Đề 65

Câu 1. (4,0 điểm)

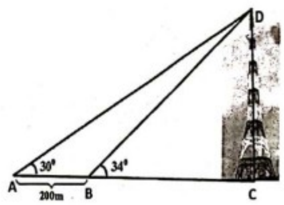
1.1) Cho biểu thức $P=\frac{2x+4\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x-3}}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2$ với $x\geq 0, x\neq 1$. Tìm tất cả các số tự nhiên x để P là số tự nhiên.

1.2) Một cửa hàng quần áo nhập một cái áo khoác lông cừu với giá 60 đô la. Cửa hàng ước tính rằng nếu một cái áo khoác lông cừu được bán với giá x đô la thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $140-x$ cái. Hỏi cửa hàng bán một cái áo lông cừu giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất.

Câu 2. (4,0 điểm)

2.1) Cho các hàm số bậc nhất: $y=\frac{1}{2}x-3, y=4-x$ và $y=\frac{m}{6}x-4$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và (d_m). Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (d_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm và điểm B có hoành độ dương

2.2) Tính chiều cao của một tháp truyền hình (kết quả làm tròn đến m), biết tại hai điểm A, B cách nhau $200\,m$, người ta nhìn thấy đỉnh của tháp với góc nâng lần lượt là $30°$ và $34°$ *(theo hình vẽ minh họa ở bên).* Cho biết



$\sin 34° \approx 0,56, \cos 34° \approx 0,83, \tan 34° \approx 0,67, \tan 30° \approx 0,58$.

Câu 3. (4,0 điểm)

3.1) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60°$, tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D . Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$.

3.2) Số nhà bạn Bình là số nguyên tố gồm hai chữ số $\overline{ab}$, biết $\overline{ab}=a^2+b^2+3$. Tìm số nhà bạn Bình?

Câu 4. (4,0 điểm)

4.1) Cho x, y, z , , là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng $(x-y)^3+(y+z)^3+(z-x)^3$ chia hết cho $(x-y)(y-z)(z-x)$.

4.2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(x+y)^2+y-2=2x^2 \\ x^2+y^2+xy+1=2y \end{cases}$.

Câu 5.(4,0 điểm)

5.1) Cho điểm M tuỳ ý nằm miền trong của tam giác ABC . Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự là m, n, p và các đường cao hạ từ đỉnh A, B, C theo thứ tự là h_a, h_b, h_c.

Chứng minh rằng $\frac{h_a}{m}+\frac{h_b}{n}+\frac{h_c}{p}\geq 9$.

5.2) Cho đa thức $f(x)=x^2+mx+n$ với $m, n \in Z$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $f(k)=f(2021).f(2022)$.

---Hết---

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,0 điểm)

1.1)

Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$P=\frac{2x+4\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2$$

$$¿\frac{2x+4\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\frac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}-\frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$¿\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Vì $x \in N$ *nên* $\sqrt{x}-1$ *là số nguyên hoặc số vô tỉ.*

Do đó để P *là số tự nhiên thì* $\sqrt{x}-1$ *là ước nguyên của* 2 *và* $1+\frac{2}{\sqrt{x}-1} \geq 0$ (¿), $x \in N$

Lại có $\sqrt{x}-1 \in Ư(2)$ khi và chỉ khi $\sqrt{x}-1 \in \{1;-1;2;-2\}$

$\Rightarrow x \in \{4;0;9\}$, *kết hợp với ĐK* $(*)$ *và ĐKXĐ ta được* $x \in \{4;9\}$ *thì* P *là số tự nhiên.*

1.2)

Lãi thu được: $(x-60)(140-x)$ (đô la).

Ta có $A=(x-60)(140-x)=-x^2+200x-8400=1600-(x^2-200x+10000)$

$¿1600-(x-100)^2$

Do đó Max $A=1600$ *khi* $x=100$.

Vậy cửa hàng bán một cái áo lông cừu giá 100 đô la thì thu được nhiều lãi nhất.

