

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI KSCL ĐỘI TUYỂN MÔN TOÁN LỚP 12

(Từ câu 26 đến câu 50)

Câu 26. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, M là tâm của mặt bên $ABB'A'$. Tính thể tích của khối tứ diện $GMBC$ theo V .

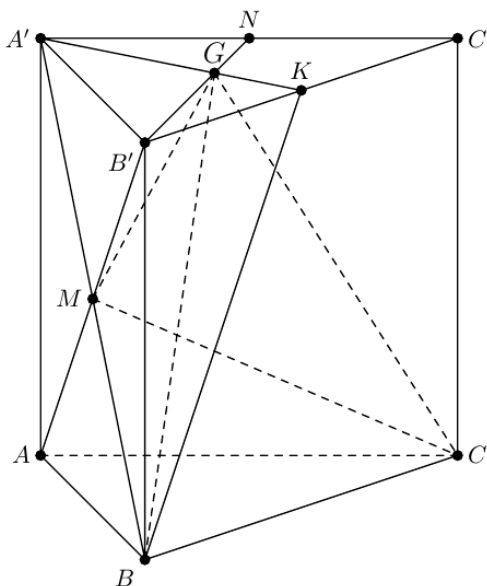
A. $\frac{2}{9}V$.

B. $\frac{1}{9}V$.

C. $\frac{1}{3}V$.

D. $\frac{1}{6}V$.

Lời giải



♦ Ta có: $V_{C.BKA'} = V_{C.BMG} + V_{C.MGA'} + V_{C.BGK}$.

♦ Khi đó: $V_{C.BKA'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{ABCA'} - V_{C'.CKA'} - V_{B'.BKA'} = V - \frac{1}{3}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$.

♦ Khi đó: $V_{C.MGA'} = \frac{1}{3}d(C;(A'MG)).S_{\Delta A'MG} = \frac{1}{3}d(C;(A'MG)).\frac{1}{3}S_{\Delta A'BK}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}d(C;(A'MG)).S_{\Delta A'BK} = \frac{1}{3}V_{CA'BK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{1}{9}V$.

$V_{C.BGK} = \frac{1}{3}d(C;(BGK)).S_{\Delta BGK} = \frac{1}{3}d(C;(BGK)).\frac{1}{3}S_{\Delta A'BK}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}d(C;(A'BK)).S_{\Delta A'BK} = \frac{1}{3}V_{CA'BK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{1}{9}V$.

♦ Vậy ta có $V_{C.BMG} = V_{C.BKA'} - V_{C.MGA'} - V_{C.BGK} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{9}V - \frac{1}{9}V = \frac{1}{9}V$.

Câu 27. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Biết (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Tính theo a thể tích của khối trụ đã cho.

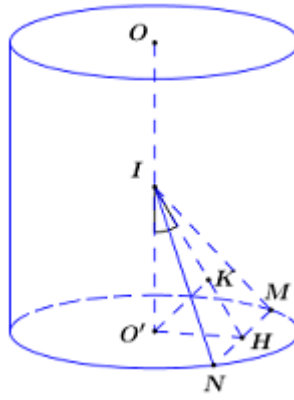
A. πa^3

B. $\frac{2\pi a^3}{3}$

C. $2\pi a^3$

D. $\pi\sqrt{2}a^3$

Lời giải



Giả sử (α) cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O') theo giao tuyến là đường thẳng MN như hình vẽ, khi đó ta có $(\alpha) \equiv (IMN)$.

Gọi H là trung điểm của MN ta có $O'H \perp MN$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

Trong $(O'HI)$ kẻ $O'K \perp IH$ ($K \in IH$) ta có:

$$\begin{cases} MN \perp O'H \\ MN \perp O'I \end{cases} \Rightarrow MN \perp (O'HI) \Rightarrow MN \perp O'K.$$

$$\begin{cases} O'K \perp MN \\ O'K \perp IH \end{cases} \Leftrightarrow O'K \perp (IMN).$$

$\Rightarrow KI$ là hình chiếu vuông góc của $O'I$ lên (IMN)

$$\Rightarrow \angle(OO'; (\alpha)) = \angle(O'I; IMN) = \angle(O'I; KI) = \angle O'KI = 30^\circ.$$

$$\text{Theo bài ra ta có } MN = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{6}}{3}, OO' = 2a \Rightarrow O'I = a.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } O'HI \text{ có: } O'H = O'I \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông $O'HN$ có:

$$O'N = \sqrt{O'H^2 + HN^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = a = R$$

$$\text{Vậy thể tích khối trụ là } V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$$

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9 \left[9(x+1)^{2m} \right]$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-1; 0)$.

