BÀI 20. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

CHƯƠNG 6. LOGARIT

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

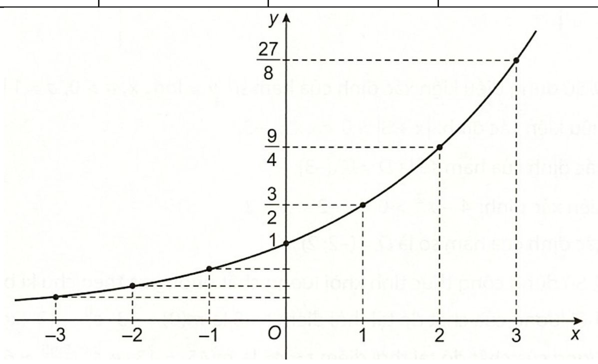
Dạng 1. Tính chất và đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Vẽ đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

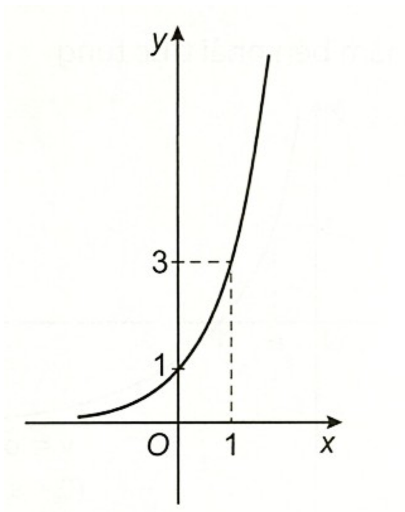
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$



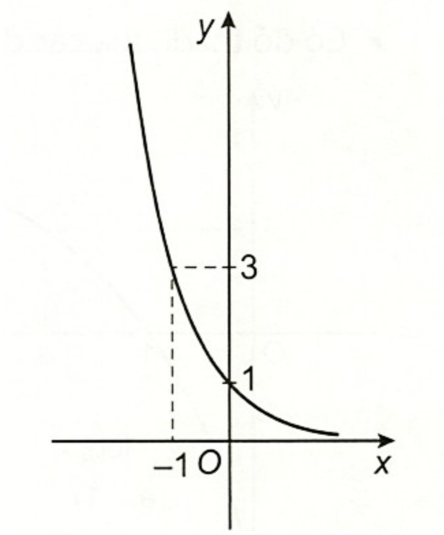
Câu 2. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y=3^x$; b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

a) $y=x^3$.



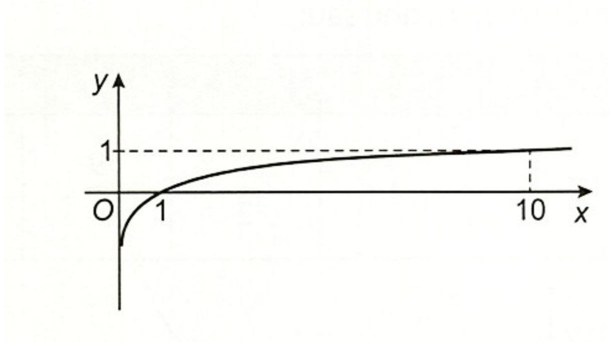
b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.



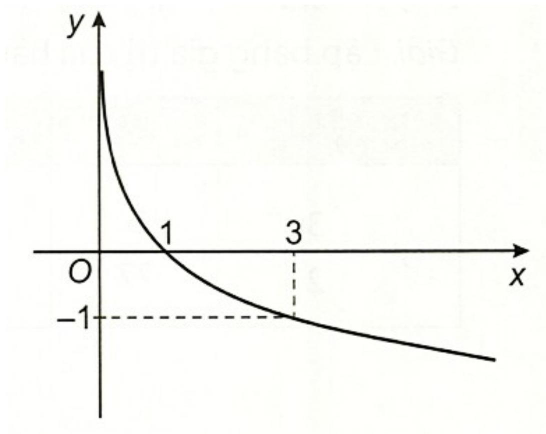
Câu 3. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y = \log x$; b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Lời giải

a) $y = \log x$.



b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.