Câu 2. (4,0 điểm)

2.1)

ĐK HSBN: $m \neq 0$

Do (d_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) nên $m \neq 3, m \neq 6$.

PT hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_m):

$$\frac{1}{2}x-3=\frac{m}{6}x-4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{m}{6}x=3-4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{m}{6}\right)x=-1$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3-m}{6}\right)x=-1$

$\Leftrightarrow x=\frac{6}{m-3}\left(m\neq 3\right)$

PT hoành độ giao điểm của $\left(d_2\right)$ và $\left(d_m\right)$:

$4-x=\frac{m}{6}x-4 \Leftrightarrow \frac{m}{6}x+x=4+4$

$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{6}+1\right)x=8$

$\Leftrightarrow \left(\frac{m+6}{6}\right)x=8$

$x=\frac{48}{m+6}\left(m\neq -6\right)$

Theo yêu cầu của đầu bài ta có $\begin{cases}\frac{6}{m-3}<0\\ \frac{48}{m+6}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-3<0\\ m+6>0\end{cases} \Leftrightarrow -6<m<3$

Vậy với $\begin{cases}-6<m<3\\ m\neq 0\end{cases}$ thỏa mãn đề.

2.2)

Đặt BC=x

$DC=x.\tan 34°=\left(x+200\right).\tan 30°$

$\Leftrightarrow x.0,67=\left(x+200\right).0,58$

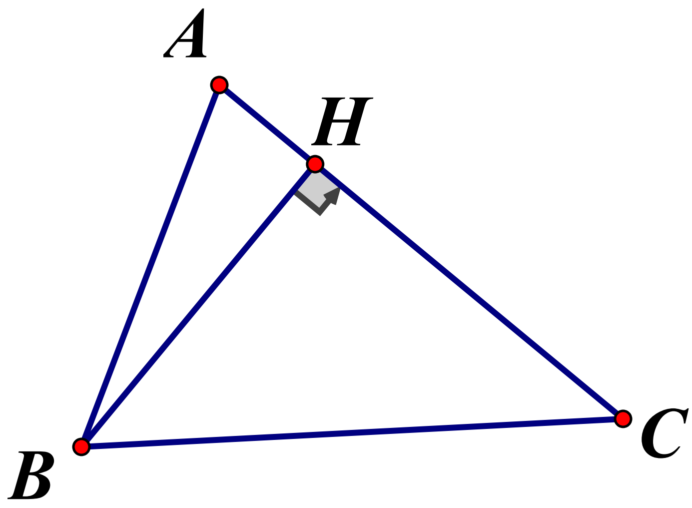
Giải pt ta được$x\approx 1289$.

$DC=x.\tan 34°=1289.\tan 34°\approx 1289.0,67864$ \(m\)

Chiều cao của tháp xấp xỉ là : 864 m

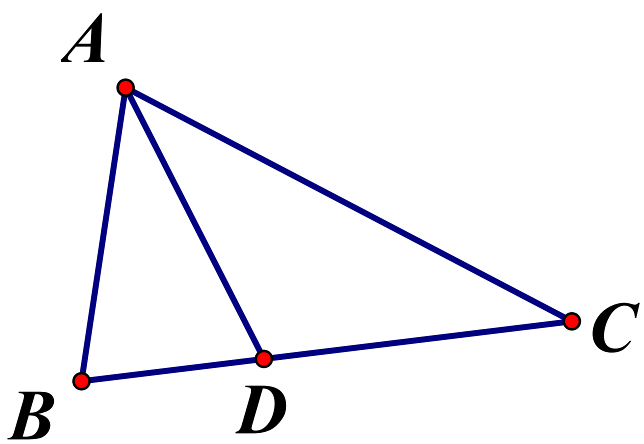
Câu 3. (4,0 điểm)

3.1)



Ta chứng minh bài toán sau: "Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}<90°$ thì $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

Thật vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}BH.AC=\frac{1}{2}\frac{BH}{AB}.AB.AC=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$.



