**ĐỀ SỐ 30**

**(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Gia Lai 2023-2024)**

*Thời gian làm bài : 150 phút*

**Câu 1** *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng:

Từ đó hãy tính giá trị biểu thức:

*S* = + +…+ +

 b) Tìm tất cả các cặp số (*x;y)* nguyên thỏa mãn:

- *xy +x + y + 5 = 0*

**Câu 2** *(4,0 điểm).*

a) Cho hàm số  *y = (* có đồ thị là đường thẳng *d* . Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đường thẳng *d* cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại *A* và *B* sao cho diện tích  tam giác *OAB* bằng 2 ( với *O* là gốc tọa độ ).

b) Cho hai vòi nước chảy vào 1 bồn nước. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 3  giờ rồi dừng lại, sau đó cho vòi thứ hai chảy tiếp vào trong 8 giờ nữa thì đầy bồn. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 1 giờ rồi cho cả 2 vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước đã chảy  vào bằng bồn. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu nước sẽ đầy bồn đó ?

**Câu 3** *(2,0 điểm).*

Cho x = 1+ . Chứng tỏ là số chia hết cho 5 .

**Câu 4** *(5,0 điểm).*

Cho đường tròn (*O)* đường kính *BC*= 2R và điểm *A* thay đổi trên (*O)* (điểm *A* không trùng  với *B,C* ). Đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC* cắt đường tròn (*O)* tại *K* . Hạ *AH* vuông  góc với *BC* .

a) Chứng minh rằng khi *A* thay đổi, tổng luôn không đổi. Tính góc *B* của tam  giác *ABC biết AH =*

 b) Đặt *AH* = . Tìm *x* sao cho diện tích tam giác *OAH* đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 5** *(2,0 điểm).*

Cho ∆*ABC* vuông tại *A* biết *AB* = 3, AC = 4 và *AH* là đường cao. Gọi *I AB* sao cho  *AI* = 2BI , *CI* cắt *AH* tại *E* . Tính CE.

**Câu 6** *(2,0 điểm).*

Cho *a,b,c* là các số thực dương. Chứng minh rằng:

+ + .

#### ĐỀ SỐ 9

**(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Gia Lai 2023-2024)**

Câu 1 (5,0 điểm).

1. =

= =

= =

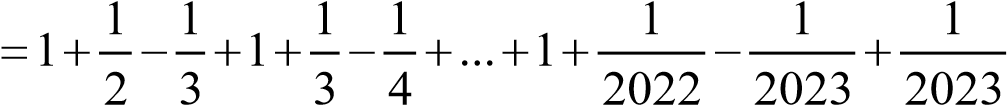
= =1+ (đpcm).

Ta có:

= 1+ =1+

Khi đó:

*S* = + +…+ +



= 2021+ = 2021,5

b) Ta có : *x*2 − *xy* + *x* + *y* +5 = 0 ⇔ *y x*( −1) = *x*2 + *x* +5 (\*) Với *x* =1 không thỏa mãn đẳng thức (\*).

Khi đó (\*) ⇔ *y* = ⇔ *y*=*x*+2+

Vì *x y*, nguyên nên suy ra: (*x* −1) là ước nguyên của 7

Suy ra: (*x* −1)∈ ±{ 1;±7}

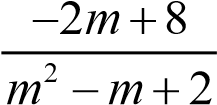
* *x* −1 =1⇒ *x* = 2 ⇒ *y* =11
* *x* −1 = −1⇒ *x* = 0 ⇒ *y* = −5
* *x* −1 =7 ⇒ *x* = 8⇒ *y* =11
* *x* −1 =-7 ⇒ *x* = −6 ⇒ *y* = −5

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa ycbt : (2;11), (0;- 5), (8;11), ( -6;-5) .