Câu 4. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 4^x$;

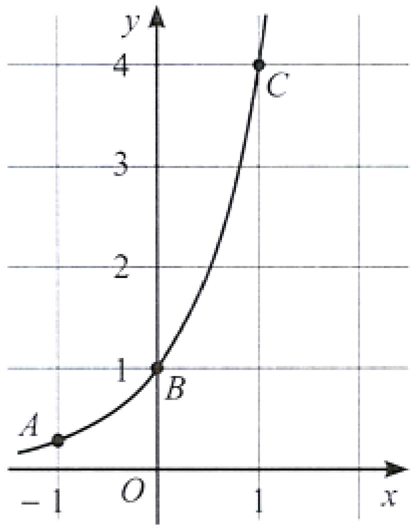
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

a) Vì hàm số $y = 4^x$ có cơ số $4 > 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y=4^x$	0	1	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=4^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1;\frac{1}{4}\right), B(0;1)$, $C(1;4)(\text{Hình } 1)$.

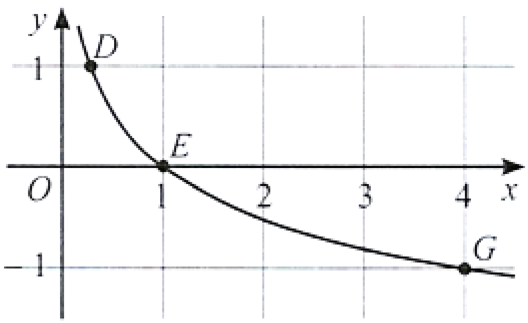


Hình 1

b) Vì hàm số $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ có cơ số $\frac{1}{4}<1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	$+\infty$
$y=\log_{\frac{1}{4}} x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $D\left(\frac{1}{4};1\right)$, $E(1;0), G(4;-1)(Hinh 2)$.



Hình 2

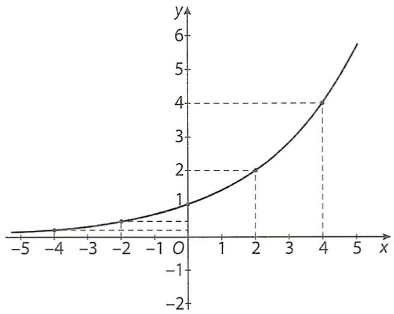
Câu 5. (Vẽ đồ thị hàm số mũ) Vẽ đồ thị của hàm số mũ $y=(\sqrt{2})^x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y=(\sqrt{2})^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=(\sqrt{2})^x$ như hình sau:



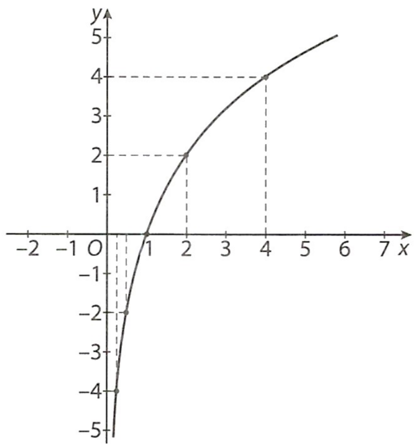
Câu 6. (Vẽ đồ thị hàm số lôgarit) Vẽ đồ thị của hàm số lôgarit $y=\log_{\sqrt{2}} x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y=\log_{\sqrt{2}} x$	-4	-2	0	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}} x$ như hình dưới đây.



