

ĐỀ THI HKI MÔN TOÁN LỚP 9
NĂM HỌC 2019-2020
CÁC QUẬN – HUYỆN THÀNH PHỐ HÀ NỘI

MỤC LỤC

PHẦN I: ĐỀ BÀI.....	2
ĐỀ SỐ 1: QUẬN CẦU GIẤY.....	2
ĐỀ SỐ 2: QUẬN HAI BÀ TRUNG.....	3
ĐỀ SỐ 3: QUẬN BẮC TỪ LIÊM.....	4
ĐỀ SỐ 4: QUẬN HOÀNG MAI.....	5
ĐỀ SỐ 5: QUẬN NAM TỪ LIÊM.....	6
ĐỀ SỐ 6: QUẬN LONG BIÊN.....	7
ĐỀ SỐ 7: QUẬN THANH XUÂN.....	8
ĐỀ SỐ 8: QUẬN HOÀN KIẾM.....	9
ĐỀ SỐ 9: QUẬN HÀ ĐÔNG.....	10
ĐỀ SỐ 10: QUẬN BA ĐÌNH.....	11
ĐỀ SỐ 11: QUẬN ĐÔNG ĐA.....	12
ĐỀ SỐ 12: QUẬN ĐÔNG ANH.....	13
ĐỀ SỐ 13: HUYỆN GIA LÂM.....	14
ĐỀ SỐ 14: HUYỆN THƯỜNG TÍN.....	15
PHẦN B: ĐÁP ÁN.....	16
ĐÁP ÁN QUẬN CẦU GIẤY.....	16
ĐÁP ÁN QUẬN HAI BÀ TRUNG.....	21
ĐÁP ÁN QUẬN BẮC TỪ LIÊM.....	26
ĐÁP ÁN: QUẬN HOÀNG MAI.....	31
ĐÁP ÁN: QUẬN NAM TỪ LIÊM.....	35
ĐÁP ÁN : QUẬN LONG BIÊN.....	42
ĐÁP ÁN: QUẬN THANH XUÂN.....	47
ĐÁP ÁN QUẬN HOÀN KIẾM.....	53
ĐÁP ÁN: QUẬN HÀ ĐÔNG.....	57
ĐÁP ÁN: QUẬN BA ĐÌNH.....	62
ĐÁP ÁN: QUẬN ĐÔNG ĐA.....	70
ĐÁP ÁN: QUẬN ĐÔNG ANH.....	75
ĐÁP ÁN: HUYỆN GIA LÂM.....	79

PHẦN I: ĐỀ BÀI

ĐỀ SỐ 1: QUẬN CẦU GIẤY

Bài I. (3 điểm): Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Chứng minh $A = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$.

b) Tìm x biết $A = \frac{-2}{3}$.

c) Cho x là số nguyên, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Bài II. (2,5 điểm): Cho hàm số $y = (m+1)x + 3$ (d) (m là tham số, $m \neq -1$)

a) Tìm m để hàm số trên là hàm số đồng biến.

b) Khi $m = 2$, hãy vẽ đồ thị hàm số đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy và tính khoảng cách từ O đến đường thẳng (d).

c) Đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + 3$ (d') tại điểm M . Gọi N và P lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d) và (d') với trục hoành Ox . Tìm m để diện tích tam giác OMP bằng 2 lần diện tích tam giác OMN .

Bài III. (4 điểm)

1) Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 6 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay lên cao được bao nhiêu ki-lô-mét theo phương thẳng đứng?

2) Cho nửa đường tròn ($O; R$) đường kính AB . Vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Tia MC cắt By tại D .

a) Chứng minh $MD = MA + BD$ và $\triangle OMD$ vuông.

b) Cho $AM = 2R$. Tính BD và chu vi tứ giác $ABDM$.

c) Tia AC cắt tia By tại K . Chứng minh $OK \perp BM$.

Bài IV. (0,5 điểm): Giải phương trình:

$$\sqrt{2020x - 2019} + 2019x + 2019 = \sqrt{2019x - 2020}.$$

ĐỀ SỐ 2: QUẬN HAI BÀ TRUNG

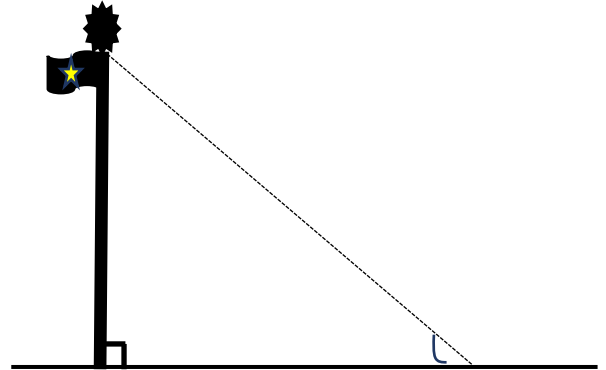
Bài 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} - 5\sqrt{45}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - 5\sqrt{2}$

2) Một cột cờ vuông góc với mặt đất có bóng dài 12m, tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc là 35° (hình vẽ bên). Tính chiều cao của cột cờ?



