ta có: $\frac{a^4}{abc}+\frac{b^4}{abc}+\frac{c^4}{abc}\ge a+b+c\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$.

$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2+(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge 0$.

Ví dụ 6.11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 6$.

Hướng dẫn giải

Ta dễ dàng chứng minh được: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Thật vậy: $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$.

Tương tự: $\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$, $\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\ge\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Cộng vế ta được: $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 3\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Từ đó: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 2\sqrt{9}=6$.

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Ví dụ 6.12. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\ge\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{1+\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{1+\frac{a}{c}}\right)^2\ge\frac{3}{4}$

Đặt: $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$ $(x,y,z>0)\Rightarrow xyz=1$.

Ta cần chứng minh: $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\dfrac{1}{(1+z)^2}\geq\dfrac{3}{4}$.

Theo *bổ đề 1.14* ta có: $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\geq\dfrac{1}{1+xy}=\dfrac{z}{1+z}$ (do $xyz=1$).

Từ đó ta đi chứng minh: $\dfrac{z}{1+z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}\geq\dfrac{3}{4}$.

Thật vậy: $\dfrac{z}{1+z}+\dfrac{1}{(1+z)^2}\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 4z(1+z)+4\geq 3(1+z)^2\Leftrightarrow (z-1)^2\geq 0$, $\forall z$.

Ví dụ 6.13. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức $P=\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^4+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^4+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^4$.

(Trích đề thi HSG 9, tỉnh Nghệ An năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn giải

$$P=\left(\frac{a}{a+b}\right)^4+\left(\frac{b}{b+c}\right)^4+\left(\frac{c}{c+a}\right)^4\geq\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\right]^2\geq\frac{3}{16}.$$

Ta đã biết: $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^2\geq\dfrac{3}{4}$.

Vậy: $MinP=\dfrac{3}{16}\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 6.14. Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{21}{1+36abc}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{21}{1+36abc}\Leftrightarrow (1+36abc)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 21$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+36(ab+bc+ca)\geq 21$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+36(ab+bc+ca)\geq 21.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+36(ab+bc+ca)\geq 18.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+2\right)+36(ab+bc+ca)\geq 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}+36(ab+bc+ca)\geq 24.$$

Theo Côsi có: $\dfrac{(a+b)^2}{ab}+36ab\geq 2\sqrt{36(a+b)^2}=12(a+b)$.

Tương tự ta có được: $\dfrac{(b+c)^2}{bc}+36bc\geq 12(b+c)$, $\dfrac{(c+a)^2}{ca}+36ca\geq 12(c+a)$.

Cộng vế được: $\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}+36(ab+bc+ca)\ge 24(a+b+c)=24$.

Ví dụ 6.15. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}}+\frac{1}{b\sqrt{3b+2c}}+\frac{1}{c\sqrt{3c+2a}}\ge\frac{3}{\sqrt{5abc}}.$$

(*Trích đề thi vào 10 chuyên, tỉnh Thái Bình năm học 2017 – 2018*)

Hướng dẫn giải

Ta đưa về dạng: $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{5a(3a+2b)}}+\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{5b(3b+2c)}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{5c(3c+2a)}}\ge\frac{3}{5}$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{5a(3a+2b)}{bc}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{5b(3b+2c)}{ca}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{5c(3c+2a)}{ab}}}\ge\frac{3}{5}\quad (1).$$

Ta để ý rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{5a(3a+2b)}{bc}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5a^2}{c}.\frac{(3a+2b)}{ab}}}=\frac{1}{a\sqrt{\frac{5}{c}\left(\frac{3}{b}+\frac{2}{a}\right)}}=\frac{1}{a}.\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{c}\left(\frac{3}{b}+\frac{2}{a}\right)}}.$$

Từ đó để đơn giản ta đặt: $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ $(x,y,z>0)$.

Ta được: $\frac{x}{\sqrt{5z(3y+2x)}}+\frac{y}{\sqrt{5x(3z+2y)}}+\frac{z}{\sqrt{5y(3x+z)}}\ge\frac{3}{5}\ (2)$.

Mặt khác: $\sqrt{5z(3y+2x)}\le\frac{2x+3y+5z}{2}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{5x(3y+2x)}}\ge\frac{2x}{2x+3y+5z}$.

Tương tự ta được:

$$VT(2)\ge 2.\left(\frac{x}{2x+3y+5z}+\frac{y}{2y+3z+5x}+\frac{z}{2z+3x+5y}\right)=2Q$$

Ta có:

$$Q=\frac{x}{2x+3y+5z}+\frac{y}{2y+3z+5x}+\frac{z}{2z+3x+5y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)}\triangleright$$

$$\Leftrightarrow Q\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)^2+4(xy+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\frac{10}{3}(x+y+z)^2}=\frac{3}{10}$$

Vì: $xy+yx+zx\le\frac{1}{3}(x+y+z)^2\Rightarrow 4(xy+yz+zx)\le\frac{4}{3}(x+y+z)^2$.

Ví dụ 6.16. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x\ge 2$ và $x+y\ge 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}.$$

Hướng dẫn giải:

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại : $x=2, y=1$.

Khi đó:

$$P=(x-2)^2+(y-1)^2+4x+2y+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}-5$$

$$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y-1)^2+2\left(x+y-6+\frac{9}{x+y}\right)+2\left(x-4+\frac{4}{x}\right)-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)+15$$

$$\Leftrightarrow P=(x-2)^2+(y-1)^2+\frac{2(x+y-3)^2}{x+y}+\frac{2(x-2)^2}{x}-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)+15.$$

$$\Leftrightarrow P\ge-\left(\frac{7}{x}+\frac{17}{x+y}\right)\ge-\left(\frac{7}{2}+\frac{17}{3}\right)+15=\frac{35}{6}.$$ Vậy $MinP=\frac{35}{6}\Leftrightarrow x=2,y=1.$

Ví dụ 6.17. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{4b}{c+a}+4\right)+\left(\frac{9c}{a+b}+9\right)>18$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1^2}{b+c}+\frac{2^2}{c+a}+\frac{3^2}{a+b}\right)>18.$$

Thật vậy: $(a+b+c)\left(\frac{1^2}{b+c}+\frac{2^2}{c+a}+\frac{3^2}{a+b}\right)\ge(a+b+c)\frac{36}{2(a+b+c)}=18.$

Đẳng thức xảy ra khi:

$\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}=\frac{3}{a+b}\Leftrightarrow\frac{3}{a+b}=\frac{1+2}{a+b+2c}\Leftrightarrow c=0$ (vô lí).

Lời bình: Độc giả có thể đổi biến dưới mẫu.