Câu 7. Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

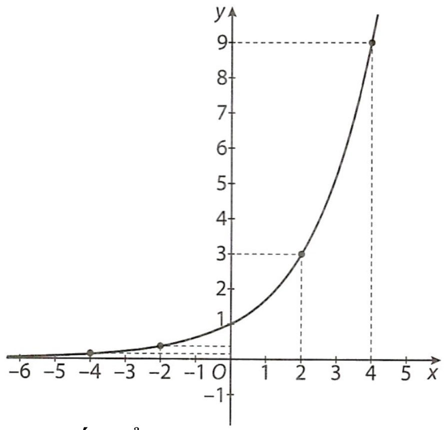
a) $y=(\sqrt{3})^x$; b) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y=(\sqrt{3})^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

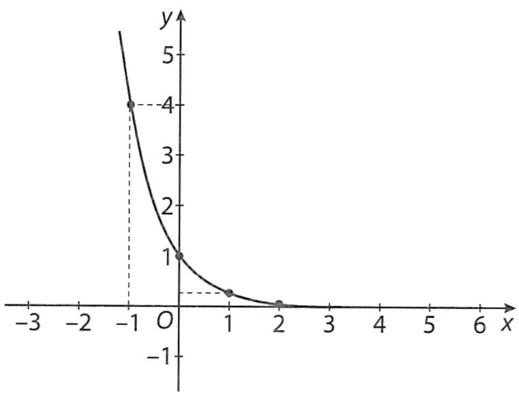
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=(\sqrt{3})^x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ như hình sau:



Câu 8. Vẽ đồ thị của các hàm số lôgarit sau:

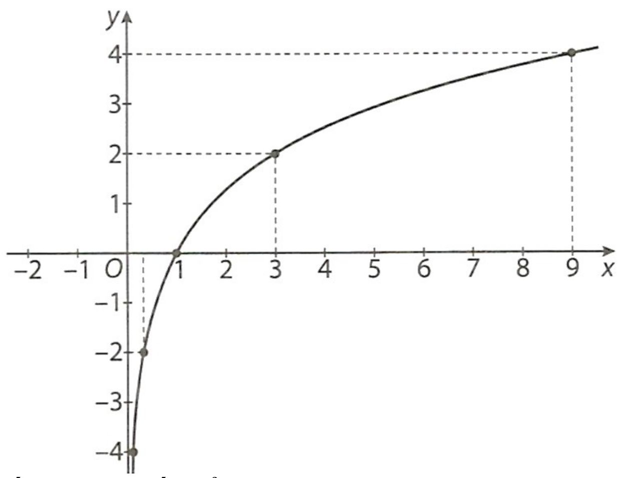
a) $\log_{\sqrt{3}} x$; b) $y=\log_{\frac{2}{3}} x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y=\log_{\sqrt{3}} x$	-4	-2	0	2	4

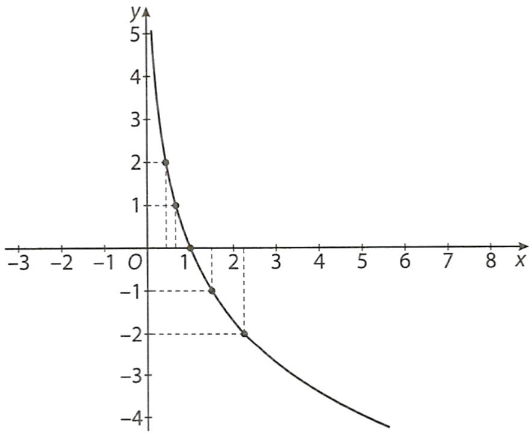
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\sqrt{3}} x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
$y=\log_{\frac{2}{3}} x$	-2	-1	0	1	2

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\frac{2}{3}} x$ như hình sau:



Câu 9. Vẽ đồ thị hàm số $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Lời giải