B. $m \in (-2; 0)$.

C. $m \in (-1; +\infty)$.

D. $m \in [-1; 0)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có: $x \log_3(x+1) = \log_9 \left[9(x+1)^{2m} \right] \quad (1)$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm phương trình trên.

Pt (1) $\Leftrightarrow (x-m) \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\log_3(x+1)} = m.$

Đặt: $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1) \ln 3 \cdot (\log_3(x+1))^2} > 0, \forall x \in (-1; +\infty).$

Suy ra $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)}$ là hàm số đồng biến $\forall x \in (-1; +\infty).$

Ta có BBT của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)}.$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-1	$+\infty$	$+\infty$

Dựa, vào BBT ở hình vẽ trên, để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9 \left[9(x+1)^{2m} \right]$ có 2 nghiệm khi $m \in (-1; +\infty).$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}, \int_3^9 f(x) dx = k.$

Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ theo $k.$

A. $I = -\frac{45+k}{9}.$

B. $I = \frac{45-k}{9}.$

C. $I = \frac{45+k}{9}.$

D. $I = \frac{45-2k}{9}.$

Lời giải

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$ Đổi cận $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 3 \end{array} \right.$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f\left(\frac{2}{x}\right) dx.$

$$\text{Mà } 2f(3x) + 3f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x)$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[-\frac{5x}{2} - \frac{2}{3}f(3x) \right] dx = -\frac{5}{4} \int_1^3 x dx - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx = -5 - \frac{1}{3} \int_1^3 f(3x) dx \quad (*)$$

$$\text{Đặt } u = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow u=3 \\ x=3 \Rightarrow u=9 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = -5 - \frac{1}{9} \int_3^9 f(t) dt = -5 - \frac{k}{9} = -\frac{45+k}{9}.$$

Câu 30. Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Khi $m = m_0$ thì (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-2; 0)$.

B. $m_0 \in (0; 2)$.

C. $m_0 \in (1; 2)$.

D. $m_0 \in (2; 5)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

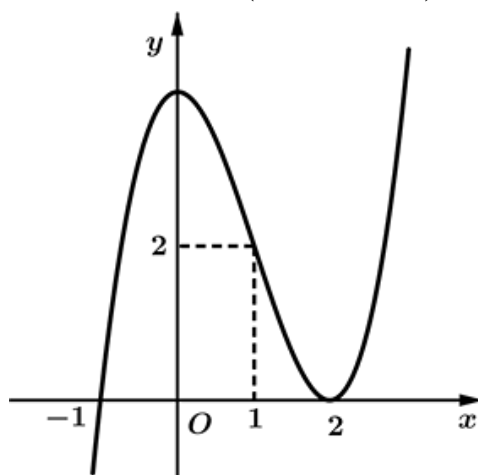
Giả sử $x_3 = 1$ thì yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 1 và thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1-1-m \neq 0 \\ (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m > 0 \\ m \neq 0 \\ 1^2 + 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 1$.

Câu 31. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau đây:



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}(x-2)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \end{cases}$. Xét phương trình: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$

Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$x = -1$ không là tiệm cận đứng do đk $x \geq 0$.

$x = 2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là một đường tiệm cận đứng.

Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < 0 \\ x = 1 \\ x = b (b > 2) \end{cases}$

$x = a$ không là tiệm cận đứng (vì $x \geq 0$)

$x = 1, x = b$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 3.

Câu 32. Gọi S là tập các hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m^2(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \leq 2057$. Số phần tử của tập S là

A. 19.

B. 36.

C. 18.

D. 37.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2 = m^2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2 - m^2) = 0$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - 2 - m^2 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -3 - m^2 \neq 1 \end{cases}$ (**Luôn đúng với mọi m**).

Giả sử nghiệm $x_3 = 1$ và x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 - m^2 = 0$.

Theo định lí Vi - ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -2 - m^2 \end{cases}$

Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8 + 6(2 + m^2)$.

Nên: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \leq 2057 \Leftrightarrow 1 + 8 + 6(m^2 + 2) \leq 2057 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{1018}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1018}{3}} \leq m \leq \sqrt{\frac{1018}{3}}$

Do m nguyên nên: $-18 \leq m \leq 18$ ($m \in \mathbb{Z}$).

Vậy có 37 giá trị nguyên.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$.