Ví dụ 6.18. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2=\frac{1}{3}.\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$

Vì theo Cô-si có: $\frac{1}{3}.\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{1}{3}.3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=1$. Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c.$

Ví dụ 6.19. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right)+\left(\frac{b^2}{c}-2b+c\right)+\left(\frac{c^2}{a}-2c+a\right)\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-(a+b+c).$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a+b+c}.$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b+c}\right)+(b-c)^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)+(c-a)^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c}\right)\ge0.$$

Vì: $a+b+c>b>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a+b+c}<\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a+b+c}<\dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{a+b+c}<\dfrac{1}{a}.$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c.$

Ví dụ 6.20. Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^3}+\dfrac{b^2}{c^3}+\dfrac{c^2}{a^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{a^2}{b^3}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{3}{b},\ \dfrac{b^2}{c^3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{3}{c}\ge\dfrac{3}{c^2},\ \dfrac{c^2}{a^3}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{3}{a}$.

Cộng vế ta được: $\dfrac{a^2}{b^3}+\dfrac{b^2}{c^3}+\dfrac{c^2}{a^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Ví dụ 6.21. Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$.

(*Trích đề thi HSG Toán 9, TP. HCM năm học 2010 - 2011)*

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2,\ \dfrac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2,\ \dfrac{c^3}{a}+ca\ge 2c^2$.

Từ đó $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca$.

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Lời bình: Ta đã sử dụng bổ đề: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

Ví dụ 6.22. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thoả mãn $a^2b+b^2c+c^2a=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+bc+ca}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)\ge\frac{a+b+c}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: $a=b=c=1\Rightarrow\dfrac{ab+bc+ca}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\right)$.

Khi đó: VT $=\dfrac{ab+bc+ca}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6abc}\ge\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3abc}}$.

Ta đi chứng minh: $\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3abc}}\ge\dfrac{a+b+c}{3}\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge(a+b+c)^2$.

Thật vậy: $3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)\ge(a+b+c)^2$ (***Bunyakovsky***).

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c=1$.

Ví dụ 6.23. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn $x(x+y+z)=3yz$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3.$$

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2009 -2010)

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $a=x+y,\ b=x+z,\ c=y+z\ (a,b,c>0)\Rightarrow\ x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Ta có: $x=\dfrac{a+b-c}{2}, y=\dfrac{a+c-b}{2}, z=\dfrac{b+c-a}{2}$.

Từ giả thiết ta có: $\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)=3\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (a+b)^2-c^2=3\left[c^2-(a-b)^2\right]=(a+b)^2+3(a-b)^2=4c^2\Leftrightarrow\ a^2-ab+b^2=c^2.$

$a^3+b^3+3abc\le 5c^3\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc\le 5c^3\Leftrightarrow (a+b)c+3ab\le 5c^2.$

Ta có:

$a^2-ab+b^2=c^2\Leftrightarrow\ c^2=(a+b)^2-3ab\ge(a+b)^2-\dfrac{3}{4}(a+b)^2=\dfrac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow a+b\le 2c.$

$\Rightarrow (a+b)c+3ab\le 2c^2+3ab.$

Ta cần chứng minh:

$5c^2\ge 2c^2+3ab\Leftrightarrow\ c^2\ge ab\Leftrightarrow\ a^2-ab+b^2\ge ab\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0,\ \forall a,b.$

Ví dụ 6.24. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{2a}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2b}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2c}{c+a}}\le 3.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{\dfrac{2a}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2b}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2c}{c+a}}\le 3\Leftrightarrow\ \sqrt{\dfrac{2}{1+\dfrac{b}{a}}}+\sqrt{\dfrac{2}{1+\dfrac{c}{b}}}+\sqrt{\dfrac{2}{1+\dfrac{a}{c}}}\le 3$

Đặt: $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}, y=\sqrt{\dfrac{c}{b}}, z=\sqrt{\dfrac{a}{c}}\,(x,y,z>0)\Rightarrow\ xyz=1.$

Ta đi chứng minh: $\sqrt{\dfrac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{1+z^2}}\le 3$

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $z=max\{x,y,z\}\ \Rightarrow\ \begin{cases}z\ge x\\ z\ge y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\ge 1\\ xy=\dfrac{1}{z}\le 1\end{cases}$

Ta có: $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\le\dfrac{2}{1+xy}=\dfrac{2z}{1+z}(0<xy\le 1).$

Từ đó: $\sqrt{\dfrac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{1+y^2}}\le\sqrt{2\left(\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{2}{1+y^2}\right)}=2\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}}\le 2\sqrt{\dfrac{2z}{1+z}}.$

Mặt khác: $1^2+z^2\ge\dfrac{(1+z)^2}{2}\Rightarrow\ \dfrac{2}{1+z^2}\le\dfrac{4}{(1+z)^2}\Rightarrow\ \sqrt{\dfrac{2}{1+z^2}}\le\dfrac{2}{1+z}$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh: $2\sqrt{\dfrac{2z}{1+z}}+\dfrac{2}{1+z}\le 3$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2z(1+z)}+2 \le 3(1+z) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+z}-\sqrt{2z}\right)^2 \ge 0, \forall z>0.$

Đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z=1$ hay $a=b=c.$

CHỦ ĐỀ 7: ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ứng dụng vào dạng toán rút gọn biểu thức.

Bài 7.1. Cho biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ (với $x\ge 0, x\ne 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm GTNN của biểu thức P.

Hướng dẫn giải

a) Rút gọn biểu thức P.

$$P=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$P=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}-\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P=\frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2x-6\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P=\frac{x\sqrt{x}-x+16\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$$

b) Tìm GTNN của biểu thức P thì ta có thể làm theo hai cách sau:

Cách 1: Thêm, bớt ứng dụng bất đẳng thức.

$$P=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}=\frac{x-9+25}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\frac{25}{\sqrt{x}+3}-6$$

$$\Rightarrow P\ge 2\sqrt{(\sqrt{x}+3)\left(\frac{25}{\sqrt{x}+3}\right)}-6=2.5-6=4.$$

$$MinP=4\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=\frac{25}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow x=4(TM).$$

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

$$P=\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2-P\sqrt{x}+16-3P=0.$$

Phương trình có nghiệm:

$$\Delta=P^2-4(16-3P)\ge 0\Leftrightarrow P^2+12P-64\ge 0\Leftrightarrow (P-4)(P+16)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P\ge 4\\ P\le -16\end{array}\right.\Rightarrow MinP=4\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{P}{2}=2\Leftrightarrow x=4(TM).$$

Bài 7.2. Cho biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (với $x>0, x\ne 1$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho P nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Rút gọn biểu thức P.

$$P=\frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$$

$$P=\frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$P=\frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x})+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)+2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$P=\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có thể làm theo hai cách sau:

Cách 1: Đánh giá

Với $x>0, x\neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1>\sqrt{x}+1>1.$

Vậy $0<P=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}<\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}<2.$

Vì P nguyên nên $P=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x=1\ (KTM).$

Vậy không có giá trị nào của x để P nhận giá trị nguyên.