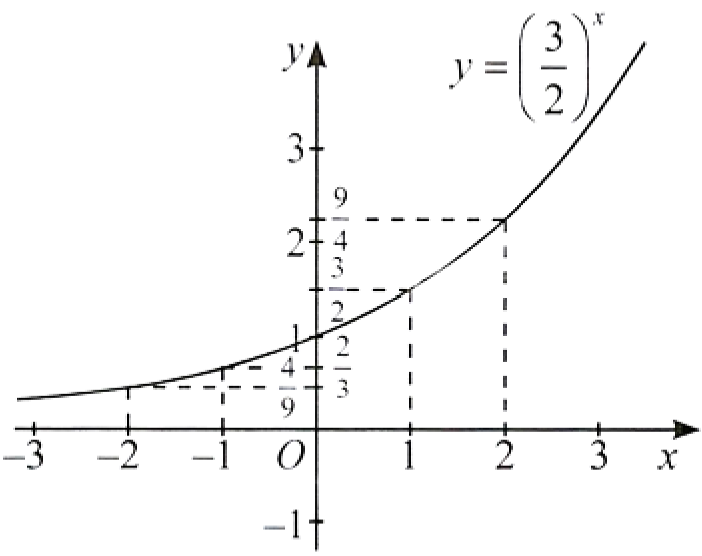
Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Do $\frac{3}{2}>1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có toạ độ theo bảng giá trị và nằm phía trên trục hoành.
Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Hình 3

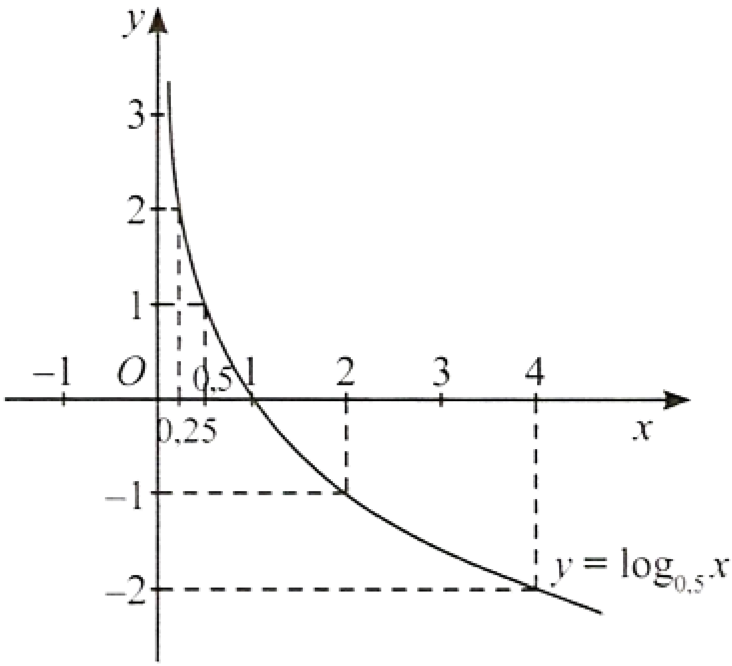
Câu 10. Vẽ đồ thị hàm số $y=\log_{0,5} x$.

Lời giải

Tập xác định: $(0;+\infty)$.
Do $0<0,5<1$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
Bảng giá trị:

x	0,25	0,5	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có toạ độ theo bảng giá trị và nằm bên phải trục tung.
Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Hình 4

Câu 11. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tìm tập xác định của các hàm số sau: a) $y=\log|x+3|$; b) $y=\ln\left(4-x^2\right)$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $|x+3|>0 \Leftrightarrow x\neq -3$.
Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
b) Điều kiện xác định: $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$.
Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-2;2)$.

Câu 12. Tìm tập xác định của các hàm số sau:
a) $y=12^x$;
b) $y=\log_5(2x-3)$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y=12^x$ là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số $y=\log_5(2x-3)$ xác định khi $2x-3>0$ hay $x>\dfrac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\log_5(2x-3)$ là $D=\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 13. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5}$

b) $y=3^{\frac{x-1}{x+1}}$

c) $y=1,5^{\sqrt{x+2}}$;

d) $y=\log_5(1-5x)$;

e) $y=\log\left(4x^2-9\right)$;

g) $y=\ln\left(x^2-4x+4\right)$.