B. $m = -1$.

C. $m = 9$.

D. $m = 1; m = -9$.

Lời giải

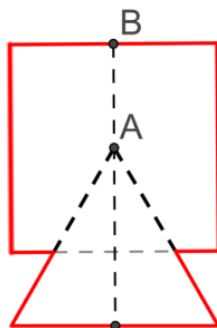
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases}$$

Câu 34. Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ).



Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục AB là

A. $\frac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Khi xoay quanh trục AB thì :

Phần hình vuông phía trên trở thành lăng trụ có bán kính $R = 2$,

chiều cao $h = 4 \rightarrow V_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$

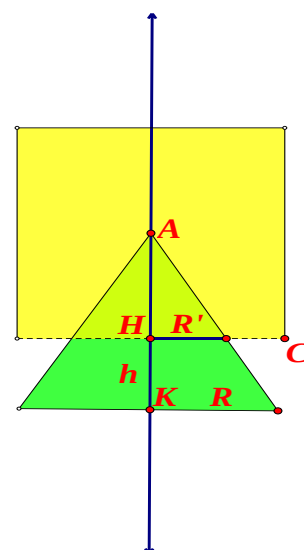
Phần dưới trở thành hình nón cụt với

$$h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1); R = 2$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{AH}{AK} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Áp dụng } V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR') = \dots = \left(\frac{24\sqrt{3} - 8}{9}\right)\pi$$

$$\text{Vậy } V = V_1 + V_2 = \left(\frac{24\sqrt{3} + 136}{9}\right)\pi.$$



Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(f(x))$, gọi T là tập hợp tất cả các nghiệm thực của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của T bằng



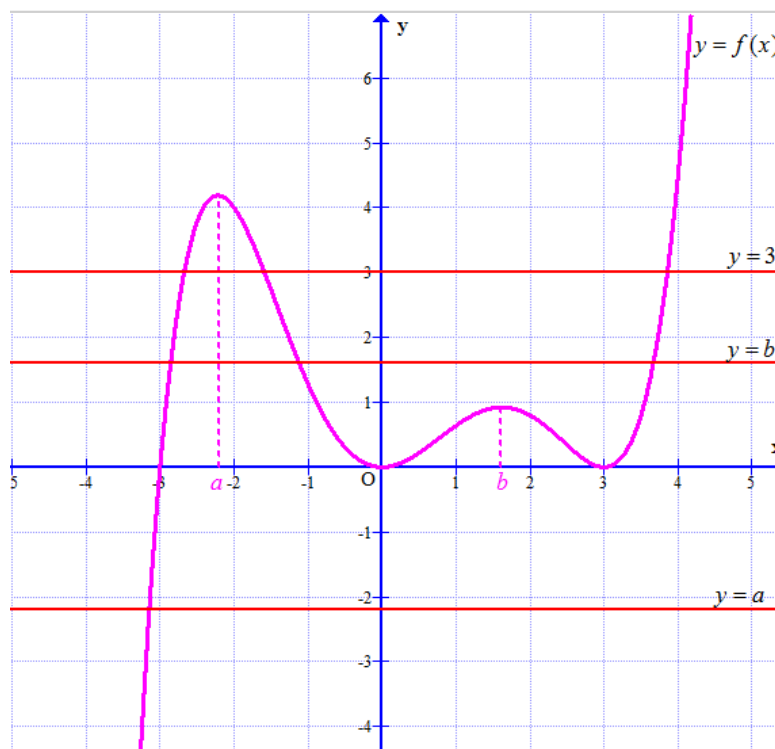
A. 10.

B. 14.

C. 12.

D. 8.

Lời giải



Ta có: $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-3; -2) \\ x = 0 \\ x = b \in (1; 2) \\ x = 3 \\ f(x) = a \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b \\ f(x) = 3 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

+ Phương trình $f(x) = a$ có 1 nghiệm (**không trùng với các nghiệm** $x = a; x = 0; x = b; x = 3$)

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = -3; x = 0; x = 3$.

+ Phương trình $f(x) = b$ có 3 nghiệm không trùng với các nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x) = 3$ có 3 nghiệm không trùng với các nghiệm trên.

Vậy phương trình có 12 nghiệm.

Câu 36. Gọi M, N là hai điểm thuộc đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x+1}$ biết $x_M < -1 < x_N$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN ?

A. $2\sqrt{2}$.

B. 6.

C. 4.

D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Do $x_M < -1 < x_N$ nên M, N là hai điểm nằm trên hai nhánh của đồ thị (C) .