Bài 2. (2,0 điểm) Cho các biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \text{ và } B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \text{ (ĐK: } x \geq 0; x \neq 4).$$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị là số nguyên.

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hàm số bậc nhất $y=(m+1)x+2$ có đồ thị (d) (m là tham số và $m \neq -1$)

a) Vẽ (d) khi $m=0$

b) Xác định m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y=2x+1$

c) Xác định m để (d) cắt hai trục Ox, Oy tại A và B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích).

Bài 4. (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax, By . Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D . Gọi E là giao điểm của CO và AM , F là giao điểm DO và BM .

a) Chứng minh 4 điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AC + BD = CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.

c) Chứng minh tích $AC \cdot BD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

d) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn sao cho diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

Bài 5. (0,5 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1} + 2019 - x$.

ĐỀ SỐ 3: QUẬN BẮC TỪ LIÊM

Bài 1. (2,0 điểm) Cho hai biểu thức: $A = \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0; x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.
- 2) Rút gọn biểu thức $M = A:B$.
- 3) Tìm các giá trị của x để $3\sqrt{x}+5=2M$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính: $3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$.

2) Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

b. $2\sqrt{12x} - 3\sqrt{3x} + 4\sqrt{48x} = 17$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (m + 1)x + 6$ (1) với $m \neq -1$.

- 1) Vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.
- 2) Gọi đồ thị của hàm số (1) là đường thẳng (d) , tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 5x + m - 2$ tại một điểm nằm trên trục tung.
- 3) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $3\sqrt{2}$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn tâm O (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MO với AB .

- a) Chứng minh rằng: 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng: $MO \perp AB$ tại H .
- c) Nếu $OM = 2R$ hãy tính độ dài MA theo R và tính số đo các góc AMB, AOB ?
- d) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C
Chứng minh rằng: $MHC = ADC$.

Bài 5. (0,5 điểm) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x \geq 2y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức M với $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

ĐỀ SỐ 4: QUẬN HOÀNG MAI

Bài I. (2,5 điểm)

Cho hai biểu thức : $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Đặt $M = \frac{A}{B}$. Tìm x để biểu thức M thỏa mãn $M - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0$.

Bài II. (2,5 điểm) Cho hàm số $y = x - 2$ có đồ thị là đường thẳng (d) .

- a) Vẽ đường thẳng (d) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Xác định hệ số $a; b$ của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ biết đồ thị hàm số này là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -5)$ và song song với đường thẳng (d) .
- c) Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = (m-3)x + 5$ (với m là tham số và $m \neq 3$) cắt đường thẳng (d) tại một điểm nằm bên phải trục tung.

Bài III. (1,0 điểm) Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc bằng 42° . Cùng thời điểm đó bóng của một cột đèn trên mặt đất dài $7,2m$. Tính chiều cao của cột đèn. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài IV. (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB , lấy điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho $AM < MB$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia OM tại S . Đường cao AH của tam giác SAO (H thuộc SO) cắt đường tròn (O) tại D .

- 1) Chứng minh: $OH.OS = R^2$.
- 2) Chứng minh: SD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- 3) Kẻ đường kính DE của đường tròn (O) . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAD . Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SAD và tính độ dài đoạn thẳng AE theo R và r .
- 4) Cho $AM = R$, gọi K là giao điểm của BM và AD . Chứng minh: $\frac{MD^2}{6} = KH.KD$.

Bài V. (0,5 điểm) Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 1$. Chứng minh:

$$x^2 - \frac{3}{4x} - \frac{x}{y} \leq -\frac{9}{4}$$

ĐỀ SỐ 5: QUẬN NAM TỪ LIÊM

Bài I. (2,0 điểm).

1. Tính: a) $\frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{5}{\sqrt{5}+1}$

b) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} - \sqrt{\frac{1}{5}}$

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{9x-9} + \sqrt{4x-4} = 12$

b) $\sqrt{x^2-5x} - \sqrt{x-5} = 0$

Bài II. (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $A = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{7\sqrt{x+3}}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính A khi $x = 25$

b) Chứng minh: $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$

Bài III. (2,0 điểm). Cho đường thẳng $(d_1): y = 2x + 2$

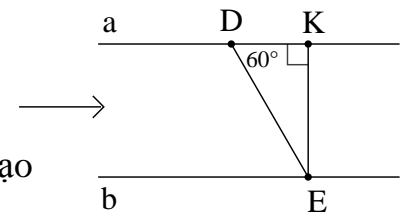
a) Vẽ đường thẳng (d_1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và $(d_2): y = x - 3$

c) Cho đường thẳng $(d_3): y = mx + 5$. Tìm giá trị của m để ba đường thẳng $(d_1); (d_2); (d_3)$ cắt nhau tại một điểm

BÀI IV. (3,5 điểm)

1. Một con thuyền ở địa điểm D di chuyển từ bờ sông a sang bờ sông b với vận tốc trung bình là 2km/h, vượt qua khúc sông nước chảy mạnh trong 20 phút. Biết đường đi con thuyền là DE, tạo với bờ sông một góc 60° . Tính chiều rộng khúc sông