Lời giải

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) $[-2;+\infty)$.

d) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)$.

e) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

g) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 14. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\log_3(x+1)$;

b) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $(-1;+\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ do $|x-1|>0\ \forall x\neq 1$.

Câu 15. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\log_2(x-4)$;

b) $y=\log_{0,2}\left(x^2+2x+1\right)$;

c) $y=\log_5\frac{x}{x-1}$.

Lời giải

a) $(4;+\infty)$;

b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

c) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

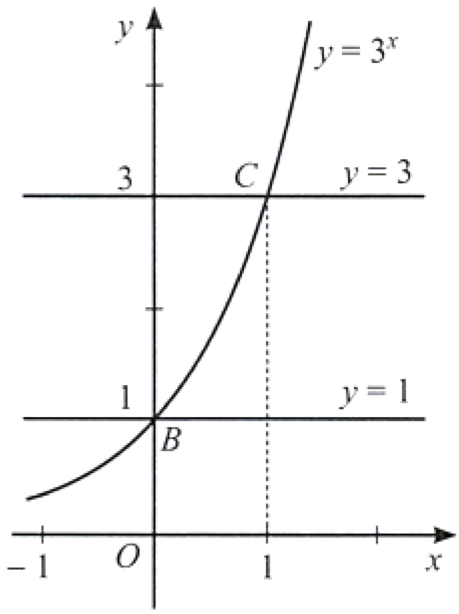
Câu 16. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=3^x$:

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y=3$;

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y=1$.

Lời giải

Quan sát Hình 3.



Hình 3

a) Đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $C(1;3)$.

Dựa vào Hình 3, ta thấy đồ thị hàm số $y = 3^x$ nằm ở phía trên đường thẳng $y = 3$ khi $x > 1$.

b) Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $B(0;1)$.

Dựa vào Hinh 3 , ta thấy đồ thị hàm số $y = 3^x$ nằm ở phía dưới đường thẳng $y = 1$ khi $x < 0$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_3\left(4x^2 - 4x + m\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = \log_3\left(4x^2 - 4x + m\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$4x^2 - 4x + m > 0\,\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1.$

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2 - 2a + 1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

Hàm số $y = \log_{a^2 - 2a + 1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$0 < a^2 - 2a + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 2$ và $a \neq 1$.

Câu 19. Cho hàm số mũ $f(x) = a^x (a > 0)$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = a$;

b) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$;

c) $f\left(x_1 + x_2\right) = f\left(x_1\right) \cdot f\left(x_2\right)$.

Lời giải

a) $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{a^{x+1}}{a^x} = a$;

b) $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$

c) $f\left(x_1 + x_2\right) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f\left(x_1\right) \cdot f\left(x_2\right)$.

Câu 20. Cho hàm số lôgarit $f(x)=\log_a x (0<a\neq 1)$. Chứng minh rằng:

a) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$;

b) $f(x^\alpha)=\alpha f(x)$.

Lời giải

a) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x=-f(x)$.

b) $f(x^\alpha)=\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x=\alpha f(x)$.

Câu 21. So sánh các cặp số sau:

a) $0,75^{-0,1}$ và $0,75^{-0,2}$;

b) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[5]{8}$

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

Lời giải

a) Do $0,75<1$ nên hàm số $y=0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $-0,1>-0,2$ nên $0,75^{-0,1}<0,75^{-0,2}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}};\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$.

Do $2>1$ nên hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$ nên

$2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{8}$

c) Ta có: $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}};\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Do $\frac{1}{3}<1$ nên hàm số $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$ nên

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ hay $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}<\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$.