Ta có: $y = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ và $M\left(x_M; 1 - \frac{2}{x_M+1}\right), N\left(x_N; 1 - \frac{2}{x_N+1}\right)$.

Đặt $a = x_N + 1, b = -1 - x_M$ thì $a > 0, b > 0$ và $M\left(-b-1; 1 + \frac{2}{b}\right), N\left(a-1; 1 - \frac{2}{a}\right)$.

Khi đó: $MN = \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)^2} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right) + \left(2ab + \frac{8}{ab}\right) + \left(b^2 + \frac{4}{b^2}\right)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các cặp số dương:

$a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}} = 4$. Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a^2 = \frac{4}{a^2} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{a} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$.

$b^2 + \frac{4}{b^2} \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{4}{b^2}} = 4$. Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} b^2 = \frac{4}{b^2} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{b} \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \sqrt{2}$.

$$2ab + \frac{8}{ab} \geq 2\sqrt{2ab \cdot \frac{8}{ab}} = 8. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 2ab = \frac{8}{ab} \Leftrightarrow ab = 2. \\ a, b > 0 \end{cases}$$

Vậy $MN \geq \sqrt{4+4+8} = 4$. Tức là $\text{Min } MN = 4$ khi $a = b = \sqrt{2}$.

Câu 37. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC và vuông góc với (SCD) , cắt SD tại E . Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $D.ACE$, biết $V = 5V_1$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$

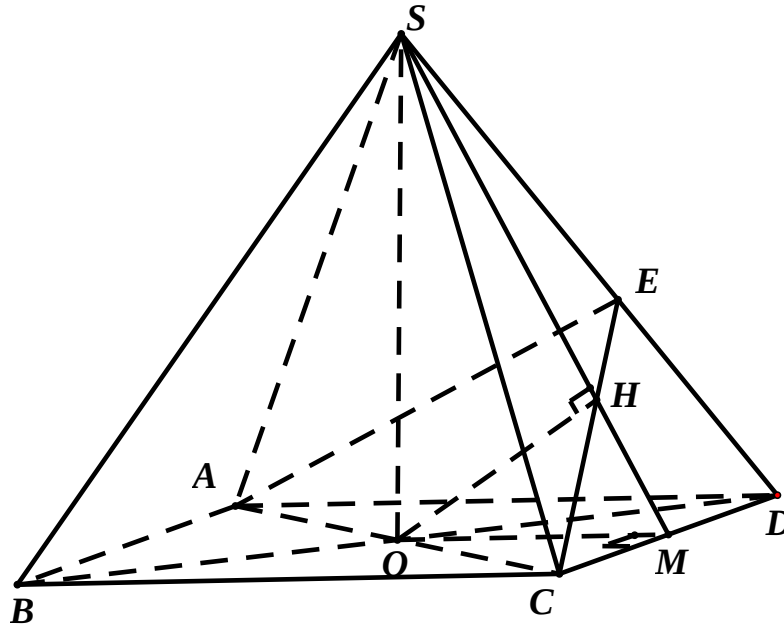
A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Lời giải



Lấy M trung điểm CD ; O là tâm đáy. Hạ $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow (P) \equiv (HAC)$

$$\Rightarrow E = CH \cap SD$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{E.ACD}}{V_{S.ACD}} = \frac{ED}{SD} \Rightarrow V_{E.ACD} = \frac{ED}{SD} V_{S.ACD} = \frac{ED}{2SD} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{ED}{2SD} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Đặt } CD = 2a; ED = 2x \Rightarrow SD = 5x$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SD \perp AC \\ SD \perp OH \end{cases} \Rightarrow SD \perp (ACE) \Rightarrow SD \perp CE$$

$$\Rightarrow SM \cdot CD = CE \cdot SD \Leftrightarrow \sqrt{25x^2 - a^2} \cdot 2a = \sqrt{4a^2 - 4x^2} \cdot 5x$$

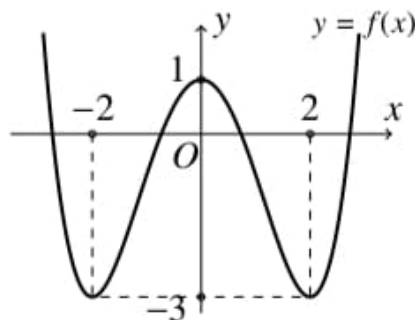
$$\Leftrightarrow 4a^2 (25x^2 - a^2) = (4a^2 - 4x^2) \cdot 25x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow SM = 2a; OM = a$$

$$\Rightarrow \cos((SCD), (ABCD)) = \cos SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{1}{2}$$

