**ĐỀ SỐ 30**

**(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Gia Lai 2023-2024)**

*Thời gian làm bài : 150 phút*

**Câu 1** *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng:$\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{k^{2}}+\frac{1}{(k+1)^{2}}}=1+\frac{1}{k(k+1)} \left(Với k>0\right).$

Từ đó hãy tính giá trị biểu thức:

*S* =$\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}}$ + $\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}}$ +…+ $\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2022^{2}}+\frac{1}{2023^{2}}}$ +$\frac{1}{2023}$

 b) Tìm tất cả các cặp số (*x;y)* nguyên thỏa mãn:

$x^{2}$- *xy +x + y + 5 = 0*

**Câu 2** *(4,0 điểm).*

a) Cho hàm số  *y = (*$m^{2}-m+2)x+2m-8 $ có đồ thị là đường thẳng *d* . Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đường thẳng *d* cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại *A* và *B* sao cho diện tích  tam giác *OAB* bằng 2 ( với *O* là gốc tọa độ ).

b) Cho hai vòi nước chảy vào 1 bồn nước. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 3  giờ rồi dừng lại, sau đó cho vòi thứ hai chảy tiếp vào trong 8 giờ nữa thì đầy bồn. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 1 giờ rồi cho cả 2 vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước đã chảy  vào bằng $\frac{8}{9}$ bồn. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu nước sẽ đầy bồn đó ?

**Câu 3** *(2,0 điểm).*

Cho x = 1+$\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ . Chứng tỏ $x^{3}-3x^{2}-6x+21$ là số chia hết cho 5 .

**Câu 4** *(5,0 điểm).*

Cho đường tròn (*O)* đường kính *BC*= 2R và điểm *A* thay đổi trên (*O)* (điểm *A* không trùng  với *B,C* ). Đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC* cắt đường tròn (*O)* tại *K* . Hạ *AH* vuông  góc với *BC* .

a) Chứng minh rằng khi *A* thay đổi, tổng $AH^{2}+ KH^{2}$ luôn không đổi. Tính góc *B* của tam  giác *ABC biết AH =* $\frac{\sqrt{3}}{2}R.$

 b) Đặt *AH* = $x$ . Tìm *x* sao cho diện tích tam giác *OAH* đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 5** *(2,0 điểm).*

Cho ∆*ABC* vuông tại *A* biết *AB* = 3, AC = 4 và *AH* là đường cao. Gọi *I* $\in $ *AB* sao cho  *AI* = 2BI , *CI* cắt *AH* tại *E* . Tính CE.

**Câu 6** *(2,0 điểm).*

Cho *a,b,c* là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$\sqrt{\frac{(a^{2}+bc)(b+c)}{a(b^{2}+c^{2})}}$ +$\sqrt{\frac{(b^{2}+ca)(c+a)}{b(c^{2}+a^{2})}}$ +$\sqrt{\frac{(c^{2}+ab)(a+b)}{c(a^{2}+b^{2})}}$ $\geq 3\sqrt{2}$.

#### ĐỀ SỐ 9

**(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Gia Lai 2023-2024)**

Câu 1 (5,0 điểm).

1. $\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{k^{2}}+\frac{1}{(k+1)^{2}}}$ = $\sqrt{\frac{k^{2}(k+1)^{2}+\left(k+1\right)^{2}+k^{2}}{k^{2}(k+1)^{2}}}$

=$\sqrt{\frac{k^{4}+2k^{3}+k^{2}+k^{2}+2k+1+k^{2}}{k^{2}(k+1)^{2}}}$ =$\sqrt{\frac{k^{4}+2k^{3}+k^{2}+k^{2}+2k+1}{k^{2}(k+1)^{2}}}$

=$\sqrt{\frac{(k^{2}+k+1)^{2}}{k^{2}(k+1)^{2}}} $ = $\frac{k^{2}+k+1}{k(k+1)}$

=$\frac{k\left(k+1\right)+1}{k(k+1)}$ =1+$\frac{1}{k(k+1)}$ (đpcm).