Câu 22. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{0,2}\pi$ và $\log_{0,2}3$;

b) $4\log_3 2$ và $3\log_3\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

a) Hàm số $y=\log_{0,2}x$ có cơ số $0,2<1$ nên nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $\pi>3$ nên $\log_{0,2}\pi<\log_{0,2}3$.

b) Ta có $4\log_3 2=\log_3 2^4=\log_3 16; 3\log_3\sqrt[3]{15}=\log_3(\sqrt[3]{15})^3=\log_3 15$.

Hàm số $y=\log_3 x$ có cơ số $3>1$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $16>15$ nên $\log_3 16>\log_3 15$ hay $4\log_3 2>3\log_3\sqrt[3]{15}$.

Câu 23. So sánh các cặp số sau:

a) $1,04^{1,7}$ và $1,04^2$;

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

c) $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

Lời giải

a) $1,04^{1,7} < 1,04^{2}$;

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}} < \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$

c) $1,2^{0,3} > 1 > 0,9^{1,8}$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4} > 1 > 3^{-0,2}$.

Câu 24. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt[5]{27}$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{4}$ và $\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ và $\sqrt[5]{25}$

d) $\sqrt[9]{0,7^{10}}$ và $\sqrt[10]{0,7^{9}}$.

Lời giải

a) $3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt{3} < \sqrt[5]{27}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{8} > \left(\frac{1}{3}\right)^{9}$ hay $\left(\frac{1}{9}\right)^{4} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3}$;

c) $5^{-\frac{1}{3}} < 5^{\frac{2}{5}}$ hay $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} < \sqrt[5]{25}$

d) $0,7^{\frac{10}{9}} < 0,7^{\frac{9}{10}}$ hay $\sqrt[9]{0,7^{10}} < \sqrt[10]{0,7^{9}}$.

Câu 25. So sánh các cặp số sau:

a) $\log 4,9$ và $\log 5,2$;

b) $\log_{0,3} 0,7$ và $\log_{0,3} 0,8$;

c) $\log_{\pi} 3$ và $\log_{3} \pi$.

Lời giải

a) $\log 4,9 < \log 5,2$;

b) $\log_{0,3} 0,7 > \log_{0,3} 0,8$;

c) $\log_{\pi} 3 < 1 < \log_{3} \pi$.

Câu 26. So sánh các cặp số sau:

a) $2\log_{0,6} 5$ và $3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$;

b) $6\log_{5} 2$ và $2\log_{5} 6$;

c) $\frac{1}{2}\log_{2} 121$ và $2\log_{2} 2\sqrt{3}$;

d) $2\log_{3} 7$ và $6\log_{9} 4$.

Lời giải

a) $\log_{0,6} 25 < \log_{0,6} 24$ hay $2\log_{0,6} 5 < 3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$;

b) $\log_5 64 > \log_5 36$ hay $6\log_5 2 > 2\log_5 6$;

c) $\log_2 11 < \log_2 12$ hay $\frac{1}{2}\log_2 121 < 2\log_2 2\sqrt{3}$;

d) $\log_3 49 < \log_3 64$ hay $2\log_3 7 < 6\log_9 4$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x + 3}$.

a) Với a, b là hai số thực thoả mãn $a + b = 1$. Tính $f(a) + f(b)$.

b) Tính tổng: $S = f\left(\dfrac{1}{2023}\right) + f\left(\dfrac{2}{2023}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2022}{2023}\right)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^b}{9^b + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{3 + 9^a} = 1.$$

b) Ta thấy: $\dfrac{1}{2023} + \dfrac{2022}{2023} = 1, \dfrac{2}{2023} + \dfrac{2021}{2023} = 1, \cdots$

Theo câu a, ta có: $f\left(\dfrac{1}{2023}\right) + f\left(\dfrac{2022}{2023}\right) = 1, f\left(\dfrac{2}{2023}\right) + f\left(\dfrac{2021}{2023}\right) = 1, \cdots$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \cdots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2022}{2023}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{2021}{2023}\right)\right] + \cdots \\ &+ \left[f\left(\frac{1011}{2023}\right) + f\left(\frac{1012}{2023}\right)\right] \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1011 \text{ số } 1} = 1011. \end{aligned}$$