2. Lấy điểm A trên $(O;R)$, vẽ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy B, trên $(O;R)$ lấy C sao cho $BC = AB$.

a) Chứng minh rằng: CB là tiếp tuyến của (O) .

b) Vẽ đường kính AD của (O) , kẻ đường CK vuông góc với AD. Chứng minh rằng $CD \parallel OB$ và $BC.DC = CK.OB$.

c) Lấy điểm M trên cung nhỏ AC của (O) , vẽ tiếp tuyến tại M cắt AB, BC lần lượt tại E, F. Vẽ đường tròn tâm I nội tiếp tam giác BFE. Chứng minh rằng $\triangle MAC \sim \triangle FIE$

Bài V. (0,5 điểm). Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 3xyz$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^2}{z(z^2 + x^2)} + \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)} + \frac{z^2}{y(y^2 + z^2)}$$

ĐỀ SỐ 6: QUẬN LONG BIÊN

Bài 1 (1,5 điểm). Thực hiện phép tính.

a) $-3\sqrt{80} + 7\sqrt{45} - \sqrt{500}$ b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{19+8\sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} - \frac{5}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{28}-2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Bài 2 (2,0 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}\right)$

- a) Rút gọn P.
- b) Tính giá trị của P với $x = 4 - 2\sqrt{3}$
- c) Tìm số nguyên x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài 3. (1,5 điểm). Cho hàm số $y = -0,5x$ có đồ thị là (d_1) và hàm số $y = x + 2$ có đồ thị là (d_2)

- a) Vẽ đồ thị (d_1) và (d_2) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Xác định hệ số a, b của đường thẳng $(d): y = ax + b$ biết rằng (d) song song với (d_1) và (d) cắt (d_2) tại một điểm có tung độ bằng -3 .

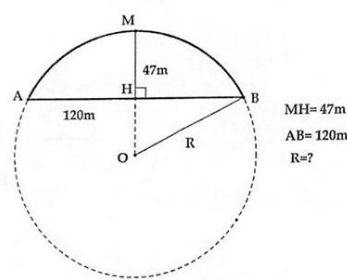
Bài 4. (4,0 điểm).

1) (1,0 điểm) Cho tam giác ABC đường cao AH biết $BC = 5cm, AH = 2cm$, độ lớn góc $ACB = 30^\circ$. Tìm độ dài AB.

2) (3,0 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B và C là 2 tiếp điểm.)

- a) Chứng minh: Bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn và $AO \perp BC$.
- b) Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M bất kì ($M \neq B, M \neq C, M \notin AO$). Tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh: Chu vi $\triangle ADE$ bằng $2AB$.
- c) Đường thẳng vuông góc với AO tại O cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh: $4PD \cdot QE = PQ^2$.

Bài 5. (1,0 điểm). Cầu Đông Trù bắc qua sông Đuống, nằm trên quốc lộ 5 kéo dài, nối xã Đông Hội, huyện Đông Anh ở phía Bắc Hà Nội và phường Ngọc Thụy, quận Long Biên ở phía Nam Hà Nội. Nhịp giữa dài 120m được thiết kế bằng vòm thép nhồi bê tông có hình một cung tròn. Khoảng cách điểm cao nhất của mái vòm xuống mặt sàn của cầu là 47m. (được mô phỏng hình vẽ dưới). Hãy tính độ dài bán kính R của đường tròn chứa cung tròn là nhịp giữa của cầu Đông Trù? (Kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



ĐỀ SỐ 7: QUÂN THANH XUÂN

Bài 1: (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \cot 75^\circ$

2) Giải phương trình: $\sqrt{25x+5} + \sqrt{45}\sqrt{20x+4} - \sqrt{\frac{5x+1}{16}} = \frac{27\sqrt{5}}{4}$

Bài 2: (2,0 điểm) Cho các biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}$ và $Q = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$;

(Với $x > 1, x \neq 2, x \neq 3$)

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 16$

2) Chứng minh rằng $Q + \sqrt{2} = \sqrt{x}$

3) Tìm x để $P \cdot Q \geq 0$.

Bài 3: (2 điểm)

Cho hàm số bậc nhất $y = (m+1)x + 2m$ và $y = (2m+1)x + 3m$

1) Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song.

2) Tìm giá trị của m để giao điểm của hai đồ thị nằm trên trục hoành.

Bài 4: (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C, D là hai điểm di chuyển trên cung tròn sao cho góc COD luôn bằng 90° (C nằm giữa A và D). Tiếp tuyến tại C, D cắt đường thẳng AB lần lượt tại F, G . Gọi E là giao điểm của FC và GD .

1) Tính chu vi của tam giác $\triangle ECD$ theo R .

2) Khi tứ giác $FCDG$ là hình thang cân. Hãy tính tỉ số $\frac{AB}{FG}$.

3) Chứng minh rằng $FC \cdot DG$ luôn là hằng số.

