[2]

DÙNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

I. Dùng các hệ thức lượng giác cơ bản

$$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x};\ 1+cotg\ ^2x=\frac{1}{\sin^2 x};\ \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Vào bài toán có các biểu thức dạng $x^2+a^2,\ \sqrt{x^2\pm a^2},\ \sqrt{a^2-x^2}$

1. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b

a) $\left|\dfrac{(a^2-b^2)(1-a^2b^2)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{4};$

b) $\left|\dfrac{2(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right|\leqslant 1;$

HD: Đặt $a=tg\alpha,\ b=tg\beta;\ \alpha,\beta\in\Big(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Khi đó

$$\left|\frac{(a^2-b^2)(1-a^2b^2)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2}\right|=|\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{4}\sin[2(\alpha+\beta)]\sin[2(\alpha-\beta)]\leqslant\frac{1}{4}$$

2. Chứng minh rằng nếu $|x|<1$ và $2\leqslant n\in\mathbb{N}$, thì

$$(1+x)^n+(1-x)^n<2^n.$$

HD: Đặt $x=\cos\alpha,\ \alpha\in(0;\pi)$. Khi đó

$$(1+x)^n+(1-x)^n=(1+\cos\alpha)^n+(1-\cos\alpha)^n=2^n(\cos^n\tfrac{\alpha}{2})+\sin^n\tfrac{\alpha}{2})$$

$$<2^n(\cos^2\tfrac{\alpha}{2}+\sin^2\tfrac{\alpha}{2})=2^n$$

3. (Latvia-2002) Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Chứng minh rằng $abcd\geqslant 3$.

[2]**Nguyễn Văn Nhiệm**

HD: Đặt $a^2 = tg\alpha, b^2 = tg\beta, c^2 = tg\gamma, d^2 = tg\delta$, với $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0; \frac{\pi}{2})$.
Thì từ giả thiết ta có

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình cộng, ta có:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta \geqslant 3\sqrt[3]{(\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta)^2}.$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\sin^2\beta \geqslant 3\sqrt[3]{(\cos^2\alpha\cos^2\gamma\cos^2\delta)^2}; \qquad \sin^2\gamma \geqslant 3\sqrt[3]{(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\delta)^2};$$

$$\sin^2\delta \geqslant 3\sqrt[3]{(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)^2}.$$

Nhân từng vế các bất đẳng thức trên, suy ra điều phải chứng minh.

4. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) = 16.$$

Chứng minh rằng: $-3 \leqslant ab + +ac + ad + bc + bd + cd - abcd \leqslant 5$.

HD: Đặt $a = tg\alpha, b = tg\beta, c = tg\gamma, d = tg\delta$, với $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

$$P = ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1$$

$$\Rightarrow 4.\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta = 1$$

và $P = (b + c)(a + d) - (1 - ad)(1 - bc) = 4\sin(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \delta)$

$- 4\cos(\alpha + \delta)\cos(\beta + \gamma) = -4\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \Rightarrow$ (đpcm).

5. (APMO-2004) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geqslant 9(ab + bc + ca).$$

HD: Đặt $a = \sqrt{2}tg\alpha,\ b = \sqrt{2}tg\beta,\ c = \sqrt{2}tg\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma \in (0; \frac{\pi}{2})$.
Điều phải chứng minh tương đương với

$$\frac{4}{9} \geqslant \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma))$$

Đăt $\lambda = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức $\dfrac{\cos x + \cos y}{2} \leqslant \cos\dfrac{x + y}{2}$ với $x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$, ta có

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \Big(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\Big)^3 \leqslant \cos^3\lambda.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{4}{9} \geqslant \cos^3\lambda(\cos^3\lambda - \cos 3\lambda).(3)$$

mà $\cos 3\lambda = 4\cos^3\lambda - 3\cos\lambda$ do đó (3) $\Leftrightarrow \dfrac{4}{27} \geqslant \cos^4\lambda(1-\cos^2\lambda)$.
Mặt khác theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\Big(\frac{\cos^2\lambda}{2}\cdot\frac{\cos^2\lambda}{2}\cdot(1-\cos^2\lambda)\Big)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{1}{3}\Big(\frac{\cos^2\lambda}{2}+\frac{\cos^2\lambda}{2}+(1-\cos^2\lambda)\Big) = \frac{1}{3}.$$