Cách 2*: Dùng phương pháp miền giá trị.*

$$P=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow P(\sqrt{x})^2+(P-1)\sqrt{x}+P-2=0.$$

TH 1: $P=0 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

TH 2: $P\neq 0 \Rightarrow \Delta=(P-1)^2-4P(P-2)=3P^2+6P+1\geq 0 \Leftrightarrow P^2-2P-\frac{1}{2}\leq 0$.

$$\Leftrightarrow P^2-2P+1\leq\frac{4}{3} \Leftrightarrow (P-1)^2\leq\frac{4}{3} \Rightarrow P\in\{1;2\}\ (do\ P\in Z, P>0)$$

$$p=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x+1}}=1 \Leftrightarrow x=1(KTM).$$

$$P=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=2 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x+1})=0 \Leftrightarrow x=0(KTM).$$

Bài 7.3. Cho hai biểu thức $A=\frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}+\frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$, (với $x\geq 0, x\neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $P=A.B$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Rút gọn biểu thức B.

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(x-3)(\sqrt{x}+3)}+\frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}=\frac{x+5\sqrt{x-24}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B=\frac{(\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x-3})}=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x+3}}.$$

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $P=A.B$ nhận giá trị nguyên.

$$P = A.B = \frac{7}{\sqrt{x}+8}.\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{\sqrt{x}+3}.$$

Vì: $x \ge 0, x \ne 9 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \ge 3 \Rightarrow 0 < p = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \le \frac{7}{3} \Rightarrow P \in \{1;2\}$.

Với: $P = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (TM).

Với: $P = 2 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (TM).

Bài 7.4. Cho biểu thức $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2 - a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$, (với $a > 0,\ a \ne 1$).

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Chứng minh rằng $M > 4$.

c) Tìm a để biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Rút gọn biểu thức M.

Ta để ý: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3 - 1^3}{\sqrt{a\left(\sqrt{a}-1\right)}} = \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a\left(\sqrt{a}-1\right)}} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$.

Thêm nữa:

$$\frac{a^2 - a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{\left(a^2-1\right) - \sqrt{a}\left(a-1\right)}{\sqrt{a}\left(1-a\right)} = \frac{\left(a-1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(1-a\right)} = \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}}.$$

b) Chứng minh rằng $m > 4$.

Xét hiệu:

$$M - 4 = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - 4 = \frac{a-2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{a}} > 0\left(do\, a > 0,\ a \ne 1\right) \Rightarrow M > 4.$$

c) Tìm a để biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên.

Vì: $M > 4 \Rightarrow 0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2} \Rightarrow N = 1(do\, N \in Z)$.

Với: $N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a}+1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-2\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \pm \sqrt{3}$.

$$\Leftrightarrow a = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2 (TM).$$

Cách 2: Ta đánh giá như sau:

$\left(\sqrt{a}+1\right)^2 > 3\sqrt{a}\left(do\ a-\sqrt{a}+1>0\right) \Rightarrow M=\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}} > 3 \Leftrightarrow 0 < N = \dfrac{6}{M} < 2$.

Bài 7.5. Cho biểu thức $P=\dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ (với $x>0, x\neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để biểu thức $M=\dfrac{7}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Rút gọn biểu thức P.

$$P=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$$

$$P=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$P=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}-\frac{\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}=\frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$$

b) Tìm x để biểu thức $M=\dfrac{7}{P}$ nhận giá trị nguyên.

$$0<x\neq 1 \Rightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1>3 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)>6$$

$$\Rightarrow M=\frac{7}{P}=\frac{7}{2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}<\frac{7}{6}.$$

Do M nhận giá trị nguyên:

$$\Rightarrow M=1 \Leftrightarrow \frac{7}{2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{4};4\right\}.$$

2. Ứng dụng vào dạng toán liên quan định lý Vi-et.

Ví dụ 7.6. Cho phương trình : $x^2-2mx+2m-2=0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Tìm GTLN của $M=\dfrac{6\left(x_1+x_2\right)}{x_1^2+x_2^2+4\left(x_1+x_2\right)}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta'=m^2-2m+2=\left(m-1^2\right)+1>0\ (\forall m)$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m-2 \end{cases}$

Xét: $M = \dfrac{6(x_1 + x_2)}{x_1^2 + x_2^2 + 4(x_1 + x_2)} = \dfrac{6(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 4(x_1 + x_2)} = \dfrac{3m}{m^2 + m + 1}$.

Để tìm GTLN của biểu thức M ta làm theo 2 cách như sau:

Cách 1: *Phương pháp thêm bớt.*

Ta có:

$M = \dfrac{3m}{m^2 + m = 1} = \dfrac{m^2 + m + 1 - (m-1)^2}{m^2 + m + 1} = 1 - \dfrac{(m-1)^2}{m^2 + m + 1} \le 1$.

$\Rightarrow MaxM = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Cách 2*: Phương pháp miền giá trị.*

Ta có: $M = \dfrac{3m}{m^2 + m + 1} \Leftrightarrow Mm^2 + (M - 3)m + M = 0$.

TH1: $M = 0 \Rightarrow m = 0$

TH2: $M \ne 0 \Rightarrow \Delta = (M-3)^2 - 4M^2 \ge 0 \Leftrightarrow -3(M^2 + 2M - 3) \ge 0$

$\Leftrightarrow M^2 + 2M - 3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le M \le 1$

$\Rightarrow \text{Max}\, M = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{3 - M}{2M} = \dfrac{3-1}{2} = 1$

Ví dụ 7.7. Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $B = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta' = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \ge 0(\forall m)$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

Xét: $B = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \dfrac{2m+1}{m^2 + 2}$

Cách 1: Phương pháp thêm bớt.

Ta có: $B = \dfrac{2m+1}{m^2+2} = \dfrac{m^2 + 2 - (m-1)^2}{m^2 + 2} = 1 - \dfrac{(m-1)^2}{m^2+2} \le 1$

$\Rightarrow MaxB = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Ta có: $B = \dfrac{2m+1}{m^2+2} = \dfrac{m^2 + 4m + 4 - (m^2 + 2)}{2(m^2+2)} = \dfrac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} - \dfrac{1}{2} \ge -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{Min}\, B = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$

Cách 2: Phương pháp miền giá trị.