Câu 38. Cho hàm số trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$
 có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



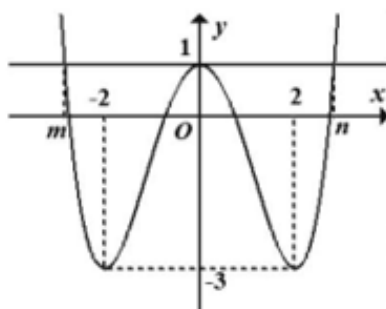
A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải



$$\text{Ta có } [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases}.$$

Phương trình $f(x) = 1$ có nghiệm $x = 0, x = m, x = n$ trong đó $x = 0$ là nghiệm kép và $m \neq n$.

$$\text{Do đó } f(x) - 1 = ax^2(x - m)(x - n).$$

Phương trình $f(x) = -3$ có 2 nghiệm kép $x = 2, x = -2$.

$$\text{Do đó } f(x) + 3 = a(x - 2)^2(x + 2)^2.$$

$$\text{Vì vậy } [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = a^2x^2(x - m)(x - n)(x - 2)^2(x + 2)^2.$$

$$\text{Khi đó ta được hàm số } y = \frac{x(x - 2)(x + 2)^2}{a^2x^2(x - m)(x - n)(x - 2)^2(x + 2)^2} = \frac{1}{a^2x(x - m)(x - n)(x - 2)}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 tiệm cận đứng.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x \int_0^2 |f(x)| dx = x^3 - f(x)$ và $f(1) > -3$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. 33.

B. 15.

C. 21.

D. 39.

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \int_0^2 |f(x)| dx \Rightarrow f(x) = x^3 - ax, F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} + C$$

$$f(1) = 1 - a > -3 \Rightarrow (0 \leq a < 4)$$

$$\begin{aligned} a &= \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^{\sqrt{a}} |f(x)| dx + \int_{\sqrt{a}}^2 |f(x)| dx \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} -f(x) dx + \int_{\sqrt{a}}^2 f(x) dx = F(0) + F(2) - 2F(\sqrt{a}) = 4 - 2a + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} - 3a + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4(l) \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 2x. \text{ Vậy } f(3) = 21$$

Câu 40. Cho phương trình $\sin^{2020} x + \cos^{2020} x = 2(\sin^{2022} x + \cos^{2022} x)$. Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2022)$ bằng

A. $\left(\frac{1287}{2}\right)^2 \pi$ **B.** $(643)^2 \pi$ **C.** $\left(\frac{1287}{4}\right)^2 \pi$ **D.** $(644)^2 \pi$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin^{2020} x + \cos^{2020} x = 2(\sin^{2022} x + \cos^{2022} x) \Leftrightarrow \sin^{2020} x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^{2020} x(1 - 2\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^{2020} x - \cos^{2020} x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \tan^{2020} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

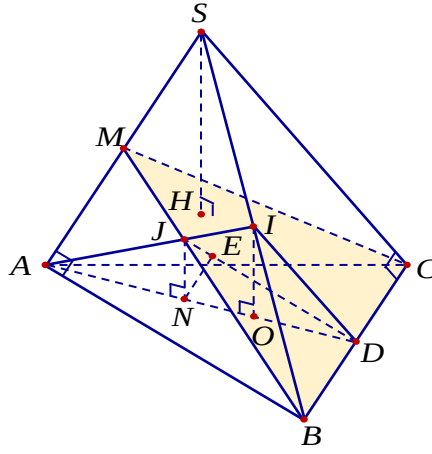
$$\text{Để } x \in (0; 2022) \text{ thì } k \in \{0; 1; 2; \dots; 1286\}$$

$$\text{Khi đó tổng các nghiệm bằng } \frac{\pi}{4} \cdot 1287 + \frac{\pi}{2}(1 + 2 + \dots + 1286) = \left(\frac{1287}{2}\right)^2 \pi$$

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SA , $\angle SAB = \angle SCB = 90^\circ$, biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

A. $\frac{10a}{3}$. **B.** $\frac{5a}{3}$. **C.** $\frac{8a}{3}$. **D.** $\frac{7a}{3}$.

Lời giải



Vì $\angle SAB = \angle SCB = 90^\circ \Rightarrow S, A, B, C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB .

Gọi D là trung điểm BC , I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, ta có $OI \perp (ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH \perp (ABC)$ (vì OI là đường trung bình $\triangle SHB$).

