**PHÒNG GD & ĐT BỈM SƠN**

**ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2014-2015**
**Môn: TOÁN 8**
**Thời gian: 120 phút (không kể chép đề)**

**Bài 1. (3đ)** Cho $a,b,c$ là các số hữu tỷ khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$

Chứng minh rằng: $M=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ là bình phương của một số hữu tỷ

**Bài 2. (5 điểm)**

Rút gọn biểu thức sau và tìm giá tri nguyên của $x$ để biểu thức có giá trị nguyên:

$$M=\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8}-\frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

**Bài 3. (3 điểm)**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3^x+4^x=5^x$

**Bài 4. (6 điểm)**

a) Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{BAC}=120^0$. Các phân giác $AD, BE$ và CF

Chứng minh rằng $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$

b) Tính $\widehat{FDE}$

**Bài 5. (3 điểm)**

Cho $a,b,c$ là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\le 5$

## ĐÁP ÁN

**Bài 1.**

Ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2.\frac{a+b+c}{abc}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

Vậy $M$ là bình phương của một số hữu tỉ

**Bài 2.**

$$M=\left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\frac{2x^2}{4.(2-x)+x^2.(2-x)}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$M=\left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)}+\frac{2x^2}{(x^2+4)(x-2)}\right].\frac{(x^2-2).(x+1)}{x^2}$$

$$M=\frac{x^2.(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)(x^2+4)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x(x^2-4x+4+4x)}{2(x-2)(x^2+4)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

$$M=\frac{x(x^2+4)}{2(x-2)(x^2+4)}.\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=\frac{x+1}{2x}$$

Để $M$ xác định thì $\begin{cases}2x^2+8\neq 0\\(x^2+4)(x-2)\neq 0\\x^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq 2\end{cases}$

Khi đó $M$ nguyên thì $2M$ nguyên hay $\frac{x+1}{x}$ nguyên . Mà

$$\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in U(1)=\{\pm 1\}$$

Với $x=-1$ thỏa mãn (*) và $M=0\in\mathbb{Z}$

Với $x=1$ thỏa mãn $(*)$ và $M=1\in\mathbb{Z}$

Vậy $x=1;x=-1$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Bài 3.**

Phương trình đã cho có thể viết lại là : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Ta thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \neq 2$ ta xét:

Nếu $x > 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$

Với $x < 2$ dễ thấy $x = 0; x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình

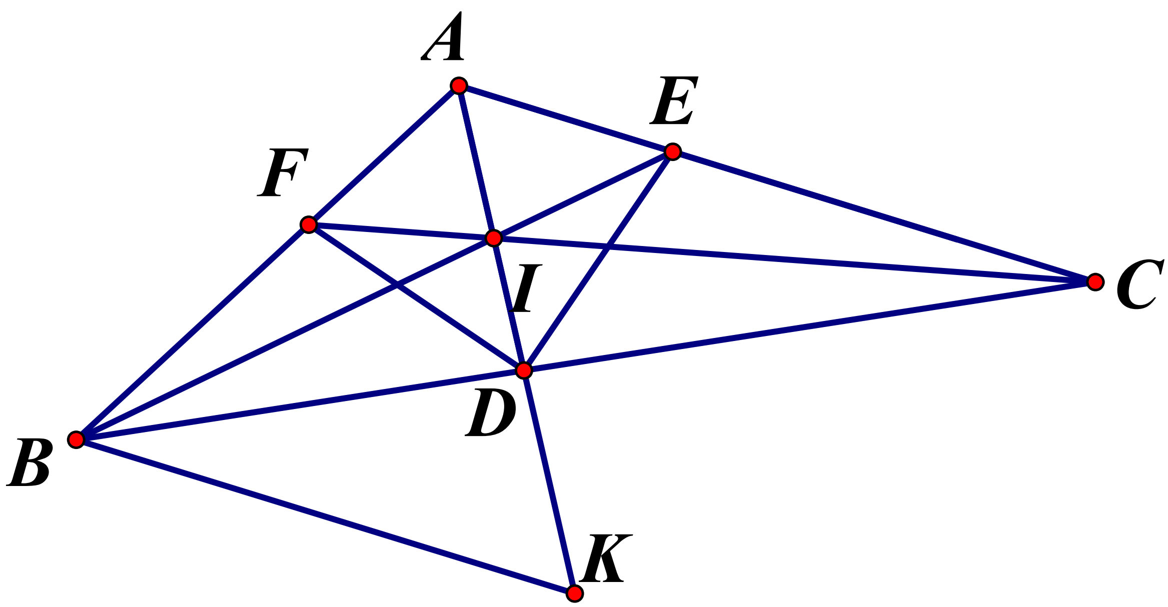
Với $x < 0$ ta đặt $x = -y$ thì $y > 0$ nên $y \geq 1$. Ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{-y} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-y} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y = 1$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y \geq \frac{5}{3} + \frac{5}{4} > 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

**Bài 4.**




a) Từ B kẻ $BK//AC$ cắt $AD$ tại K, ta có tam giác $ABK$ đều

Do đó:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{DK}{DA}=\frac{AB-AD}{AD}=AC.(AB-AD)\Rightarrow\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

b) Áp dụng tính chất đườn phân giác tính được $BD=\frac{BC.AB}{AB+AC}$

Từ ($a$) suy ra $AD=\frac{AB.AC}{AB+AC}$

Suy ra $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}=\frac{EA}{EB}$ nên DE là phân giác của $\widehat{BDA}$

Chứng minh tương tự được $DF$ là phân giác $\widehat{ADC}$

Từ đó suy ra $\widehat{EDF}=90^0$

**Bài 5.**

Từ giả thiết ta có:

$$(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0 \Leftrightarrow 8+2(ab+bc+ca)-4(a+b+c)-abc\ge 0$$

Cộng hai vế với $a^2+b^2+c^2$, sau đó thu gọn ta được:

$$(a+b+c)^2 \ge a^2+b^2+c^2+abc+4 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+abc\le 5$$

Mà $abc\ge 0$ nên $a^2+b^2+c^2\le 5$

Dấu bằng xảy ra khi trong ba số $a,b,c$ có một số bằng $0,$ một số bằng $2,$ một số bằng 1.