Ta có: $B = \dfrac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow Bm^2 - 2m + 2B - 1 = 0$

TH1: $B = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$

TH2: $B \neq 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - B(2B - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2B^2 + B + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2B^2 - B - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2B+1)(B-1) \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq B \leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Min}\, B = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{B} = -2 \\ \text{MaxB} = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{B} = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 7.8. Cho phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Tìm GTLN của $A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$

Hướng dẫn giải

Phương trình có nghiệm:

$\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 2) = 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 2}{2} \end{cases}$

Xét: $A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4| = |m^2 - 2 - m - 4| = |m^2 - m - 6| = |(m+2)(m-3)|$

Vì: $-2 \leq m \leq 2 \Rightarrow A = (m+2)(3-m) = -m^2 + m + 6 = \dfrac{25}{4} - \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{25}{4}$

Vậy $MaxA = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2} (TM)$.

Ví dụ 7.9. Cho phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Tìm GTLN của $B = |x_1 + x_2 + 3x_1x_2|$

Hướng dẫn giải

Phương trình có nghiệm

$\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 1) = 2 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 1}{2} \end{cases}$

Xét $B = |x_1 + x_2 + 3x_1x_2| = \left|-m + \dfrac{3}{2}(m^2 - 1)\right| = \dfrac{1}{2}|3m^2 - 2m - 3| = \dfrac{1}{2}\left|3\left(m - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{10}{3}\right|$

Vì: $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} - \dfrac{1}{3} \leq m - \dfrac{1}{3} \leq \sqrt{2} - \dfrac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq \left(m - \dfrac{1}{3}\right)^2 \leq \left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{3}\right)^2$

$\left|-\sqrt{2} - \dfrac{1}{3}\right| = \sqrt{2} + \dfrac{1}{3} > \left|\sqrt{2} - \dfrac{1}{3}\right| \Rightarrow B \leq \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MaxB = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}$

Ví dụ 7.10. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Chứng minh: $\left|x_1 + x_2 + x_1x_2\right| \le \frac{9}{8}$

Hướng dẫn giải

Phương trình có nghiệm: $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$

$$A = \left|x_1 + x_2 + x_1x_2\right| = \left|2m - 2 + 2m^2 - 3m + 1\right| = \left|2m^2 - m - 1\right| = 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

Vì $0 \le m \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \le m - \frac{1}{4} \le \frac{3}{4} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{9}{16}$

Vậy $A = 2\left(\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) = 2\left[\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4}\right)^2\right] \le \frac{9}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $m = \frac{1}{4}$

Ví dụ 7.11. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right|$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có nghiệm $\Delta' = (m+1)^2 - 2m + 3 = m^2 + 4 > 0 (\forall m)$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Vì $\begin{cases} \left|x_1 + x_2\right| = 2|m+1| \\ \left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{m^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow P = \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right| = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2 + 4}}$

Đặt $T = P^2 = \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2 + 4} \Leftrightarrow (T-1)m^2 - 2m + 4T - 1 = 0$

TH1: $T = 1 \Rightarrow 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

TH2: $T \ne 1 \Rightarrow \Delta' = 1 - (T-1)(4T-1) = -4T^2 + 5T \ge 0$

$\Leftrightarrow T(5 - 4T) \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le T \le \frac{5}{4}$

$\Rightarrow P^2 \le \frac{5}{4} \Rightarrow P \le \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow MaxP = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{T-1} = 4$

3.Ứng dụng vào giải phương trình vô tỉ và hệ phương trình vô tỉ.

Ví dụ 7.12. Giải phương trình: $3\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2x+2}{2x-1}}+2x=5.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $x\neq\dfrac{1}{2}$ (*)

Ta có $(1)\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2x+2}{2x-1}}+(2x-1)=4.$

TH1: $2x-1<0\Rightarrow VT<0$ nên phương trình vô nghiệm.

TH2: $2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 4 số dương ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2+1}{2x-1}}+\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2+1}{2x-1}}+\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2+1}{2x-1}}+(2x-1)\geq 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1.$

Ví dụ 7.13. Giải phương trình $13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}=32$ (2)

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $x^2(2-x^2)\geq 0\Leftrightarrow |x|\leq\sqrt{2}$ (*)

Ta có: $(2)\Leftrightarrow |x|\left(13\sqrt{2-x^2}+9\sqrt{2+x^2}\right)=32$

Sử dụng bất đẳng thức *Bunyakovsky* ta có được:

$$x^2\left[\sqrt{13}\sqrt{13(2-x^2)}+3\sqrt{3}\sqrt{3(2+x^2)}\right]^2\leq x^2\left[(13+27)(26-13x^2+6+3x^2)\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2\left[\sqrt{13}\sqrt{13(2-x^2)}+3\sqrt{3}\sqrt{3(2+x^2)}\right]^2\leq 40x^2(32-10x^2).$$

Mặt khác: $40x^2\left(32-10x^2\right)=4.10x^2\left(32-10x^2\right)\leq\left[10x^2+\left(32-10x^2\right)\right]^2=32^2$

Vậy $|x|\left(13\sqrt{2-x^2}+9\sqrt{2+x^2}\right)\leq 32$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1.$

Ví dụ 7.14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-3x+2=y^3+3y^2\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x^3-3x^2+y+2}=x^2-3y\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\geq 2\\ x^3-3x^2+y+2\geq 0\end{cases}$

Ta có: $x^3-3x+2=(y+1)^3-3(y+1)+2$

$$\Leftrightarrow x^3-3x=(y+1)^3-3(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x^3-(y+1)^3=3\left[x-(y+1)\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y+1 \quad (1)\\ x^2+x(y+1)+(y+1)^2=3 \quad (2)\end{array}\right.$$

Từ (1): $\Rightarrow y=x-1\Rightarrow\sqrt{x-2}+\sqrt{x^3-3x^2+x+1}=x^2-3x+3.$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{(x-1)(x^2-2x-1)}=x^2-3x+3.$

Theo Cô Si ta có: $\begin{cases} \sqrt{(x-2).1} \le \dfrac{x-2+1}{2} = \dfrac{x-1}{2} \\ \sqrt{(x-1)(x^2-2x-1)} \le \dfrac{x^2-x-2}{2} \end{cases} \Rightarrow VT \le \dfrac{x^2-3}{2}$

Từ đó ta được: $x^2-3x+3 \le \dfrac{x^2-3}{2} \Leftrightarrow (x-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=3 (TM).$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{2}+(y+1)^2\right]+\dfrac{3x^2}{4} \ge 0+\dfrac{3.2^2}{4}=3$ (do $x \ge 2$).