**Câu 2** *(4,0 điểm).*

1. Vì *O A B*, tạo thành tam giác nên : ⇔

Đường thẳng *d* cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại *A*và *B* nên suy ra :

*A*(;0) & *B*(0;2*m*−8)

Ta có : *S*∆*OAB* =.*OA.OB*=. *m=2*

⇔ =⇔=

⇔

⇔ *m* = 2(TMĐK)

1. Gọi *x* (giờ), *y* (giờ) lần lượt là thời gian để mỗi vòi chảy riêng đổ đầy bồn nước, *x* > 0, *y* > 0.

Khi đó, trong 1 giờ : vòi thứ nhất chảy được bồn, vòi thứ hai chảy được bồn.

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình :

Đặt : *a* =, b=⇔

Suy ra : *x* = 9, *y* =12.

Vậy vòi thứ nhất cần 9 (giờ), vòi thứ hai cần 12 (giờ) để chảy riêng một mình thì đầy bồn.

**Câu 3** *(2,0 điểm).*

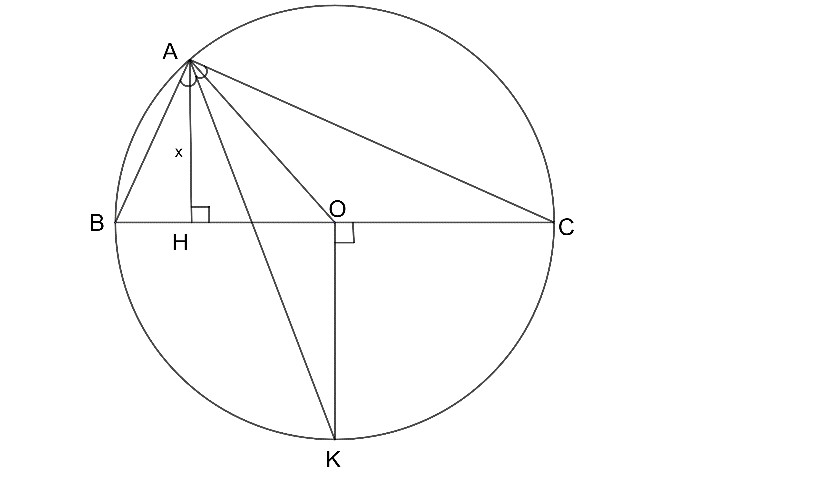
Ta có: *x=*1++⇔*x=*++3

⇔ *x=*++1+2⇔ *x=x+2*

⇔3=⇔

Từ đó suy ra :

**Câu 4** *(5,0 điểm).*



a) Góc *BAC* vuông tại A, AK là đường phân giác trong của góc A nên K là điểm chính giữa cung BC suy ra ∆*OHK* vuông tại *O*.

Ta ó: *OK* 2 +*OH* 2 = *HK* 2 ⇒ *HK* 2 = *R*2 +*OH* 2

Mặt khác *AH* 2 +*OH* 2 = *R*2 ⇒ *AH* 2 = *R*2 −*OH* 2

⇒ *AH* 2 + *HK* 2 = *R*2 −*OH* 2 + *R*2 +*OH* 2 = 2*R*2 ( không đổi) nên ∆*OAH* vuông tại *H* có: *AH* = nên ∆*OAH* là nửa tam giác đều cạnh bằng R.

Suy ra: = 600

+ Nếu *H* thuộc đoạn *OB*

Ta có: ∆*OAB* cân tại *O* (*OA* = *OB* = *R*) có = 600 Tính được = 600

+ Nếu *H* thuộc đoạn *OC*

Ta có = 600 ⇒ = 900 −600 = 300

Vậy = 600 hoặc = 300

1. ∆*OAH* vuông tại *H* nên: *AH* 2 +*OH* 2 = *OA*2

⇒ *x*2 +*OH* 2 = *R*2 ⇒ *OH* 2 = *R*2 − *x*2 ⇒ *OH* = *R*2 − *x*2 (đvdt)