II. Bất đẳng thức có điều kiện ràng buộc dạng

$$a+b+c = abc,\quad ab+bc+ca = 1$$

1. Tìm mối quan hệ đại số giữa x, y, z trong các trường hợp sau biết rằng:

a) $tgx.tgy + tgy.tgz + \ tgz.tg\ x \ = \ 1.$

ĐS: $x+y+z = \dfrac{\pi}{2}+k\pi, \quad x, y, z \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

b) $tgx + tgy + tgz = tgx.tgy.tgz.$

ĐS: $x+y+z = k\pi, \quad x, y, z \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

2. Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy+yz+zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx = 1$. Cmr:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \geqslant \frac{2x(1-x^2)}{(1+x)^2}+\frac{2y(1-y^2)}{(1+y)^2}+\frac{2z(1-z^2)}{(1+z)^2}$$

HD: Đặt $a = tg\alpha,\ b = tg\beta,\ c = tg\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma \in (0; \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow 2\alpha+2\beta+2\gamma = \pi.$
Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \geqslant (\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma).$$

4. (HKong-94) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx = 1$. Cmr

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2) \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

HD: Đặt $a = tg\alpha,\ b = tg\beta,\ c = tg\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma \in (0; \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi.$

$$2.VT = \frac{\sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma + \sin 2\beta \cos 2\alpha \cos 2\gamma + \sin 2\gamma \cos 2\alpha \cos 2\beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}$$

$$= \frac{\sin(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma} = 8tg\alpha tg\beta tg\gamma \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Cmr:

$$xy + yz + zx \geqslant 3 + \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + z^2}.$$

HD: Đặt $a = tg\alpha,\ b = tg\beta,\ c = tg\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma \in (0; \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi.$

Ta có $VT = xy + yz + zx = \dfrac{\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$

$= \dfrac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = 1 + \dfrac{1}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$

VP = $3 + \dfrac{1}{\cos \alpha} + \dfrac{1}{\cos \beta} + \dfrac{1}{\cos \gamma}$. Vậy bài toán tương đương với

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leqslant 1.$$

Bất đẳng thức trên được suy ra từ hệ thức

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

III. Bất đẳng thức chứa ràng buộc dạng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$$

1. Tìm mối quan hệ đại số giữa x, y, z trong các trường hợp sau. Biết các số dương x, y, z thuộc đoạn $[0; \dfrac{\pi}{2}]$ thỏa mãn:
$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 1. \qquad (1)$
HD: $(1) \Leftrightarrow 4 \cos \dfrac{x + y + z}{2} \cos \dfrac{x + y - z}{2} \cos \dfrac{x - y + z}{2} \cos \dfrac{x - y - z}{2} = 0.$
Từ đó suy ra $x + y + z = \pi$.

2. Chứng minh rằng:

a) $\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z - \cos x\sin y\sin z - \cos y\sin x\sin z - \cos z\sin x\sin y.$

b) $\sin(x+y+z) = \sin x\cos y\cos z + \sin y\cos x\cos z + \sin z\cos x\cos y - \sin x\sin y\sin z.$

3. (USA-2001) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Chứng minh rằng: $\quad 0 \leqslant ab + bc + ca - abc \leqslant 2.$

HD: • Nếu $a, b, c > 1$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$. Mâu thuẫn.

• Nếu $a \leqslant 1$ thì $ab + bc + ca - abc \geqslant bc(1-a) \geqslant 0$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $ab+bc+ca-abc \leqslant 2$. Đặt $a = 2p, b = 2q, c = 2r$, ta được $p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$. Suy ra $a = 2\cos\alpha, b = 2\cos\beta, c = 2\cos\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$ và $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Điều phải chứng minh tương đương với

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{2}.$$

Không mất tổng quát giả sử $\frac{\pi}{2} \geqslant \alpha \geqslant \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 - 2\cos\alpha \geqslant 0$ và sử dụng kết quả $\cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2} - \cos\alpha,\ 2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma) \leqslant 1 - \cos\alpha.$
Ta có $\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$= \cos\alpha(\cos\beta + \cos\gamma) + \cos\beta\cos\gamma(1 - 2\cos\alpha)$$

$$\leqslant \cos\alpha(\frac{3}{2} - \cos\alpha) + \left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)(1 - 2\cos\alpha) = \frac{1}{2}.$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương cho trước. Tìm x, y, z dương thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c, \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc. \end{cases}$$