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+(y+1)=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Ví dụ 7.15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1}=y \\ \dfrac{2y^2}{y^2+1}=z \\ \dfrac{2z^2}{z^2+1}=x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để hệ có nghiệm: $x, y, z \ge 0.$

Ta dễ thấy $(x, y, z)=(0,0,0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Với $x, y, z \ge 0$ ta nhân ba phương trình với nhau được:

$$\frac{8x^2y^2z^2}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=xyz$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=8xyz.$$

Theo Cô Si ta có: $\begin{cases} x^2+1 \ge 2x > 0 \\ y^2+1 \ge 2y > 0 \\ z^2+1 \ge 2z > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \ge 8xyz.$

Đẳng thức xảy ra khi: $x=y=z=1.$

PHẦN B – GỢI Ý, ĐÁP ÁN

Bài 1.1.

Ta có: $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$ (đúng với $\forall a,b,c$)

Vậy: $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 1.2.

Ta có: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge x+y\Leftrightarrow x^3+y^3\ge xy(x+y)\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-xy)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-2xy+y^2)\ge 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\ge 0$ (đúng với $\forall x,y>0$)

Vậy $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge x+y$.

Đẳng thức xảy ra khi: $x=y$.

Bài 1.3.

Ta có: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Leftrightarrow \frac{x^4+y^4}{x^2y^2}\ge \frac{x^2+y^2}{xy}\Leftrightarrow x^4+y^4\ge xy(x^2+y^2)\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2)\ge 0,\ \forall x,y$

Vì: $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0,\ \forall x,y\ne 0$.

Vậy: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. Đẳng thức xảy ra khi: $x=y\ne 0$.

Bài 1.4

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

Ta cần chứng minh: $t^2+2\ge 3t\Leftrightarrow t^2-3t+2\ge 0\Leftrightarrow (t-1)(t-2)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\ge 0\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2}\ge 0$

Vì: $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0,\ \forall x,y\ne 0.$ Vậy: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi: $x=y\ne 0$

Bài 1.5

Ta có: $\left(\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}\right)>a^2\Leftrightarrow a^2-2b^2+2ab+2\sqrt{(a^2-b^2)(2ab-b^2)}>a^2$

$\Leftrightarrow 2b(a-b)+2\sqrt{(a^2-b^2)(2ab-b^2)}>0$ (đúng với $\forall a>b>0$).

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài 1.6

Ta có: $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\ge\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Vậy $\text{MinP}=\sqrt{2}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$

Bài 1.7

Ta có: $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4}{c(a+b)}\ge16$. Vì: $c(a+b)\le\frac{(c+a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a=b \\ c=a+b \\ a+b+c=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=b=\frac{1}{4} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 1.8

Ta dùng bổ đề sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\,(\forall x,y>0)$ Từ đó ta có: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{b+c}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{4a}{b+c}$ Tương tự ta có:

$\frac{b}{a}+\frac{b}{c}\ge\frac{4b}{a+c};\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\ge\frac{4c}{a+b}$

Cộng vế có:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)$

Bài 1.9

Ta dùng bổ đề sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\,(\forall x,y,z>0)$

Từ đó ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{a+2b},\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{b+2b}c,\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge\frac{9}{c+2a}$

Cộng vế với vế được: $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge9\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Bài 1.10

Ta dùng bổ đề sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\,(\forall x,y,z>0)$

Ta có: $\frac{1}{3a+2b+c}=\frac{1}{(a+b)+(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$

Mặt khác: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Từ đó ta có: $\frac{1}{3a+2b+c}\le\frac{1}{36}\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Tương tự ta được: $\frac{1}{a+3b+2c}\le\frac{1}{36}\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{2}{c}\right),\frac{1}{2a+b+3c}\le\frac{1}{36}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}\right)$

Cộng vế với vế được: $\frac{1}{3a+2b+c}+\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{2a+b+3c}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{8}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{3}{16}$

Lời bình: Ta có thể dùng công thức tính nhanh: $\frac{1}{3a+2b+c} \le \frac{1}{(3+2+1)^2}\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 2.1

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại: $x = y = 3$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x^2 + 3^2 \ge 6x \\ y^2 + 3^2 \ge 6y \\ 3(x^2 + y^2) \ge 6xy \end{cases} \Rightarrow 4(x^2 + y^2) + 18 \ge 6(x + y + xy) = 6.15 = 90$$

Từ đó: $P = x^2 + y^2 \ge \frac{90 - 18}{4} = 18 \Rightarrow MinP = 18 \Leftrightarrow x = y = 3$

Bài 2.2:

Ta có: $2 \ge 2x + 3y \ge 2\sqrt{6xy} \Leftrightarrow xy \le \frac{1}{6}$

Khi đó: $A = \frac{4}{4x^2+9y^2} + \frac{9}{xy} = 4\left(\frac{1}{4x^2+9y^2} + \frac{1}{12xy}\right) + \frac{26}{3xy} \ge \frac{16}{(2x+3y)^2} + \frac{26}{3xy} \ge 56$

Vì: $\begin{cases} (2x+3y)^2 \le 4 \\ 3xy \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{(2x+3y)^2} + \frac{26}{3xy} \ge \frac{16}{4} + 26.2 = 56$

Vậy $MinA = 56 \Leftrightarrow 2x = 3y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

Bài 2.3:

Ta có $P = 2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca}\right) + \frac{1}{2(ab+bc+ca)}$

Từ đó: $P \ge 2.\frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{3}{2} = 18 + \frac{3}{2} = \frac{39}{2}$

Bởi: $2(ab+bc+ca) \le \frac{2}{3}(a+b+c)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{2}$

Vậy $\min P = \frac{39}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 2.4:

Ta có: $\frac{1}{3a+2b+c} = \frac{1}{(a+c)+(a+b)+(a+b)} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b}\right)$

Mặt khác: $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Từ đó: $\frac{1}{3a+2b+c} \le \frac{1}{9}.\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{36}\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Vậy: $\frac{1}{3a+2b+c} + \frac{1}{a+3b+2c} + \frac{1}{2a+b+3c} \le \frac{1}{36}\left(\frac{6}{a} + \frac{6}{b} + \frac{6}{c}\right) = \frac{1}{6}.16 = \frac{8}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = c = \frac{3}{16}$

Bài 2.5:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\ge\frac{9}{4(x+y+z)}=3.$$

Ta có:

$$6\left(x^2+y^2+z^2\right)+10(xy+yz+zx)=6(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx).$$

Mặt khác:

$$xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{3}{16}.$$

Ta đã biết:

$$(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\ge6.\frac{9}{16}-\frac{6}{16}=3.$$