Gọi $BM \cap AI = J$, ta có J trọng tâm $\triangle SAB$.

Trong $\triangle AID$, kẻ $JN \parallel IO$. Khi đó, vì $BC \perp (JND)$ nên $(JND) \perp (MBC)$.

Kẻ $NE \perp JD$, ta có $NE \perp (MBC)$. Do đó $d(N; (MBC)) = NE$.

$$\text{Ta có } \frac{d(A, (MBC))}{d(N, (MBC))} = \frac{AD}{ND} = \frac{AD}{AD - AN} = \frac{AD}{AD - \frac{2}{3}AO} = \frac{AD}{AD - \frac{4}{9}AD} = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Suy ra, } d(N, (MBC)) = \frac{5}{9}d(A, (MBC)) = \frac{10a}{3\sqrt{21}}.$$

$$\text{Xét } \triangle JND \text{ có } \frac{1}{NE^2} = \frac{1}{ND^2} + \frac{1}{NJ^2}, \quad NE = \frac{10a}{3\sqrt{21}}, \quad ND = \frac{5}{9}AD = \frac{5a\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{nên } NJ = \frac{10a}{9} \Rightarrow OI = \frac{3}{2}NJ = \frac{5a}{3} \Rightarrow SH = \frac{10a}{3}.$$

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm SA , G là trọng tâm tam giác SCD , thể tích khối tứ diện $DOGM$ bằng

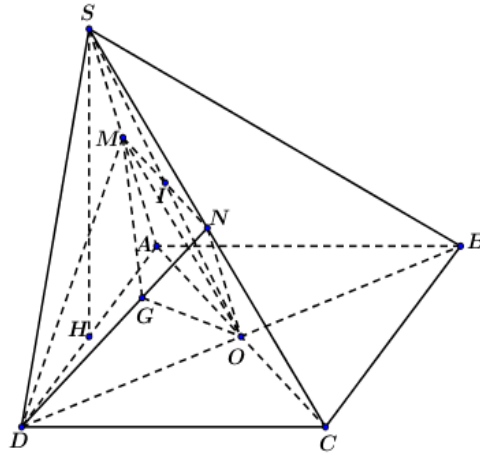
A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải



♦ Gọi H là trung điểm của AD . Do tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

♦ Gọi N là trung điểm của SC ; $I = MN \cap SO$.

Ta thấy I là trung điểm của MN và I là trung điểm của SO .

Khi đó $d(O; (DMN)) = d(S; (DMN)) \Rightarrow V_{O.DMG} = V_{S.DMG}$.

♦ Ta có $\frac{V_{S.MID}}{V_{S.AOD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SI}{SO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $\frac{V_{S.NID}}{V_{S.COD}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SI}{SO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Mà $V_{S.AOD} = V_{S.COD} = \frac{1}{2} \cdot V_{S.ADC} \Rightarrow V_{S.MND} = V_{S.MID} + V_{S.NID} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{S.ADC} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.ABCD}$

♦ Lại có $S_{S.ABCD} = AB \cdot AD = a^2 \sqrt{3}$; $SH = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Khi ấy ta được $V_{S.MND} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

♦ Mặt khác $\frac{S_{MDG}}{S_{MDN}} = \frac{DG}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.MDG} = \frac{2}{3} \cdot V_{S.MDN} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$. Vậy $V_{O.DMG} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$.

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2\log_3 t+t, t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{2}{t.\ln 3}+1>0, \forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow f(3x+3y)=f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2=3x+3y$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-3)x+y^2-3y+2=0.$$

Điều kiện của y để phương trình có nghiệm là $(y-3)^2-4(y^2-3y+2)\geq 0$

$$\Leftrightarrow -3y^2+6y+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq y\leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2\}$.

$$+ \text{ Với } y=0, \text{ ta được } x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } y=1, \text{ ta được } x^2-2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } y=2, \text{ ta được } x^2-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

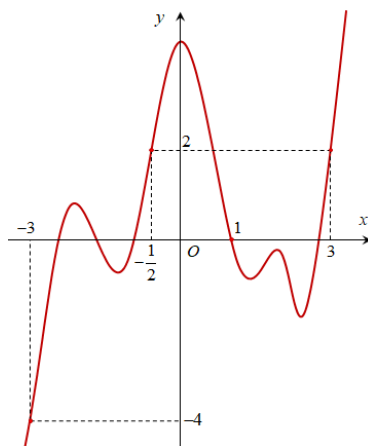
Vậy có 6 cặp số thỏa mãn đề bài.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ và cho hàm số

$$y=g(x)=\frac{x+1}{f^3(x)+3f(x)-x^3+3x^2-6x+4}.$$

Biết rằng tập xác định của hàm số $y=g(x)$ có dạng

$D=\mathbb{R}\setminus\{a;b;c\}$ với a,b,c là các số thực. Giá trị của $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-2)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $(-1;2)$.