HD: GT $\Rightarrow \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz} = 4$. Đặt $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}},\ y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}},\ z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$
$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1 = 4$ ($\Rightarrow 0 < x_1, y_1, z_1 < 2$) $\Rightarrow \Delta_{z_1} = (4 - x_1^2)(4 - y_1^2).$

Đặt $x_1 = 2\cos A, y_1 = 2\cos B, z_1 = 2\cos C\ \left(0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow A + B + C = \pi.$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{yz}\cos A,\ b = 2\sqrt{zx}\cos B,\ c = 2\sqrt{xy}\cos C =$

$= 2(\sin A\sin B - \cos A\cos B)\sqrt{xy}$, thay vào $x + y + z = a + b + c$. Suy ra:

$$(\sqrt{x}\sin B - \sqrt{y}\sin A)^2 + (\sqrt{x}\cos B + \sqrt{y}\cos A - \sqrt{z})^2 = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{\sqrt{x}} = \frac{\sin B}{\sqrt{y}} = \frac{\sin C}{\sqrt{z}} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 A}{x} = \frac{\sin^2 b}{y} = \frac{\sin^2 C}{z} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{a + b + c}$$

IV. Sử dụng quan đồng phôi giữa $\left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và tập số $\mathbb{R}$, bởi hàm số tgx

1. Cho 6 số thực phân biệt. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số x và y trong chúng sao cho

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 < x_2 < ... < x_6$, giả sử $x_i = tg\alpha_i$, với $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha_i < \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó

$$0 < \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} = tg(\alpha_i - \alpha_j).$$

Bởi vì 6 số dương $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, ..., \alpha_6 - \alpha_5, \pi + \alpha_1 - \alpha_6$ có tổng bằng π cho nên tồn tại một trong chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\dfrac{\pi}{6}$ và do đó tg của nó nhỏ hơn hoặc bằng $tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tổng quát. Giả sử n là số nguyên dương lớn hơn 2. Hãy xác định số dương C_n nhỏ nhất với tính chất sau: Cho n số thực khác nhau bất kì, tồn tại hai số x và y trong số chúng sao cho

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant C_n$$

ĐS: $C_n = tg\dfrac{\pi}{n}$.

Phép chọn $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = ..., \alpha_n - \alpha_{n-1} = \pi + \alpha_1 - \alpha_n = \dfrac{\pi}{n}$ chứng tỏ giá trị $C_n = tg\dfrac{\pi}{n}$ là tốt nhất.

2. Chứng minh rằng nếu $x, y, z > 0$ và $arctgx + arctgy + arctgz < \pi$ thì

$$x + y + z > xyz.$$

HD: Đặt $arctgx = \alpha,\ arctgy = \beta,\ arctgz = \gamma$. Ta có

$$x + y + z - xyz = tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha tg\beta tg\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} > 0$$

do $0 < \alpha + \beta + \gamma < \pi$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}$.

III. Bài tập

1. a) Cho $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$|x(u+v) + y(u-v)| \leqslant \sqrt{2}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi x, ta có

$$\frac{5}{2} \leqslant \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1+x^2)^2} \leqslant 3.$$

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Cmr

a) (Korea-1998) $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

b) $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3. a) Gọi $f(x;y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$. Chứng minh rằng:

$$f(x;y) + f(y;z) \geqslant f(x;z),\ \forall x, y, z.$$

HD: Đặt $x = tg\alpha,\ y = tg\beta,\ z = tg\gamma$, và sử dụng

$$|\sin(\alpha - \gamma)| \leqslant |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)|$$

b) Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b

$$\left|\frac{(1-ab)^2 - (a+b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \leqslant 1$$

4. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant (ab+bc+ca-1)^2.$$

HD: Đặt $a = tg\alpha,\ b = tg\beta,\ c = tg\gamma$. BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma} \geqslant \Big(\frac{-\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\Big)^2.$$

5. Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(0; 1)$ sao cho $ab+bc+ca = 1$. Cmr:

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2} \geqslant \frac{3}{4}\Big(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\Big)$$