4) Tìm vị trí của C, D sao cho tích $AD \cdot BC$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 5: (0,5 điểm)

Với hai số x, y dương thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(y+1)^2}} + \frac{4}{(x+1)(y+1)}$$

ĐỀ SỐ 8: QUẬN HOÀN KIẾM

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Tính giá trị của $P = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$

2. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = 2$ với x là ẩn số thực

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1. Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{4}$

2. Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$

3. Tìm x để biểu thức $P \geq 1$

Bài 3. (2,5 điểm)

Cho hàm số bậc nhất $y = (m-2)x + m + 1$ với m là tham số có đồ thị là đường thẳng (d) .

1. Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -1)$. Vẽ (d) với m vừa tìm được.

2. Với giá trị nào của m thì (d) và đường thẳng $(d'): y = 1 - 3x$ song song với nhau ?

3. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; 4\text{cm})$, đường kính AB . Lấy điểm H thuộc đoạn AO sao cho $OH = 1\text{cm}$. Kẻ dây cung DC vuông góc với AB tại H

1. Chứng minh: $\triangle ABC$ vuông và tính độ dài AC

2. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại E . Chứng minh $\triangle CBD$ cân và $\frac{EC}{DH} = \frac{EA}{DB}$

3. Gọi I là trung điểm của EA , đoạn IB cắt (O) tại Q . Chứng minh CI là tiếp tuyến của (O) và từ đó suy ra $ICQ = CBI$

4. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt IC tại F . Chứng minh ba đường thẳng IB, HC, AF đồng quy

Bài 5. (0,5 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $P = \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5}}$.

ĐỀ SỐ 9: QUẬN HÀ ĐÔNG

Bài 1. (1,5 điểm). Tìm x , biết

$$1) 2\sqrt{x} + \sqrt{81x} - \sqrt{x} = 20$$

$$2) \sqrt[3]{x-4} = 3$$

Bài 2. (2,5 điểm). Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} \text{ và } B = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{4-\sqrt{x}} - \frac{x-6\sqrt{x}}{x-7\sqrt{x}+12} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9; x \neq 16$$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$.

2) Rút gọn B.

3) Đặt $P = 2(\sqrt{x}-2)B : A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (m^2 + 1)x + m + 2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d .

1) Vẽ đồ thị hàm số trên với $m = 1$.

2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng (-3)

3) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d_1): $y = 2x + 3$

Bài 4. (3,5 điểm) Cho điểm M nằm ngoài đường tròn ($O; R$) sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với ($O; R$) (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của AB và OM.

a) C/m: 4 điểm A, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính tỉ số $\frac{OH}{OM}$

c) Gọi E là giao điểm của CM và đường tròn (O). Chứng minh: $HE \perp BE$

Bài 5. (0,5 điểm) Với x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

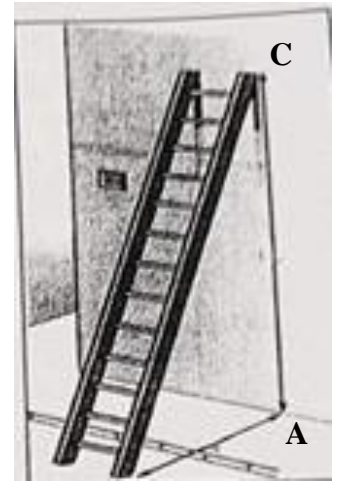
$$\text{biểu thức } Q = 2x^2 - y^2 + x + \frac{1}{x} + 2020$$

ĐỀ SỐ 10: QUẬN BA ĐÌNH

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{12}}{2} + \sqrt{3}$

b) Một chiếc thang dài 3,5m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc an toàn là 75° (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Bài 2. (2,0 điểm)

$A = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$; $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$, với $x \geq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 25$

- a) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 0
- b) Rút gọn biểu thức B
- c) Đặt $P=B:A$. So sánh P với 1

Bài 3. (2,0 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m-1)x - m$ (với m là tham số).

- a) Vẽ đường thẳng (d) khi $m=3$;
- b) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(-1;-3)$;
- c) Tìm m để (d) cùng với hai đường thẳng $(d_1): y = x - \frac{2}{3}$ và $(d_2): y = -x + 1$ đồng quy.

Bài 4. (3,5 điểm) Cho điểm C thuộc đường tròn tâm O đường kính AB , ($AC < BC$). Gọi H là trung điểm BC . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia OH tại D .

- a) Chứng minh rằng: $DH \cdot DO = DB^2$;
- b) Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
- c) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại E . Gọi M là trung điểm của AE . Chứng minh bốn điểm D, B, M, C cùng thuộc một đường tròn.
- d) Gọi I là trung điểm của DH , BI cắt (O) tại F . Chứng minh ba điểm A, H, F thẳng hàng.

Bài 5. (0,5 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{2}(x^2 + 8) = 5\sqrt{x^3 + 8}$.

ĐỀ SỐ 11: QUẬN ĐÔNG ĐÀ

Bài I (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức $T = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} \right) \cdot \sqrt{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1 = 5$

Bài II. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x + 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x > 0$

1) Tính giá trị của A khi $x = 9$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tính giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

Bài III. (2,0 điểm) Cho hai hàm số: $y = -x + 2(d)$ và $y = x + 4(d')$

1) Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

2) (d) cắt (d') tại điểm M. Tìm tọa độ điểm M.