Từ đó:

$$6\left(x^2+y^2+z^2\right)+10(xy+yz+zx)+2\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)\ge9.$$

$$x=y=z=\frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

Bài 2.6:

$$6\left(x^2+y^2+z^2\right)+(x+y+z)\le18.$$

Từ giả thiết ta có được:

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{3}(x+y+z)^2+(x+y+z)\le18\Leftrightarrow 0<x+y+z\le6.$$

Từ đó ta được:

$$P=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\ge\frac{9}{2(x+y+z)}\ge\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

$$MinP=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=y=z=2.$$

Vậy:

Bài 2.7.

$$x=y=\frac{z}{2}.$$

Do tính đối xứng của x và y nên ta dễ thấy điểm rơi đạt tại:

$$P=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right)+3.$$

$$\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}=\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{16x^2}\right)+\frac{15z^2}{16x^2}\ge2\sqrt{\frac{x^2}{z^2}.\frac{z^2}{16x^2}}+\frac{15z^2}{16x^2}=\frac{1}{2}+\frac{15z^2}{16x^2}.$$

Ta tách:

$$\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}=\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{16y^2}\right)+\frac{15z^2}{16y^2}\ge2\sqrt{\frac{y^2}{z^2}.\frac{z^2}{16y^2}}+\frac{15z^2}{16y^2}=\frac{1}{2}+\frac{15z^2}{16y^2}.$$

Tương tự:

$$P\ge6+\frac{15z^2}{16}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\ge6+\frac{15z^2}{16}.\frac{8}{(x+y)^2}\ge6+\frac{15z^2}{16}.\frac{8}{z^2}=\frac{27}{2}.$$

Vậy:

Đẳng thức xảy ra khi: $x = y = \frac{z}{2}.$

Bài 2.8.

Cách 1

Ta giả sử điểm rơi đạt tại: $x = a, y = b \Rightarrow a + b = 3.$

Dựa trên liên hệ a và b ta đặt:

$a = bt\left(t > 0\right) \Rightarrow a + b = b\left(t + 1\right) = 3 \Leftrightarrow b = \frac{3}{t+1} \Rightarrow a = \frac{3t}{t+1}.$

Khi đó thì:

$$P = \frac{t+1}{6t} + \frac{2}{3}(t+1) + 3 = \left(\frac{1}{6t} + \frac{2t}{3}\right) + \frac{23}{6} \geq 2\sqrt{\frac{1}{6t}.\frac{2t}{3}} + \frac{23}{6} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$P = \frac{1}{6t} + \frac{2t}{3}(t > 0) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1, y = 2.$$

Cách 2

Với điểm rơi đạt tại: $x = 1, y = 2.$

Ta tách:

$$P = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{2}{y} + \frac{y}{2}\right) + \frac{x+y}{2} \geq 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $x = 1, y = 2.$

Bài 2.9.

$$1 \leq a, b, c \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} (a-3)(b-3)(c-3) \leq 0 \\ (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca \geq 11.$$

Vậy:

$$P = (a+b+c)^2 - 2\left(ab + bc + ca\right) \leq 36 - 2.11 = 14 \Rightarrow MaxP = 14.$$

Dấu “=” xảy ra tại $\left(a;b;c\right) = \left(1;2;3\right)$ và các hoán vị.

Bài 2.10.

Ta biến đổi:

$$\left(1 - \frac{2\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}}\right) + \left(1 - \frac{2\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}}\right) + \left(1 - \frac{2\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}}\right) \geq 3 - 2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq 1(1).$$

Mặt khác:

$$c + 2\sqrt{ab} \leq c + a + b \Rightarrow \frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} \geq \frac{c}{a+b+c}.$$

Tương tự:

$$\frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} \geq \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq \frac{b}{a+b+c}.$$

Cộng các vế ta được:

$$\frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq \frac{a+b+c}{a+b+c}.$$

Ta cũng có thể làm như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{c})^2}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a})^2}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{(\sqrt{b})^2}{b+2\sqrt{ca}} \ge \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2} = 1.$$

Bài 2.11.

$$M = \frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2xy}{x-y} = x-y+\frac{2}{x-y} \ge 2\sqrt{2}.$$

Ta có:

Đẳng thức xảy ra:

$$\begin{cases} x-y = \frac{2}{x-y} (x>y) \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\sqrt{2} \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Bài 2.12.

Cách 1

$$\sqrt{x(2x+y)} + \sqrt{y(2y+x)} \le \sqrt{(x+y)(3x+3y)} = \sqrt{3}(x+y).$$

Ta có:

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x(2x+y)}+\sqrt{y(2y+x)}} \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow MinP = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=y.$$

Vậy:

Cách 2

$x=y.$

Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại:

$$\sqrt{x(2x+y)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x(2x+y)} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x+2x+y) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(5x+y).$$

Ta có:

$$\sqrt{y(2y+x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3y(2y+x)} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(3y+2y+x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(5y+x).$$

Tương tự:

Cộng vế:

$$\sqrt{x(2x+y)} + \sqrt{y(2y+x)} \le \sqrt{3}(x+y) \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{x(2x+y)}+\sqrt{y(2y+x)}} \ge \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$MinP = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=y.$$

Vậy:

Bài 2.13.

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca).$$

Ta đã chứng minh được:

$$P \ge \frac{18}{ab+bc+ca} + 2(ab+bc+ca) - 1 \ge 2\sqrt{18.2} - 1 = 11.$$

Từ đó:

$MinP = 11 \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Vậy:

Bài 2.14.

$$\sqrt{4a^2+12} = \sqrt{2(2a^2+6)} = \sqrt{2(2a^2+2ab+ca+cb)} = \sqrt{(2a+2b)(c+2a)}$$

Ta có:

Tương tự:

$$\sqrt{4b^2+12}=\sqrt{(2a+2b)(c+2b)};\sqrt{c^2+12}=\sqrt{(c+2a)(c+2b)}$$

Từ đó:

$$\sqrt{4a^2+12}+\sqrt{4b^2+12}+\sqrt{c^2+12}\le\frac{6a+6b+2c}{2}+\frac{2a+2b+2c}{2}=2(2a+2b+2c)$$

Vậy:

$$P=\frac{2a+2b+2c}{\sqrt{4a^2+12}+\sqrt{4b^2+12}+\sqrt{c^2+12}}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow MinP=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=1\\c=2\end{cases}$$