Ta có $S_{ABD}+S_{ADC}=S_{ABC}\Rightarrow\frac{1}{2}AB.AD.\sin 30°+\frac{1}{2}AC.AD.\sin 30°=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 60°$

$\Rightarrow AB.AD.\frac{1}{2}+AC.AD.\frac{1}{2}=AB.AC.\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$.

3.2)

Do $\overline{ab}=a^2+b^2+3\Leftrightarrow 10a+b=a^2+b^2+3$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+3-10a-b=0$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+12-40a-4b=0$

$\Leftrightarrow (2a)^2-40a+10^2+(2b)^2-4b+1^2=89$

$\Leftrightarrow (2a-10)^2+(2b-1)^2=89$

Mà $89=5^2+8^2=(-5)^2+(-8)^2=5^2+(-8)^2=8^2+(-5)^2$

Lại có $2a-10$ là số nguyên chẵn $\forall a \in Z$ và $2b-1$ là số nguyên lẻ với $\forall b \in Z$ nên ta có

TH1: $\begin{cases} 2a-10=8 \\ 2b-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \overline{ab}=93$ là hợp số \(loại\).

TH2: $\begin{cases} 2a-10=-8 \\ 2b-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ \(loại do b là chữ số\).

TH3: $\begin{cases} 2a-10=-8 \\ 2b-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \overline{ab}=13$ là số nguyên tố \(thỏa mãn\).

TH2: $\begin{cases} 2a-10=8 \\ 2b-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-2 \end{cases}$ \(loại do b là chữ số\).

Vậy số cần tìm là 13.

Câu 4. (4,0 điểm)

4.1)

Ta chứng minh bài toán phụ: nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Ta có $a+b+c=0$

$\Rightarrow (a+b+c)^3=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3a^2c+3ac^2+6abc=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+(3a^2b+3ab^2+3abc)+(3b^2c+3bc^2+3abc)+(3a^2c+3ac^2+3abc)-3abc=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3ab(a+b+c)+3bc(a+b+c)+3ac(a+b+c)=3abc$

Do $a+b+c=0$

$\Rightarrow (a+b+c)^3=3abc$

Đặt $a=x-y, b=y-z, c=z-x$ suy ra $a+b+c=0$

Áp dụng bài toán phụ trên ta được: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$

$\Rightarrow (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ chia hết cho $(x-y)(y-z)(z-x)$ với x, y, z là các số nguyên đôi một khác nhau .

4.2)

$\begin{cases} y(x+y)^2+y-2=2x^2 \\ x^2+y^2+xy+1=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y)^2+y-2-2x^2=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y)^2+y-2(x^2+1)=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y)^2+y-2(2y-y^2+xy)=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left[(x+y)^2+1-2(2-y-x)\right]=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\left[(x+y)^2-1-2(2-y-x)\right]=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left[(x+y+1)(x+y-1)-2(-1+2-y-x)\right]=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\left[(x+y+1)(x+y-1)+2(x+y-1)\right]=0 \\ x^2+1=2y-y^2-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y+3)(x+y-1)=0(1) \\ x^2+1=2y-y^2-xy(2) \end{cases}$

Giải (1) $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ x+y+3=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right.$

+ Nếu $y=0$ thay vào (2) ta được $x^2+1=0$ (loại do $x^2+1>0\,\forall x$).

+ Nếu $x+y+3=0 \Rightarrow x=-3-y$thế vào (2) ta được $(-3-y)^2+1=2z-y^2-(-3-y)y$

$\Leftrightarrow y^2+6y+9+1=2y-y^2+3y+y^2$

$\Leftrightarrow y^2+y+10=0$

$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2+9\frac{3}{4}=0$ (vô nghiệm).