3) (d) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B; (d') cắt Ox tại C, cắt Oy tại D. Tính diện tích tam giác BCM

Bài IV. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường thẳng d vuông góc với OA tại A. Trên đường thẳng d lấy điểm M khác điểm A. Qua điểm M vẽ hai tiếp tuyến ME và MF tới đường tròn (O) (E và F là các tiếp điểm). EF cắt OM và OA lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh: H là trung điểm của EF.

2) Chứng minh rằng bốn điểm O,M,A,F cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh : $OK.OA=R^2$.

4) Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d để tam giác OHK có diện tích lớn nhất

Bài V. (0,5 điểm) Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện : $x + y \geq 1$ và $x > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = y^2 + \frac{8x^2 + y}{4x}$.

ĐỀ SỐ 12: QUẬN ĐÔNG ANH

Bài I: (1 điểm) Rút gọn biểu thức:

a) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3}$

b) $\frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

Bài II: (2 điểm): Giải phương trình:

a) $\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{4x-8} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-50} = 3\sqrt{x-2} - 1$

Bài III: (2 điểm) Cho $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ (ĐK: $x \geq 0, x \neq 4$)

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

b) Rút gọn biểu thức $P = B:A$.

c) Tìm giá trị của x để $P > 0$

Bài IV: (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = x + 5$ có đồ thị (d_1) và hàm số $y = -2x - 1$ có đồ thị (d_2)

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Xác định tọa độ giao điểm A của hai đồ thị hàm số trên bằng phương pháp đại số.

c) Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên và trục hoành.

Bài V: (3 điểm) Cho đường tròn (O:R) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn đó, qua A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (O:R), B và C là các tiếp điểm. vẽ đường kính BOD của (O).

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $DC \parallel OA$

c) Đường trung trực của BD cắt đường thẳng CD tại E. Chứng minh rằng tứ giác OCEA là hình thang cân.

Bài VI: (0,5 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

Chứng minh: $\sqrt{x+2y} + \sqrt{y+2z} + \sqrt{z+2x} \leq 3$.

ĐỀ SỐ 13: HUYỆN GIA LÂM

Bài 1: (2,0 điểm)

Câu 1) Rút gọn biểu thức:

a) $7\sqrt{3} + \sqrt{363} - \sqrt{48}$

b) $3\sqrt{7} - \sqrt{11-4\sqrt{7}}$

Câu 2) Giải phương trình và hệ phương trình:

a) $\sqrt{4x+12} - 3\sqrt{3+x} + 7\sqrt{9x+27} = 20$

b) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

Bài 2: (2,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức sau: $B = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $M = A.B < 0$.

Bài 3: (2,0 điểm) Cho ba đường thẳng:

$(d_1): y = x + 2$ $(d_2): y = 2x + 1$ $(d_3): y = (m^2 + 1)x + m$

a) Vẽ $(d_1); (d_2)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Xác định m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Bài 4: (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: OA là đường trung trực của BC .

c) Lấy D là điểm đối xứng với B qua O . Gọi E là giao điểm của đoạn thẳng AD với (O) (E không trùng với D). Chứng minh: $DE.BA = BD.BE$.

d) Tính số đo góc HEC

Bài 5: (0,5 điểm) Cho : $a + b \geq 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

ĐỀ SỐ 14: HUYỆN THƯỜNG TÍN

Bài 1 (2,5 điểm): Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

- a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.
- b) Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{4}$
- c) Tìm x để $P < 2$

Bài 2 (1,5 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

b) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - \sqrt{4x-20} = 18$

Bài 3. (3 điểm) Cho hàm số $y = (m-1)x + 26$. Hãy xác định m để:

- a) Hàm số trên đồng biến.
- b) Đồ thị của hàm số đi qua $A(1; -2)$
- c) Đồ thị của hàm số đã cho song song với đồ thị hàm số $y = (4023-m)x - 11$

Bài 4. (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O bán kính $3cm$. Từ một điểm A cách O là $5cm$ vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm)

- a) Chứng minh AO vuông góc với BC
- b) Kẻ đường kính BD . Chứng minh rằng DC song song với OA
- c) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC
- d) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BD , đường thẳng này cắt tia DC tại E . Đường thẳng AE và OC cắt nhau ở I , đường thẳng OE và AC cắt nhau ở G .
Chứng minh IG là trung trực của đoạn thẳng OA .

Bài 5. (0,5 điểm) Với $x > 0$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2017$

PHẦN B: ĐÁP ÁN

ĐÁP ÁN QUẬN CẦU GIẤY

Bài I. (3 điểm): Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Chứng minh $A = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$.

b) Tìm x biết $A = \frac{-2}{3}$.

c) Cho x là số nguyên, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Lời giải

a) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} - \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{-4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}$$

$$A = \frac{-4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{-4}{\sqrt{x+2}}$$

b) $A = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x+2}} = \frac{-2}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 16 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x = 16$.

c) Ta có: x nguyên và $x > 0, x \neq 4$ thì $x \geq 1, x \neq 4, x \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có: } x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{-4}{3} \Leftrightarrow P \geq \frac{-4}{3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{-4}{3}$ khi $x = 1$.