Bài 3.1

Cách 1

Ta đặt

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{b-c}\Rightarrow x+1=\dfrac{a+b-c}{b-c},x-1=\dfrac{a-b+c}{b-c}\\ y=\dfrac{b}{c-a}\Rightarrow y+1=\dfrac{b+c-a}{c-a},y-1=\dfrac{b-c+a}{c-a}.\\ z=\dfrac{c}{a-b}\Rightarrow z+1=\dfrac{c+a-b}{a-b},z-1=\dfrac{c-a+b}{a-b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)\Leftrightarrow xy+yz+zx=-1.$$

Ta cần chứng minh: $x^2+y^2+z^2\ge2.$

Thật vậy: $(x+y+z)^2\ge0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge-2(xy+yz+zx)=2.$

Cách 2

Ta có: $ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a).$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}=-1.$$

Vậy

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2=\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}-2.$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2+2\ge2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0.$

Bài 3.2

Ta có:

$$P=\frac{1}{x\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)}+\frac{1}{y\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}.$$

Đổi biến bằng đặt:

$$a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};a=\frac{1}{z}\left(0<a,b,c<\sqrt{3}\right)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=3.$$

Khi đó:

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{3-a^2}+\frac{b}{3-b^2}+\frac{c}{3-c^2}.$$

$$\frac{x}{3-x^2}\ge\frac{x^2}{2}\left(0<x<\sqrt{3}\right)\Rightarrow P=\frac{a}{3-a^2}+\frac{b}{3-b^2}+\frac{c}{3-c^2}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Bài 3.3

$$(a-b)^2=a+b+2\Leftrightarrow\left(a^2+a\right)+\left(b^2+b\right)=2(a+1)(b+1)\Leftrightarrow\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=2.$$

Đổi biến bằng đặt: $x=\frac{a}{b+1}\ge0;\quad y=\frac{b}{a+1}\ge0\Rightarrow x+y=2.$

Từ đó: $P=\left[1+\left(\frac{a}{b+1}\right)^3\right]\left[1+\left(\frac{b}{a+1}\right)^3\right]=\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)\le9.$

$$\Leftrightarrow 1+x^3+y^3+x^3y^3\le9\Leftrightarrow x^3y^3+(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]\le8.$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3+2(4-3xy)\le8\Leftrightarrow xy\left(x^2y^2-6\right)\le0\left(do\ 0\le xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=1\right).$$

Bài 3.4

$x^2(y+z)\ge x^2.2\sqrt{yz}=2x\sqrt{x};\ \ y^2(z+x)\ge y^2.2\sqrt{zx}=2y\sqrt{y};\ \ z^2(x+y)\ge2z\sqrt{z}\ (do\ xyz=1).$ Đổi biến bằng đặt: $a=x\sqrt{x}+2y\sqrt{y};\ b=y\sqrt{y}+2z\sqrt{z};\ c=z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}.$

Khi đó: $x\sqrt{x}=\frac{4c+a-2b}{9};\ y\sqrt{y}=\frac{4a+b-2c}{9};\ z\sqrt{z}=\frac{4b+c-2a}{9}.$

Ta chứng minh được: $P\ge\frac{2}{9}(4.3+3-6)=2\Rightarrow MinP=2\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Bài 3.5

Đặt: $bc=x;\ ca=y;\ ab=z\ (x,y,z>0)\Rightarrow xyz=(abc)^2=1.$

Khi đó: $\frac{bc}{a^2b+a^2c}=\frac{bc}{a^2(b+c)}=\frac{1}{a}.\frac{bc}{a(b+c)}=\frac{(bc)^2}{ac+ab}=\frac{x^2}{y+z}.$

Từ đó: $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}.$

Bài 3.6

Ta đặt: $x=a+b-c>0;\ y=b+c-a>0;\ z=c+a-b>0.$

Khi đó: $a=\frac{x+z}{2};\ b=\frac{x+y}{2};\ c=\frac{y+z}{2}.$

Vậy ta cần chứng minh: $xyz\le\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}.$

Theo AM-GM có: $x+y\ge2\sqrt{xy}>0;\ y+z\ge2\sqrt{yz}>0;\ \ z+x\ge2\sqrt{zx}>0.$

Nhân vế với vế ta được: $(x+y)(y+z)(z+x)\ge8xyz.$

Bài 3.7.

Ta đặt: $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}\ (a,b,c > 0)$

Khi đó ta cần chứng minh: $2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + 1 \ge \frac{32abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$

Bài 3.8.

Hướng giải 1

Ta dễ dàng thấy điểm rơi đạt tại: $a = b = c = 1.$

Ta đã biết: $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3 \Rightarrow -(ab+bc+ca) \ge -3.$

Vậy: $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = (a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) \ge 3^2 - 3 = 6.$

Hướng giải 2

Ta đặt: $a = 1 + x, b = 1 + y \Rightarrow c = 3 - (a+b) = 1 - x - y.$

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = x^2 + xy + y^2 + 6 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 6 \ge 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

Bài 3.9.

Đặt: $a = 2x; b = 2y; c = 2z\ (a,b,c \ge 0) \Rightarrow a + b + c = 3.$

Khi đó: $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \frac{1}{8}(a^3 + b^3 + c^3) \\ x^2y^2z^2 = \frac{1}{64}(abc)^2 \end{cases} \Rightarrow 64P = 8(a^3 + b^3 + c^3) + (abc)^2.$

Ta biết: $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r = 27 - 9q + 3r\ (do: p = 3)$.

Từ đó: $Q = 64P = 8(a^3 + b^3 + c^3) + (abc)^2 = 8(27 - 9q + 3r) + r^2.$

Ta có: $r \ge \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{4q-9}{3} \Rightarrow Q \ge 8(27 - 9q + 4q - 9) + \left(\frac{4q-9}{3}\right)^2.$

Từ đó tìm được: $MinP = \frac{25}{64} \Leftrightarrow p = q = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}.$

Lời bình: Ta chú ý rằng $p \le \frac{q^2}{3} = 3 \Leftrightarrow 0 \le q \le 3.$

Hoặc: $Q \ge \frac{16}{9}q^2 - 48q + 153 = \frac{16}{9}(3-q)(24-q) + 25 \ge 25\ (\forall q \le 3).$

Bài 3.10.