Suy ra: *S*∆*OAH* =*AH OH*. =

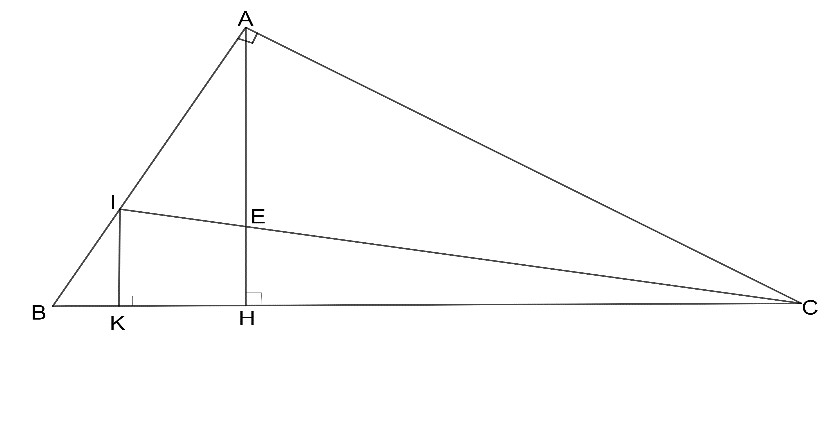
Theo bất đẳng thức Cô si:

Ta có: *S*∆*OAH* ==, trong đó không đổi

Dấu “=” xảy ra khi x = ⇔⇒x=

Vậy *S* đạt giá trị lớn nhất là khi x =.

**Câu 5** *(2,0 điểm)*



Trong 

*ABC*

có :

2

2

5

*AB*

*AC*

*BC*

+

=

=

,

12

5

*AH*

=

*BH BC*. = *AB*2 ⇒ *BH* =  , *CH* = 

Dựng *IK* ⊥ *BC K*,( ∈*BC*).

Khi đó dễ dàng tính được :

BK =

Ta có**: ⇒CE= =**

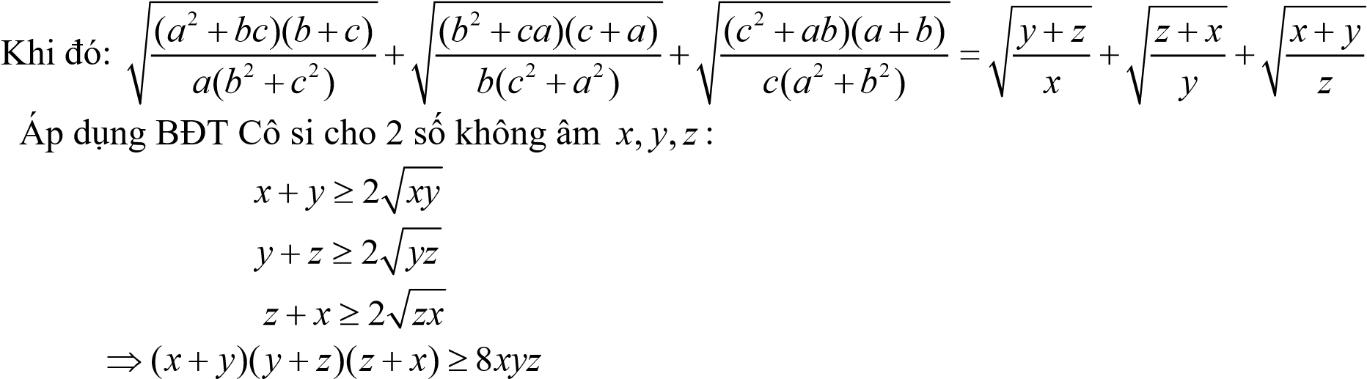
**Câu 6** *(2,0 điểm).*

Ta có: (*a*2 +*bc b*)( +*c*) = *a b*2 + *a c*2 +*b c*2 +*bc*2 = *b a*( 2 +*c*2 )+*c a*( 2 +*b*2 )

Tương tự: (*b*2 +*ca c*)( + *a*) = *c b*( 2 + *a*2 )+ *a b*( 2 +*c*2 )

(*c*2 + *ab a*)( +*b*) = *a c*( 2 +*b*2 )+*b c*( 2 + *a*2 )

Đặt: *x* = *a b*( 2 +*c*2 ); *y*= *b c*( 2 + *a*2 );*z* = *c b*( 2 + *a*2 )



Áp dụng BĐT Cô si cho 3 sốkhông âm :;;

Ta có:++

=3 ( đpcm).