Ta có:

 $\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{k^{2}}+\frac{1}{(k+1)^{2}}}$ = 1+$\frac{1}{k(k+1)}$ =1+$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Khi đó:

*S* = $\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}}$ +$\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}}$ +…+$\sqrt{\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2022^{2}}+\frac{1}{2023^{2}}}$ +$\frac{1}{2023}$



 = 2021+$\frac{1}{2}$ = 2021,5

b) Ta có : *x*2 − *xy* + *x* + *y* +5 = 0 ⇔ *y x*( −1) = *x*2 + *x* +5 (\*) Với *x* =1 không thỏa mãn đẳng thức (\*).

 Khi đó (\*) ⇔ *y* = $\frac{x^{2} + x +5 }{x-1}$ ⇔ *y*=*x*+2+$\frac{7}{x-1}$

Vì *x y*, nguyên nên suy ra: (*x* −1) là ước nguyên của 7

Suy ra: (*x* −1)∈ ±{ 1;±7}

* *x* −1 =1⇒ *x* = 2 ⇒ *y* =11
* *x* −1 = −1⇒ *x* = 0 ⇒ *y* = −5
* *x* −1 =7 ⇒ *x* = 8⇒ *y* =11
* *x* −1 =-7 ⇒ *x* = −6 ⇒ *y* = −5

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa ycbt : (2;11), (0;- 5), (8;11), ( -6;-5) .

**Câu 2** *(4,0 điểm).*

1. Vì *O A B*, tạo thành tam giác nên : $\left\{\begin{array}{c}m^{2} -m+ 2\ne 0\\2m-8\ne 0\#\end{array}\right.$ ⇔ $\left\{\begin{array}{c}∀ m\in R\\m\ne 4\end{array}\right.$

Đường thẳng *d* cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại *A*và *B* nên suy ra :

*A*(;0) & *B*(0;2*m*−8)

Ta có : *S*∆*OAB* =$\frac{1}{2}$.*OA.OB*=$\frac{1}{2}$. *m*$\left|\frac{-2m+8}{m^{2}-m+2}\right|.\left|2m-8\right|$*=2*

⇔ $\left(m-4\right)^{2}$=$\left|m^{2}-m+2\right|$⇔$m^{2}-8m+16$=$\left|m^{2}-m+2\right|$

⇔$\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{m^{2}-8m+16=m^{2}-m+2}{m^{2}-8m+16=-m^{2}+m-2}\right.$

⇔ *m* = 2(TMĐK)

1. Gọi *x* (giờ), *y* (giờ) lần lượt là thời gian để mỗi vòi chảy riêng đổ đầy bồn nước, *x* > 0, *y* > 0.

Khi đó, trong 1 giờ : vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bồn, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bồn.

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{c}\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=1\\\frac{1}{x}+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{8}{9}\end{array}\right.$

Đặt : *a* =$\frac{1}{x} $, b=$\frac{1}{y} hệ trở thành :\left\{\begin{array}{c}3a+8b=1\\5a+4b=\frac{8}{9}\end{array} \right.$⇔$\left\{\begin{array}{c}a=\frac{1}{9}\\b=\frac{1}{12}\end{array}\right.$

Suy ra : *x* = 9, *y* =12.

Vậy vòi thứ nhất cần 9 (giờ), vòi thứ hai cần 12 (giờ) để chảy riêng một mình thì đầy bồn.

**Câu 3** *(2,0 điểm).*

Ta có: *x=*1+$\sqrt[3]{3}$+$\sqrt[3]{9}$⇔*x*$\sqrt[3]{3}$*=*$\sqrt[3]{3}$+$\sqrt[3]{9}$+3

⇔ *x*$\sqrt[3]{3}$*=*$\sqrt[3]{3}$+$\sqrt[3]{9}$+1+2⇔ *x*$\sqrt[3]{3}$*=x+2*

⇔3$x^{2}$=$x^{3}+6x^{2}+12x+8⇔ $⇔$x^{3}-3x^{2}+6x=4 $

Từ đó suy ra : $x^{3}-3x^{2}+6x+21=4+21+25 là số chia hết cho 5.$

 **Câu 4** *(5,0 điểm).*



a) Góc *BAC* vuông tại A, AK là đường phân giác trong của góc A nên K là điểm chính giữa cung BC suy ra ∆*OHK* vuông tại *O*.