Đặt: $x + y = a; y + z = b; z + x = c (a,b,c \ge 0) \Rightarrow a + b + c = 4.$

Khi đó: $\begin{cases} x+2y+z=(x+y)+(y+z)=a+b \\ 2-x=y+z=b; 2-y=c; 2-z=a \end{cases} \Rightarrow a+b \geq abc.$

Ta thấy: $abc \leq \frac{(a+b)^2}{4}c = \frac{1}{4}(a+b)(a+b)c \leq \frac{1}{4}(a+b)\frac{(a+b+c)^2}{4} = a+b.$

Hoặc: $4 = a+b+c \geq 2\sqrt{(a+b)c} \Leftrightarrow (a+b)c \leq 4 \Leftrightarrow 4(a+b) \geq (a+b)^2 c \geq 4abc.$

Lời bình: Đặt: $x+y=2a; y+z=2b; z+x=2c \Rightarrow a+b+c=2.$

$\begin{cases} x+2y+z=(x+y)+(y+z)=2(a+b) \\ 2-x=y+z=2b; 2-y=2c; 2-z=2a \end{cases} \Rightarrow 2(a+b) \geq 8abc \Leftrightarrow a+b \geq 4abc.$

$4abc \leq (a+b)^2 c = (a+b)(a+b)c \leq (a+b).\frac{(a+b+c)^2}{4} = a+b$

Hoặc $2 = a+b+c \geq 2\sqrt{(a+b)c} \Leftrightarrow (a+b)c \leq 1 \Leftrightarrow a+b \geq (a+b)^2 c \geq 4abc$.

Bài 4.1

Ta tìm $k(0<k<2)$ để $A = \frac{1}{xy(x-y)} + kx + (2-k)(x-y) + (2-k)y$.

Đẳng thức xảy ra, ta có $\frac{1}{xy(x-y)} = kx = (2-k)(x-y) = (2-k)y \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

Phần còn lại tự chứng minh.

Bài 4.2

Ta thêm hệ số m và $n(m,n>0)$:

$9x\sqrt{1+x^2} + 13x\sqrt{1-x^2} = \frac{9}{m}.mx\sqrt{1+x^2} + \frac{13}{n}.nx\sqrt{1-x^2}$

$\frac{9}{m}.mx\sqrt{1+x^2} + \frac{13}{n}.nx\sqrt{1-x^2} \leq \frac{9}{2m}(m^2x^2+1+x^2) + \frac{13}{2n}(n^2x^2+1-x^2)$

Dựa trên đẳng thức xảy ra, ta tìm được $m=\frac{3}{2}, n=\frac{1}{2}$.

Phần còn lại tự chứng minh.

Bài 4.3

Ta đánh giá được $\sqrt{2a^2+ab+2b^2} \geq \frac{\sqrt{2+1+2}}{2}(a+b) = \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$.

Từ đó $P \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b+b+c+c+a) = \sqrt{5}(a+b+c) \geq \frac{\sqrt{5}}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $MinP = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{9}$.

Bài 4.4

Ta dễ dàng đánh giá được $\sqrt{3a^2+2ab+3b^2} \geq \frac{\sqrt{3+2+3}}{2}(a+b) = \sqrt{2}(a+b)$.

Từ đó $P \geq 2\sqrt{2}(a+b+c) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = 6\sqrt{2}$.

Vậy $MinP = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 4.5

Ta đánh giá được

$$\frac{1}{2-a} \ge \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}, \left(0 < a < \sqrt{3}\right).$$

Phần còn lại tự chứng minh.

Bài 4.6

$$\left(\frac{9}{4-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{9}{4-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{9}{4-c} - \frac{1}{c}\right) < 8$$

Ta đánh giá được $\frac{9}{4-a} - \frac{1}{a} \le 2a\left(0 < a < 2\right)$.

Ta để ý a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác nên: $a < b + c \Leftrightarrow 2a < 4 \Leftrightarrow 0 < a < 2$.

Phần còn lại bạn đọc tự chứng minh.

Bài 4.7

Ta đánh giá được $\sqrt{2 + x^4} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x$.

Phần còn lại bạn đọc tự chứng minh.

Bài 4.8

Ta cần tìm k sao cho $4x^3 - x^4 \le kx^2, \forall x \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 4x + k\right) \ge 0, \forall x \Rightarrow k = 4$.

Từ đó đánh giá được: $4x^3 - x^4 \le 4x^2, \forall x$.

Phần còn lại bạn đọc tự chứng minh.

Bài 4.9

Ta cần tìm k sao cho $\frac{k}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{(k+1+1)^2}{\sqrt{2}x + y + z}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{k}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow k = \sqrt{2} \\ x = y = z = 3 \end{cases}$.

Phần còn lại bạn đọc tự chứng minh.

Từ đây đọc giả tìm ra $MaxP = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow x = y = z = 3$.

Bài 5.1

Ta có $2ab + 6bc + 2ca = 7abc \Leftrightarrow \frac{6}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 7$

Ta có

$$Q = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ca}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{2^2}{\frac{1}{b} + \frac{2}{a}} + \frac{3^2}{\frac{1}{c} + \frac{4}{a}} + \frac{2^2}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b}} \ge \frac{(2+3+3)^2}{\frac{6}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}} = \frac{49}{7} = 7.$$

Vậy $MinQ = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b = 2c \\ \frac{6}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = c = 1 \end{cases}$.

Bài 5.2

$\sqrt{3\left(2a^2+b^2\right)}=\sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+a^2+b^2\right)}\geq\left(a+a+b\right)=2a+b$.

Từ đó

$P\leq\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\leq\frac{1}{(2+1)^2}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Mà $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leq3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\leq3.2015\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\sqrt{3.2015}$

Vậy $P\leq\frac{1}{3}\sqrt{3.2015}\Rightarrow MaxP=\sqrt{\frac{2015}{3}}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{\frac{3}{2015}}$.

Bài 5.3

Ta có

$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\geq\frac{9}{(a+b+c)}\geq1$ (do $a+b+c\leq3$).

Từ đó $M=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\right)+\frac{2007}{ab+bc+ca}\geq1+\frac{2007}{3}=670$.

Vì $ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2\leq3\Rightarrow\frac{2007}{ab+bc+ca}\geq\frac{2007}{3}=699$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 5.4

Ta có: $P=\left(x^2+\frac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{4x^2}\right)=(xy)^2+\frac{1}{16(xy)^2}+\frac{1}{2}$.

Bằng đổi biến tìm được: $\min P=\frac{25}{16}\Leftrightarrow t=\frac{1}{16}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 5.5.

Ta đưa về: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$

$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a+b+c}{3}=\frac{a-b}{3}+\frac{(a+b)(a-b)^2}{3\left(a^2+ab+b^2\right)}$.

Bài 5.6.

$M=\left[(2a)^2+\left(b\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+(2c)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]$

$\Rightarrow M\geq\frac{4}{3}(a+b+c+1)^2$.

Mặt khác: $(a+b+c)^2\geq4(a+b+c)\Rightarrow\frac{4}{3}(a+b+c+1)^2\geq\frac{16}{3}(a+b+c)$.

Vậy $T=\frac{a+b+c}{\left(4a^2+2b^2+1\right)\left(4c^2+3\right)}\leq\frac{3}{16}$.