Câu 28. Ta định nghĩa các hàm sin hyperbolic và hàm côsin hyperbolic như sau:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right); \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Chứng minh rằng:

a) $\sinh x$ là hàm số lẻ;

b) $\cosh x$ là hàm số chẵn;

c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ với mọi x.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = \sinh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Rightarrow f(-x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-x} - e^x\right) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, sinh x là hàm số lẻ.

b) Ta có: $g(x) = \cosh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \Rightarrow g(-x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-x} + e^x\right) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\cosh x$ là hàm số chẵn.

c) Ta có: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \cdot 2e^{-x} \cdot 2e^x = 1$.

Câu 29. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=f(x)=2^x$ trên đoạn $[-2;3]$;

b) $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Lời giải

a) Hàm số $y=f(x)=2^x$ có cơ số $2>1$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$\max_{x\in[-2;3]} y=f(3)=2^3=8$ và $\min_{x\in[-2;3]} y=f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$.

b) Với $-1\le x\le 2$, ta có $-3\le 2x-1\le 3$.

Hàm số $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ có cơ số $\frac{1}{3}<1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ hay $27\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}\ge\frac{1}{27}$. Từ đó, ta có: $\max_{x\in[-1;2]} y=27$ và $\min_{x\in[-1;2]} y=\frac{1}{27}$.

Câu 30. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=f(x)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$ trên đoạn $[-1;4]$;

b) $y=f(x)=\frac{1}{3^x}$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

a) $\max_{x\in[-1;4]} y=f(4)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^4=\frac{25}{16};\min_{x\in[-1;4]} y=f(-1)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3^x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ có cơ số $\frac{1}{3}<1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\max_{x\in[-2;2]} y=f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$ và $\min_{x\in[-2;2]} y=f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

Câu 31. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y=f(x)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3};3\right]$;

b) $y=f(x)=\log_2(x+1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

Lời giải

a) $\max_{x\in\left[\frac{1}{3};3\right]} y=f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{3}=2$ và $\min_{x\in\left[\frac{1}{3};3\right]} y=f(3)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3=-2$.

b) $\max_{x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]} y=f(3)=\log_2 4=2$ và $\min_{x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]} y=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 32. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Sự tăng trưởng dân số được ước tính theo công thức tăng trưởng mũ sau:

$A=Pe^{rt}$, trong đó P là dân số của năm lấy làm mốc, A là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào năm 2020, dân số Việt Nam khoảng 97,34 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là $0,91\%$ (theo danso.org). Nếu tỉ lệ tăng dân số này giữ nguyên, hãy ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050.

Lời giải

Từ năm 2020 tới năm 2050 là 30 năm.

Ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050 là $97,34\cdot e^{0,91\%\cdot 30}\approx 127,9$ (triệu người).

Câu 33. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t)=13e^{-0,015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=0$ là $m(0)=13\cdot e^{0}=13(kg)$.

b) Khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=45$ là $m(45)=13\cdot e^{-0,015\cdot 45}\approx 6,62(kg)$.

Câu 34. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t)=75-20\ln(t+1), 0\le t\le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Lời giải

Khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là

$M(6)=75-20\cdot\ln(6+1)\approx 36,08\%$.

Câu 35. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t)=c\left(1-e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k=0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Sau 2 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$f(2)=25\cdot\left(1-e^{-0,2\cdot 2}\right)\approx 8$ (đơn vị kiến thức).

Sau 8 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$f(8)=25\cdot\left(1-e^{-0,2\cdot 8}\right)\approx 20$ (đơn vị kiến thức).

Câu 36. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $6\%/$ năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức $y=\log_{1,06}\left(\frac{x}{10}\right)$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng sau ít nhất số năm là:
$y = \log_{1,06}\left(\frac{15}{10}\right) \approx 7$ (nam).