Ta ó: *OK* 2 +*OH* 2 = *HK* 2 ⇒ *HK* 2 = *R*2 +*OH* 2

Mặt khác *AH* 2 +*OH* 2 = *R*2 ⇒ *AH* 2 = *R*2 −*OH* 2

⇒ *AH* 2 + *HK* 2 = *R*2 −*OH* 2 + *R*2 +*OH* 2 = 2*R*2 ( không đổi) nên ∆*OAH* vuông tại *H* có: *AH* =$\frac{R\sqrt{3}}{2}$ nên ∆*OAH* là nửa tam giác đều cạnh bằng R.

Suy ra: $\hat{AOH}$= 600

+ Nếu *H* thuộc đoạn *OB*

Ta có: ∆*OAB* cân tại *O* (*OA* = *OB* = *R*) có $\hat{AOB}$= 600 Tính được $\hat{ABC}$= 600

+ Nếu *H* thuộc đoạn *OC*

Ta có $\hat{ACB}$ = 600 ⇒ $\hat{ABC}$= 900 −600 = 300

Vậy $\hat{ABC}$= 600 hoặc $\hat{ABC}$= 300

1. ∆*OAH* vuông tại *H* nên: *AH* 2 +*OH* 2 = *OA*2

⇒ *x*2 +*OH* 2 = *R*2 ⇒ *OH* 2 = *R*2 − *x*2 ⇒ *OH* = *R*2 − *x*2 (đvdt)

Suy ra: *S*∆*OAH* =$\frac{1}{2}$*AH OH*. =$\frac{1}{2}x\sqrt{R^{2}-x^{2}}$

Theo bất đẳng thức Cô si:

Ta có: *S*∆*OAH* =$\frac{1}{2}x\sqrt{R^{2}-x^{2}}\leq \frac{1}{2}.\frac{x^{2}+R^{2}-X^{2}}{2}$=$\frac{R^{2}}{4}$, trong đó $\frac{R^{2}}{4}$ không đổi

Dấu “=” xảy ra khi x = $\sqrt{R^{2}-x^{2}}$⇔$x^{2}=R^{2}-x^{2}$⇒x=$\frac{\sqrt{2}}{2}R$

Vậy *S* đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^{2}}{4}$ khi x =$\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

**Câu 5** *(2,0 điểm)*



Trong 

 *ABC*

 có :

2

2

5

*AB*

*AC*

*BC*

+

=

=

,

12

5

*AH*

=

*BH BC*. = *AB*2 ⇒ *BH* =  , *CH* = 

Dựng *IK* ⊥ *BC K*,( ∈*BC*).

Khi đó dễ dàng tính được :

BK = $\frac{1}{3}BH=\frac{3}{5};CK=\frac{22}{5};IK=\frac{1}{3}AH=\frac{4}{5}; IC=\sqrt{IK^{2}+CK^{2}}=2\sqrt{5}$

Ta có**:** $\frac{CE}{CI}=\frac{CH}{CK}$**⇒CE=**$\frac{CI.CH}{CK}$ **=** $\frac{16\sqrt{5}}{11}$

**Câu 6** *(2,0 điểm).*

Ta có: (*a*2 +*bc b*)( +*c*) = *a b*2 + *a c*2 +*b c*2 +*bc*2 = *b a*( 2 +*c*2 )+*c a*( 2 +*b*2 )

Tương tự: (*b*2 +*ca c*)( + *a*) = *c b*( 2 + *a*2 )+ *a b*( 2 +*c*2 )

 (*c*2 + *ab a*)( +*b*) = *a c*( 2 +*b*2 )+*b c*( 2 + *a*2 )

Đặt: *x* = *a b*( 2 +*c*2 ); *y*= *b c*( 2 + *a*2 );*z* = *c b*( 2 + *a*2 )



Áp dụng BĐT Cô si cho 3 sốkhông âm :$\sqrt{\frac{y+z}{x}}$;$ \sqrt{\frac{z+x}{y}}$;$ \sqrt{\frac{x+y}{z}}$

Ta có:$ \sqrt{\frac{y+z}{x}}$+$ \sqrt{\frac{z+x}{y}}$+$ \sqrt{\frac{x+y}{z}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{x.y.z}}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

=3$\sqrt{2}$ ( đpcm).