Bài II. (2,5 điểm): Cho hàm số $y = (m+1)x + 3$ (d) (m là tham số, $m \neq -1$)

a) Tìm m để hàm số trên là hàm số đồng biến.

b) Khi $m = 2$, hãy vẽ đồ thị hàm số đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy và tính khoảng cách từ O đến đường thẳng (d).

c) Đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + 3$ (d') tại điểm M . Gọi N và P lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d) và (d') với trục hoành Ox . Tìm m để diện tích tam giác OMP bằng 2 lần diện tích tam giác OMN .

Lời giải

a) Hàm số đã cho đồng biến khi $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

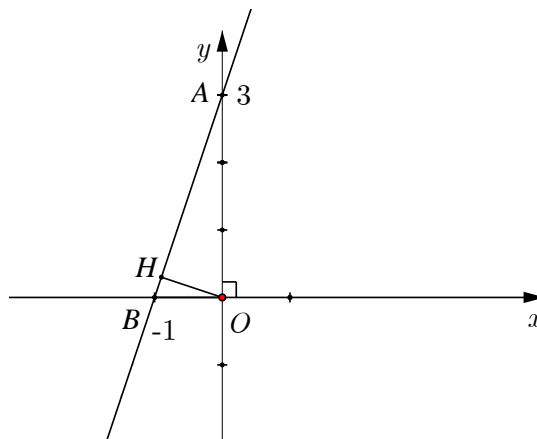
b) Khi $m = 2$ hàm số có dạng $y = 3x + 3$.

* Cho $x = 0$ thì $y = 3$

Cho $y = 0$ thì $x = -1$

\Rightarrow Đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 3)$ và $(-1; 0)$ là đồ thị hàm số $y = 3x + 3$.

* Vẽ đồ thị hàm số trên mặt phẳng tọa độ Oxy



Gọi $A(0; 3)$ và $B(-1; 0)$ nên $OA = 3$, $OB = 1$.

Kẻ OH vuông góc với d tại H .

Xét tam giác OAB vuông tại O , đường cao OH

Có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{1^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

c) Hai đường thẳng (d) và (d') cắt nhau khi và chỉ khi $m+1 \neq \frac{-3}{2} \Leftrightarrow m \neq \frac{-5}{2}$

Hoành độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của phương trình

$$(m+1)x+3 = \frac{-3}{2}x+3 \Leftrightarrow x=0$$

Mà $y = \frac{-3}{2}x+3 \Rightarrow y=3$

(d) cắt (d') tại điểm $M(0;3)$

N là giao điểm của (d) với trục Ox nên $N\left(\frac{-3}{m+1};0\right)$

P là giao điểm của (d') với trục Ox nên $P(2;0)$

Suy ra $ON = \frac{3}{|m+1|}$; $OP = 2$

Ta có $S_{OMP} = 2S_{OMN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OM.OP = 2.\frac{1}{2}.OM.ON \Leftrightarrow OP = 2ON$

$$\Rightarrow 2 = 2.\frac{3}{|m+1|} \Leftrightarrow |m+1| = 3 \Leftrightarrow m \in \{2; -4\} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $m \in \{2; -4\}$.

Bài III. (4 điểm)

1) Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 6 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay lên cao được bao nhiêu ki-lô-mét theo phương thẳng đứng

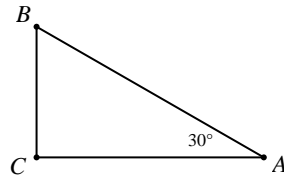
2) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó. Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ M kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O) (C là tiếp điểm)

Tia MC cắt By tại D .

- a) Chứng minh $MD = MA + BD$ và $\triangle OMD$ vuông.
- b) Cho $AM = 2R$. Tính BD và chu vi tứ giác $ABDM$.
- c) Tia AC cắt tia By tại K . Chứng minh $OK \perp BM$.

Lời giải

1) Đổi 6 phút = 0,1 giờ.

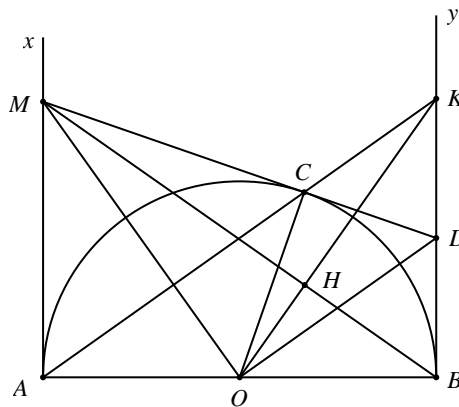


Gọi AB là đoạn đường máy bay bay lên trong 6 phút thì BC chính là độ cao máy bay đạt được sau 6 phút.

Sau 6 phút máy bay bay được quãng đường là $AB = 500 \cdot 0,1 = 50$ km.

Độ cao của máy bay là $BC = 50 \cdot \sin A = 50 \cdot \sin 30^\circ = 25$ km.

2)



a) * Xét (O):

MA, MC là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M với tiếp điểm A và $C \Rightarrow MA = MC$.

DC, DB là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại D với tiếp điểm B và $C \Rightarrow DB = DC$.