+ Nếu $x+y-1=0 \Rightarrow x=1-y$ thế vào (2) ta được $(1-y)^2+1=2y-y^2-(1-y)y$

$\Leftrightarrow y^2-2y+2=2y-y^2+3y+y^2$

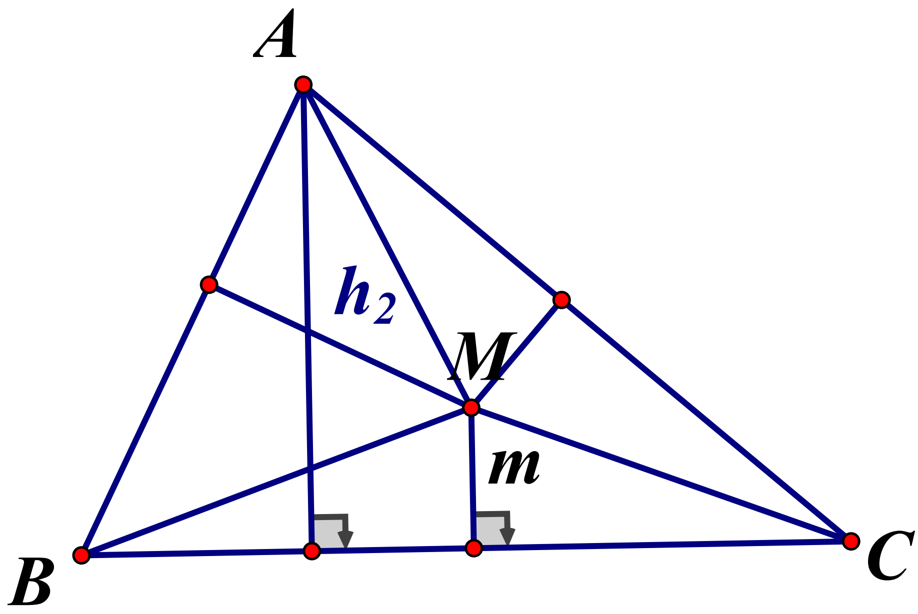
$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right.$

Từ đó ta có nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(0;1);(-1;-2)\}$.

Câu 5. (4,0 điểm)

5.1)



Gọi $S_{MBC}=S_1, S_{MAC}=S_2, S_{MAB}=S_3, S_{ABC}=S$. Khi đó $S_1+S_2+S_3=S$ và $S_1, S_2, S_3, S>0$.

Ta có $\frac{S_1}{S}=\frac{m}{h_a}; \frac{S_2}{S}=\frac{n}{h_b}; \frac{S_3}{S}=\frac{p}{h_c}$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\ \forall a,b,c>0$ ta được

$$\left(\frac{m}{h_a}+\frac{n}{h_b}+\frac{p}{h_c}\right)\left(\frac{h_a}{m}+\frac{h_b}{n}+\frac{h_c}{p}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow\left(\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}\right)\left(\frac{h_a}{m}+\frac{h_b}{n}+\frac{h_c}{p}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow\left(\frac{S_1+S_2+S_3}{S}\right)\left(\frac{h_a}{m}+\frac{h_b}{n}+\frac{h_c}{p}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow\frac{h_a}{m}+\frac{h_b}{n}+\frac{h_c}{p}\geq 9.$$

5.2)

Do $f(x)=x^2+mx+n$ nên

$f(a).f(a+1)=f(a)\left[(a+1)^2+m(a+1)+n\right]$

¿$f(a)(a^2+2a+1+ma+m+n)$

¿$f(a)[f(a)+2a+1+m]$

¿$f^2(a)+2a.f(a)+f(a)+m.f(a)=f^2(a)+2a.f(a)+(a^2+ma+n)+m.f(a)$

¿$f^2(a)+2a.f(a)+a^2+m(f(a)+a)+n$

¿$[f(a)+a]^2+m(f(a)+a)+n=f(f(a)+a)$

Do đó $f(2021).f(2022)=f(f(2021)+2021)=f(k)$ với $k=f(2021)+2021\in Z$ với $\forall\ m,n\ \in Z$
.

Vậy luôn tồn tại số nguyên k thoả mãn đề.

---Hết---