D. $(2;6)$.

Lời giải

Điều kiện $f^3(x) + 3f(x) - x^3 + 3x^2 - 6x + 4 \neq 0$.

Ta có: $f^3(x) + 3f(x) - x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1), (1)$.

Xét hàm số $y = h(t) = t^3 + 3t$.

Ta có $h'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$. Suy ra hàm số $y = h(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow h(f(x)) = h(x-1) \Leftrightarrow f(x) = x-1$.

Đường thẳng $y = x-1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm có hoành độ là $x = -3; x = 1; x = 3$.

Suy ra phương trình $f(x) = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Do đó hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 3\}$.

Vậy $T = a + b + c = 1$.

Câu 45. Hai bạn A và B mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để các chữ số có mặt ở hai số bạn A và B viết giống nhau bằng

A. $\frac{31}{2916}$.

B. $\frac{1}{648}$.

C. $\frac{1}{108}$.

D. $\frac{25}{2916}$.

Lời giải

Mỗi bạn có $9.A_9^2$ cách viết nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = (9.A_9^2)^2$.

Ta tìm cách viết mà các chữ số các chữ số có mặt trong hai số mà bạn A và B viết giống nhau.

Bạn A có tất cả $9.A_9^2$ cách viết, trong đó A_9^3 cách viết mà số không gồm chữ số 0 và có

$(9.A_9^2 - A_9^3)$ cách viết mà số có chữ số 0.

TH1: Nếu A viết số không gồm chữ số 0 có A_9^3 cách, lúc này B có 3! cách viết.

TH2: Nếu A viết số có chữ số 0 có $(9.A_9^2 - A_9^3)$ cách, lúc này B có 4 cách viết.

Vậy có $A_9^3.3! + (9.A_9^2 - A_9^3).4$ cách viết thỏa mãn.

Xác suất cần tính bằng $\frac{A_9^3.3! + (9.A_9^2 - A_9^3).4}{(9.A_9^2)^2} = \frac{25}{2916}$

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-2021; 2021]$ sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn

$\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3(ax)$?

A. 2020

B. 2021

C. 2022

D. 2023.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+3 > 0 \\ ax > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ ax > 0 \end{cases}$.

$$\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3(ax) \Leftrightarrow \log_3(x+3)^2 = \log_3 ax \Leftrightarrow (x+3)^2 = ax \Leftrightarrow a = \frac{x^2 + 6x + 9}{x}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-3		0		3		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$					$+\infty$		$+\infty$
			0			12	
							$-\infty$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta suy ra } \begin{cases} a < 0 \\ a = 12 \end{cases} \Rightarrow a = -2021, \dots, -1, 12.$$

Vậy có 2022 giá trị a thỏa mãn.

Câu 47. Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đáy với dung tích 1000 cm^3 . Bán kính của nắp đáy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $r = 10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}.$

B. $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ cm}.$

C. $r = 10\sqrt{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}.$

D. $r = \sqrt{\frac{500}{\pi}} \text{ cm}.$

Lời giải

Gọi $r (r > 0)$ là bán kính đáy của lon sữa.

$$\text{Khi đó } V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Diện tích toàn phần của lon sữa là:

$$S(r) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$\text{Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số: } S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r > 0)$$

$$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r > 0)$

r	0	$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(r)$	-	0	+
$S(r)$			

Từ bảng biến thiên suy ra $S(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm.