HD: Đặt $a = tg\alpha,\ b = tg\beta,\ c = tg\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma \in (0; \frac{\pi}{4})$. BĐT cần cm

$$\Leftrightarrow tg\alpha + tg\beta + tg\gamma \geqslant 3(cotg\ \gamma + cotg\ \beta + cotg\ \gamma)$$

$$\Leftrightarrow (tg\alpha + tg\beta + tg\gamma)^2 \geqslant 3(tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\gamma tg\alpha)$$

6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$.
Chứng minh rằng:

a) $xyz \leqslant \frac{1}{8}$.

b) $xy+yz+zx \leqslant \frac{3}{4}$.

c) $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{3}{4}$.

d) $xy+yz+zx \leqslant 2xyz+\frac{1}{2}$.

e) $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{x}) \geqslant 27$.

7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$2\sqrt{ab+bc+ca} \geqslant \sqrt{3}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

HD:

Đặt $t = \sqrt{ab+bc+ca};\ a_1 = \frac{a}{t},\ b_1 = \frac{b}{t},\ c_1 = \frac{c}{t}$. Suy ra $a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1 = 1$.

Ta cần chứng minh: $\sqrt{3}\sqrt[3]{(a_1+b_1)(b_1+c_1)(c_1+a_1)} \geqslant 2$. Từ giả thiết

$a_1b_1 + b_1c_1 + \ c_1a_1 \ = \ 1$, suy ra tồn tại A, B, C là ba góc của tam giác nhọn sao cho; $a_1 = tg\dfrac{A}{2},\ b_1 = tg\dfrac{B}{2},\ c_1 = tg\dfrac{C}{2}$

Ta có $a_1 + b_1 = \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B}{2}}$, tương tự và thay vào bất đẳng thức cần chứng minh sẽ tương đương với

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ (đúng)}$$

Chú ý. Nếu dùng bất đẳng thức Bunhiacốpki mở rộng thì có thể chứng minh như sau:

Ta có $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 = (a^2+2ab+b^2)(b^2+2bc+c^2)(c^2+2ca+a^2)$.

Đặt $\begin{cases} x_1 = a^2,\ y_1 = 2ab,\ z_1 = b^2\ , \\ x_2 = c^2,\ y_2 = b^2,\ z_2 = 2bc, \\ x_3 = 2ac,\ y_3 = a^2,\ z_3 = c^2, \end{cases}$ thì

$(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3) \leqslant (\sqrt[3]{x_1x_2x_3}+\sqrt[3]{y_1y_2y_3}+\sqrt[3]{z_1z_2z_3})^3 \Rightarrow$ (đpcm)

8. Cho $a, b, c > 0; ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

a) $2\Big(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\Big) + \dfrac{1-b^2}{1+b^2} + \dfrac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \dfrac{9}{8}$.

b) $3\Big(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\Big) + 2\Big(\dfrac{1-b^2}{1+b^2}\Big) + 2\Big(\dfrac{1-c^2}{1+c^2}\Big) \leqslant \dfrac{11}{3}$.

9. Cho $a, b, c > 0; ab + bc + ca = 1\ \ a + b + c + abc > 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

HD: GT$\Rightarrow$ tồn tại các góc A, B, C của tam giác ABC sao cho $tg\dfrac{A}{2} \ = \ a$, $tg\dfrac{B}{2} = b,\ tg\dfrac{C}{2} = c$. Cũng từ giả thiết suy ra $(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 0 \Rightarrow$ $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\dfrac{1-b^2}{1+b^2}\cdot\dfrac{1-c^2}{1+c^2} = \cos A\cos B\cos C \leqslant 0 \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \ \leqslant\ \sqrt{2}$

10. Giả sử $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x)$$

nếu x, y, z là các số dương thay đổi thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$.

Chú ý. Nếu bỏ giả thiết $x, y, z > 0$ thì giá trị biểu thức xác định không duy nhất.

11 a) Cmr, trong số 7 số thực $x_1, x_2, ..., x_7$, tồn tại hai số x_i và x_j, sao cho

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Cho 4 số dương. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được 2 số $a_i, a_j,\ i \neq j$ sao cho

$$0 \leqslant \frac{a_i - a_j}{2 + a_i + a_j + a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}$$

HD: Đặt $b_i = 1 + a_i > 1$ và xét 4 số b_i, với chú ý $tg\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

12. Với những giá trị nào của a hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy(2x^2 - a^2) = 2005. \end{cases}$$

13. Xét $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho: $\sqrt{1 - x^2}|ax + b| \leqslant 1, \forall |x| \leqslant 1$.