Câu 37. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của $_{6}^{14}C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử $_{6}^{14}C$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của $_{6}^{14}C$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của $_{6}^{14}C$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng $_{6}^{14}C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng $_{6}^{14}C$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng $_{6}^{14}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

a) $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$

b) Tỉ lệ phần trăm lượng $_{6}^{14}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$\frac{m(2000)}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} \cdot 100\% \approx 78,5\%.$

Câu 38. Mức cường độ âm $L(dB)$ được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I\left(W/m^2\right)$ là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ $10^{-12}W/m^2$ đến $10W/m^2$. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

Lời giải

Mức cường độ âm tai người có thể nghe được từ $0dB$ đến $130dB$.

Câu 39. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t = 0, m(t)$ là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là $100g$, hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

a) 9 giờ; b) 1 ngày.

(Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t = 9, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{9}} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50(g).$$

b) Do 1 ngày $= 24$ giờ nên thay $t = 24, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{9}} \approx 15,75(g).$$

Câu 40. Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau:

$$p(n)=100\cdot(0,97)^n.$$

a) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?
b) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính?
(Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) $p(10)=100\cdot(0,97)^{10}\approx 74\%$.

b) $p(25)=100\cdot(0,97)^{25}\approx 47\%$.

Câu 41. Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:
a) hằng quý;
b) hằng tháng;
c) liên tục.
(Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Để giải câu a và câu b, ta sử dụng công thức lãi kép theo định kì để tính tổng số tiền thu được $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^t$, trong đó P là số tiền vốn ban đầu, r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân), n là số kì tính lãi trong một năm và t là số kì gửi.

a) Ta có: $P=120, r=6\%=0,06, n=4, t=20$. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A=120\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{20}=120\cdot 1,015^{20}\approx 161,623 \text{ (trieäu ñoàng)}.$$

b) Ta có: $P=120, r=6\%=0,06, n=12, t=60$. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A=120\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{60}=120\cdot 1,005^{60}\approx 161,862 \text{ (trieäu ñoàng)}.$$

c) Ta sử dụng công thức lãi kép liên tục $A=Pe^{rt}$, ở đây r là lãi suất năm $(r$ cho dưới dạng số thập phân) và t là số năm gửi tiết kiệm.
Ta có: $P=120, r=6\%=0,06, t=5$ nên
$A=120\cdot e^{0,06\cdot 5}=120\cdot e^{0,3}\approx 161,983$ (triệu đồng).

Câu 42. Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t=0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?
b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

Lời giải

a) $m(0)=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=25(g)$.

b) $m(2500)=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2500}{1600}}\approx 8,46(g)$.

Câu 43. Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12}W/m^2$ là cường độ âm chuẩn, tức là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là $10^{-7}W/m^2$.
b) Khi cường độ âm tăng lên 1000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm $10^{-7}W/m^2$ là
$L = 10\log\frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50(dB)$.

b) Ta có: $10\log\frac{1000I}{I_0} = 10\cdot\left(\log 1000 + \log\frac{I}{I_0}\right) = 30 + 10\log\frac{I}{I_0}$.

Vậy mức cường độ âm tăng lên $30dB$.

Câu 44. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0\cdot a^t\,(mg)$, trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$?

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống $100mg$ thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn $80mg$. Hãy xác định giá trị của D_0 và a.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Lời giải

a) Do lượng thuốc trong cơ thể giảm dần, nên hàm số $D(t)$ nghịch biến, do đó $0 < a < 1$.

b) $D_0 = 100, a = \frac{80}{100} = 0,8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn $D(5) = 100\cdot 0,8^5$. Tỉ lệ lượng thuốc đã giảm so với lượng thuốc ban đầu là $\frac{D_0 - D(5)}{D_0} = \frac{100 - 100\cdot 0,8^5}{100} \approx 0,6723 \approx 67,23\%$.