Mà $MD = MC + CD$

$\Rightarrow MD = MA + DB$.

* Xét (O):

MA, MC là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M với tiếp điểm A và $C \Rightarrow OM$ là tia phân giác của AOC .

DC, DB là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại D với tiếp điểm B và $C \Rightarrow OD$ là tia phân giác của COB .

Mà AOC và COB là hai góc kề bù

$\Rightarrow OM \perp OD$ tại D .

$\Rightarrow MOD = 90^\circ$ nên $\triangle OMD$ vuông tại O .

b) $AM = 2R \Rightarrow MC = 2R$

Xét tam giác MOD vuông tại O , đường cao OC , có:

$MC \cdot DC = OM^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow 2R \cdot CD = R^2 \Rightarrow CD = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow CD = DB = \frac{R}{2}$$

Do đó chu vi tứ giác $ABDM$ là:

$$\begin{aligned} AB + BD + DM + MA &= AB + DB + DC + CM + AM \\ &= 2R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + 2R + 2R = 7R \end{aligned}$$

c) * Chứng minh: $\triangle AMO$ đồng dạng với $\triangle BAK$ ($MAO = ABK = 90^\circ$; $AOM = BKA$ vì cùng phụ với KAB)

$$\text{Suy ra } \frac{AM}{AB} = \frac{AO}{BK} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{BO}{BK} \Rightarrow \tan MBA = \tan OKB \Rightarrow MBA = OKB$$

Gọi H là giao điểm của OK và BM

Ta có $MBA = OKB \Rightarrow HBO = OKB$

Mà $OKB + KOB = 90^\circ$ ($\triangle OBK$ vuông tại B)

$$\Rightarrow HBO + KOB = 90^\circ$$

Hay $HBO + HOB = 90^\circ \Rightarrow OHB = 90^\circ \Rightarrow OK \perp BM$ tại H .

Bài IV. (0,5 điểm): Giải phương trình: $\sqrt{2020x - 2019} + 2019x + 2019 = \sqrt{2019x - 2020}$.

Lời giải

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{2020}{2019}$$

$$\sqrt{2020x - 2019} + 2019x + 2019 = \sqrt{2019x - 2020}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2020x - 2019} - \sqrt{2019x - 2020} = -2019(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2020x - 2019 - 2019x + 2020 = -2019(x + 1) \left(\sqrt{2020x - 2019} + \sqrt{2019x - 2020} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1) \left[1 + 2019 \left(\sqrt{2020x - 2019} + \sqrt{2019x - 2020} \right) \right] = 0$$

Suy ra $x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

ĐÁP ÁN QUẬN HAI BÀ TRUNG

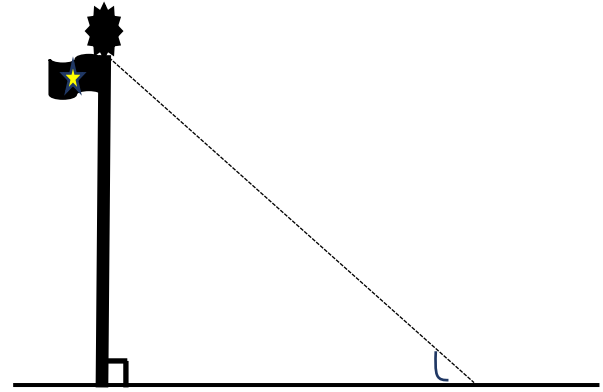
Bài 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} - 5\sqrt{45}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - 5\sqrt{2}$

2) Một cột cờ vuông góc với mặt đất có bóng dài 12m, tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc là 35° (hình vẽ bên). Tính chiều cao của cột cờ?



Lời giải

1)

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 15\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b)

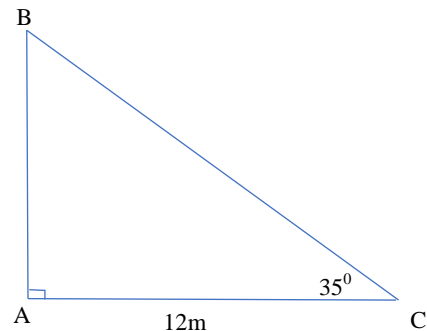
$$\begin{aligned} & \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - 5\sqrt{2} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} - 2|\sqrt{2}-\sqrt{3}| - 5\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 5\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

2)

* Chiều cao của cột cờ là AB

Do $\triangle ABC$ vuông tại A nên ta có:

$$\begin{aligned} AB &= AC \cdot \tan C \\ &= 12 \cdot \tan 35^\circ \\ &= 8,402(m) \end{aligned}$$



Bài 2. (2,0 điểm) Cho các biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \text{ và } B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ (ĐK: } x \geq 0; x \neq 4).$$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

$$\text{Có: } x = 36(TM) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6$$

Thay $\sqrt{x} = 6$ vào biểu thức A có:

$$A = \frac{6}{6+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{3}{4} \text{ khi } x = 36$$

2) Rút gọn biểu thức B .

$$B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad (\text{ĐK } x \geq 0; x \neq 4)$$

$$B = \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

3) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

$$P = A.B \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \quad (\text{ĐK: } x \geq 0; x \neq 4)$$

$$P = \frac{x}{x-4} = 1 + \frac{4}{x-4}$$

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\} \Rightarrow x \in \{0; 2; 3; 5; 6; 8\}$$

Kết hợp điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow x \in \{0; 2; 3; 5; 6; 8\}$ thì $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho hàm số bậc nhất $y = (m+1)x + 2$ có đồ thị (d) (m là tham số và $m \neq -1$)

a) Vẽ (d) khi $m = 0$

b) Xác định m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 1$

c) Xác định m để (d) cắt hai trục Ox, Oy tại A và B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích).