Xác định $\max|a|$; $\max|b|$; $\max|a + b|$; $\max|ax + b|$.

HD: Đặt $x = \sin t; t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos t \geqslant 0$. GT$\Rightarrow \begin{cases} |\cos t(a\sin t + b)| \leqslant 1, \\ |\cos t(a\sin t - b)| \leqslant 1. \end{cases}$

$\Rightarrow 2 \geqslant \cos t(|a\sin t + b| + |a\sin t - b|) \geqslant 2\cos t|a||\sin t|$.

Cho $t = \dfrac{\pi}{4}$, suy ra $|a| \leqslant 2 \Rightarrow \max|a| = 2$ khi $b = 0$.

Ở giả thiết cho $x = 0 \Rightarrow |b| \leqslant 1 \Rightarrow \max|b| = 1$ khi $a = 0$.

Cho $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ta được $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\dfrac{a}{\sqrt{2}} + b| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}|\dfrac{-a}{\sqrt{2}} + b| \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow |a| + \sqrt{2}|b| \leqslant 2$

$\Rightarrow |a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant |a| + \sqrt{2}|b| \leqslant 2 \Rightarrow \max|a + b| = 2$, khi $a = 2, b = 0$.

$\max|ax + b| = \max\{|a + b|; |a - b|\} = |a| + |b| \leqslant 2$

$\Rightarrow \max|ax + b| = 2$, khi $a = 2, b = 0, x = 1$.

14. Xét $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho: $\sqrt{1 - x^2}|ax^2 + bx + c| \leqslant 1, \forall |x| \leqslant 1$.

a) Xác định $\max|a|,\ \max|b|,\ \max|c|,\ \max|a+b+c|$.

b) Xác định $\max|ax^2+bx+c|,\ \ \max|2ax+b|$, với $|x|\leqslant 1$.

HD:

Cho $x=0 \Rightarrow |c|\leqslant 1 \Rightarrow \max|c|=1$, khi khi $a=b=0$.

$\forall|x|\leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x^2}|ax^2+bx+c|\leqslant 1,\\ \sqrt{1-x^2}|ax^2-bx+c|\leqslant 1.\end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}(|ax^2+c|+|bx|)\leqslant 1\ (*)$

Từ (*)$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}|ax^2+c|\leqslant 1$. cho $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\dfrac{3a}{4}+c|\leqslant 2$

$\Rightarrow |\dfrac{3a}{4}|\leqslant 2+|c|\leqslant 3 \Rightarrow |a|\leqslant 4 \Rightarrow \max|a|=4$, khi $b=0, c=-1$.

Trong (*) thay $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta được $|\dfrac{3a}{4}|+\dfrac{\sqrt{3}}{4}|b|\leqslant 2$ (1) $\Rightarrow |\dfrac{3a}{4}|+\dfrac{\sqrt{3}}{2}|b|\leqslant 2+|c|\leqslant 3$.

Suy ra $\dfrac{1}{4}|a|+\dfrac{\sqrt{3}}{6}|b|\leqslant 1$ (2), từ (1) và (2) cộng lại ta được

$3\geqslant |\dfrac{3a}{4}+c|+\dfrac{\sqrt{3}}{2}|b|+\dfrac{1}{4}|a|+\dfrac{\sqrt{3}}{6}|b|\geqslant |\dfrac{3a}{4}+c+\dfrac{1}{4}a+b|+\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1\Big)|b|.$

$\geqslant |a+b+c| \Rightarrow \max|a+b+c|=3$, xảy ra chẳng hạn khi $a=4, b=0, c=-1$.

$\max|2ax+b|=\max\{|2a+b|,|2a-b|\}=2|a|+|b|$. Mặt khác từ (2) suy ra $2|a|+\dfrac{4\sqrt{3}}{2}|b|\leqslant 8 \Rightarrow 2|a|+|b|\leqslant 8 \Rightarrow \max|2ax+b|=8$, xảy ra chẳng hạn khi $a=4, b=0, c=-1, x=1$.