Câu 48. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x, y \geq 0; z \geq -1$ và $\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y$. Khi đó

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3}$ tương ứng bằng:

A. $4\sqrt{2}$.

B. 4.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y \Leftrightarrow 1 + \log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y+1$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+2y+2}{4x+y+3} = 2x-y+1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+2y+2}{4x+y+3} = (4x+y+3) - (2x+2y+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x+2y+2) + (2x+2y+2) = \log_2 (4x+y+3) + (4x+y+3)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+2y+2) = f(4x+y+3) \Leftrightarrow 2x+2y+2 = 4x+y+3 \Leftrightarrow y = 2x+1$$

(Do hàm $f(t) = \log_2 t + t$ là đồng biến trên $(0; +\infty)$)

Thay vào biểu thức T ta được: $T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3} = \frac{(x+z+1)^2}{5x+1} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3}$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$T = \frac{(x+z+1)^2}{5x+1} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3} \geq \frac{(x+z+1+2x+3)^2}{5x+1+x+2z+3} = \frac{(3x+z+4)^2}{6x+2z+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x+z+4)^2}{3x+z+2}$$

Đặt $t = 3x+z+2 \Rightarrow T \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(t+2)^2}{t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{4}{t} + 4 \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} + 4 \right) = 4$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} y = 2x + 1 \\ t = 2 = 3x + z + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \frac{x+z+1}{5x+1} = \frac{2x+3}{x+2z+3} \end{cases}$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $T_{\min} = 4$.

Câu 49. Cho khối trụ (T) có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') . Xét hình chữ nhật $ABCD$ có hai điểm A, B cùng thuộc đường tròn (O) và hai điểm C, D cùng thuộc đường tròn (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đồng thời mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với mặt đáy của hình trụ một góc 60° . Thể tích của khối trụ (T) bằng

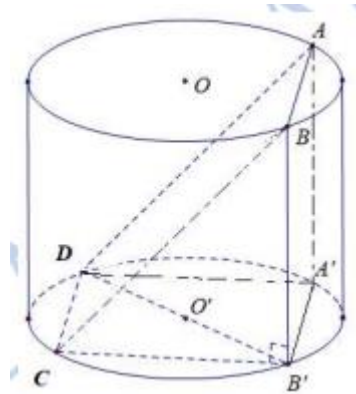
A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

B. $\pi a^3 \sqrt{3}$

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$

D. $2\pi a^3 \sqrt{3}$

Lời giải



Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên đường tròn (O') . Dễ thấy $ABB'A'$ là hình chữ nhật do đó $AB \parallel A'B'$, $AB = A'B'$

Vì $ABCD$ cũng là hình chữ nhật nên $AB \parallel CD$, $AB = CD$

Suy ra $DCB'A'$ là hình bình hành, nhưng vì nó nội tiếp đường tròn (O') nên nó là hình chữ nhật

Mặt khác $B'C'$ là hình chiếu vuông góc của BC trên $(A'B'CD)$ nên ta có:

$$\begin{cases} CD \perp B'C \\ CD \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABCD), (A'B'CD)) = (BC; B'C) = \angle BCB' = 60^\circ$$

$$\Rightarrow BB' = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3} = h; B'C = 2a \cos 60^\circ = a$$

$$\Rightarrow DB' = \sqrt{DC^2 + CB'^2} = 2a \Rightarrow r = a$$

$$\text{Vậy } V = \pi hr^2 = \pi a^3 \sqrt{3}$$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa SA và BC là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC , tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

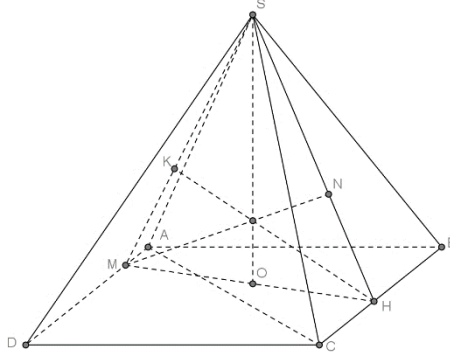
A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Dựng đường thẳng d đi qua O , vuông góc với BC và cắt BC, AD lần lượt tại H, M .

Khi đó $AD, BC \perp (SHM)$.

Trong $\triangle SHM$, dựng $HK \perp SM$ ($K \in SM$) và $MN \perp SH$ ($N \in SH$).

Ta có $MN \perp SH$ và $MN \perp BC$ nên $MN \perp (SBC)$.

Vì vậy $MN = d(M, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do $BC \parallel SAD$ nên $d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(H, (SAD)) = HK$. Suy ra $HK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do $\triangle SHM$ có hai đường cao $MN = HK$ nên cân tại S . Suy ra O là trung điểm của MH .

Ta có $MH = d(AD, BC) = d(A, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (do $\triangle ABC$ đều, cạnh bằng a). Suy ra $MO = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác đồng dạng MKH và MOS , ta có

$$\frac{KH}{SO} = \frac{MK}{MO} \Rightarrow SO = \frac{MO \cdot KH}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{15}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{15}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SO \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

---HÉT---