**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**

**TỈNH HÀ NỘI LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024**

**MÔN THI: TOÁN**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề**

**Đề số 7**

**(Đề thi có 1 trang)**

Câu 1. (5.0 điểm).

a) Cho các nguyên  d thỏa mãn điều kiện .

Chứng minh rằng  chia hết cho 3 .

b) Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho  là số nguyên tố.

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình .

b) Tìm tất cả các bộ ba số  thỏa mãn .

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực  thỏa mãn  và . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



Câu 4. (6.0 điểm).

Cho tam giác đều  có cạnh bằng . Lấy điểm  bất kì trên cạnh  ( khác  và  ). Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho . Gọi  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của  trên .

1. Xác định vị trí của  để  có độ dài lớn nhất.

2. Chứng minh  không đổi khi  di chuyển trên cạnh .

Câu 5. (1.0 điểm).

Cho bảng ô vuông kích thước  gồm 100 ô vuông có kích thước . Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

**ĐÁP ÁN**

Câu 1.

a)

Từ giả thiết  ta có



Dễ thấy  chia hết cho 3 nên ta được  chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có 

Mà  chia hết cho 3 nên suy ra  chia hết cho 3 .

Do vậy  chia hết cho 3 .  
b)

Ta xét các trường hợp sau

+ Khi  ta được  không phải là số nguyên tố.

+ Khi  ta được  là số nguyên tố.

+ Khi  thì  là số nguyên tố lẻ. Khi đó  chia 3 có số dư là 1 .

Ngoài ra do  là số nguyên tố lẻ nên ta đặt .

Từ đó ta có  chia 3 có số dư là 2 .

Như vậy  luôn chia hết cho 3 . Do đó  luôn là hợp số khi .

Vậy  là giá trị thỏa mãn yêu câu bài toán.

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình 

Điều kiện xác định của phương trình là .

+ Xét , ta thấy thỏa mãn phương trình, do đó  là một nghiệm của phương trình.

+ Xét , khi đó ta có . Phương trình đã cho tương đương với .

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ  Từ đó ta được .

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là .

b) Tìm tất cả các bộ ba số  thỏa mãn .

Từ  và  ta được . Khi đó ta được



+ Xét trường hợp , khi đó từ  ta được .

Cũng từ  ta được . Thế vào  ta được .

Từ đó ta được hai bộ số  thỏa mãn là .

+ Giải các trường hợp  và  ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số  cần tìm là .

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực  thỏa mãn  và . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có



Từ đó ta được  nên .

Hoàn toàn tương tự ta có .

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  là 3 , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



Xét hiệu  hay ta được



Không mất tính tổng quát ta giả sử .

Khi đó ta thấy  và .

Do đó ta có . Hoàn toàn tương tự ta cũng có

.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được



Do đó 

Từ đó suy ra .

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Câu 4. (6.0 điểm).



a) Chứng minh bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn.

Từ  ta được  hay .

Xét hai tam giác  và  có  và  nên  cs .

Từ đó ta được . Mà ta có 

Lai có .

Do đó ta được , suy ra tứ giác  nội tiếp đường tròn.

b) Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên .

+ Xác định vị trí của  để IK có độ dài lớn nhất.

Do tứ giác  và  nội tiếp nên , suy ra .

Do đó ta được  nên ba điểm  thẳng hàng.

Dễ thấy hai tam giác  và  đồng dạng với nhau. Do đó ta được .

Mà ta có  nên ta được  hay , dấu bằng xảy ra khi  hay  nằm chính giữa cung nhỏ , khi đó  là trung điểm cạnh .

Vậy IK lớn nhất khi  là trung điểm của .

+ Chứng minh  không đổi khi  di chuyển trên cạnh .

Do tứ giác  nội tiếp nên ta có . Lại có 

Do đó hai tam giác  và  đồng dạng, do đó ta được . Tương tự ta được 

Từ đó suy ra  nên ta được .

Hay  .

Mặt khác ta lại có 

Mà  và . Nên ta có . hay . Do đó 

Suy ra .

Mà  nên  không đổi.

Câu 5.

﻿Xét hình vuông cạnh , do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn

chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho

3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng  được chia thành 25 hình vuông

có cạnh  nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia

hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít

nhất  lần.