Lời giải

a) Khi $m = 0$ ta có hàm số $y = x + 2$

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

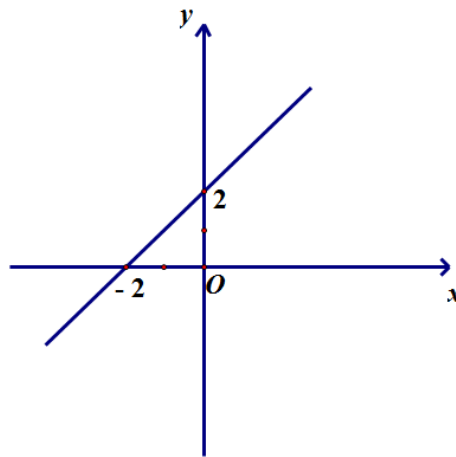
$a = 1 > 0$ hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

Lập bảng:

x	0	-2
y	2	0

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(-2; 0)$

Vẽ đồ thị:



b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 2 \\ 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

c) Xét hàm số: $y = (m+1)x + 2$ (d). Gọi A và B là giao điểm của (d) với các trục hoành và trục tung.

Giao với Ox : Cho $y = 0 \Rightarrow (m+1)x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{m+1} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{m+1}; 0\right)$

Giao với Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0; 2)$

Ta có $OA = \left|-\frac{2}{m+1}\right| = \frac{2}{|m+1|}$; $OB = 2$, tam giác OAB vuông tại O suy ra

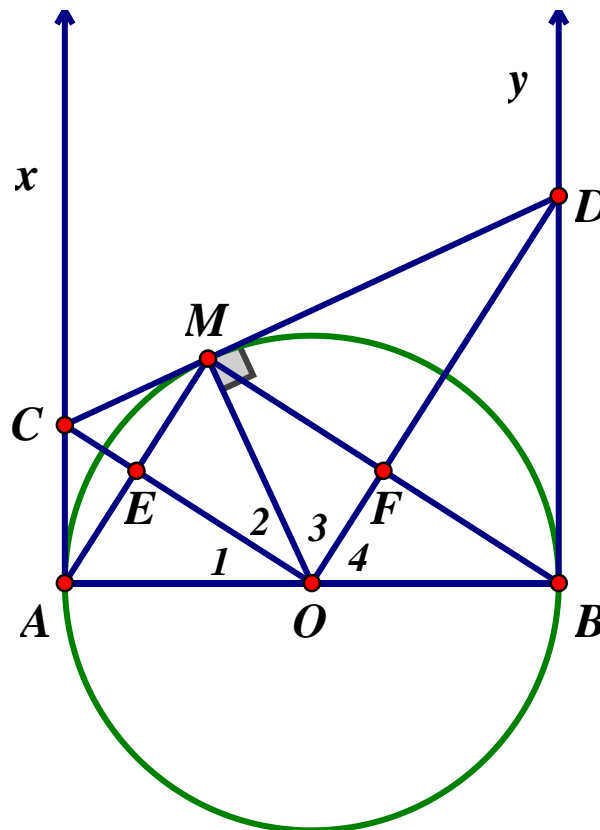
$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|m+1|} \cdot 2 = \frac{2}{|m+1|} = 2 \Leftrightarrow |m+1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 1 \\ m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (Tm đk)}$$

Vậy với $m = 0; m = -2$ thì (d) cắt hai trục Ox, Oy tại A và B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích).

Bài 4. (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax, By . Từ điểm M tùy ý thuộc nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D . Gọi E là giao điểm của CO và AM , F là giao điểm DO và BM .

- a) Chứng minh 4 điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh $AC + BD = CD$ và tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật.
- c) Chứng minh tích $AC \cdot BD$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.
- d) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn sao cho diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

Lời giải



a) Vì AC và CM là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$
 $\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{CMO} = 90^\circ \Rightarrow 4$ điểm A, C, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính CO .

b) Xét đường tròn (O) , tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B ở C và D nên ta có
 $AC = CM; BD = MD \Rightarrow AC + BD = CM + MD = CD$

Mà $OM = OA; OM = OB \Rightarrow CO$ là trung trực của AM, OD là trung trực MB
 $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$

Xét đường tròn (O) , tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B ở C và D nên ta có
 $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EOF} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 90^\circ = \widehat{E} = \widehat{F} \Rightarrow$ tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật

c) Xét tam giác vuông OCD có OM là đường cao.

$$\Rightarrow AC \cdot BD = CM \cdot MD = MO^2 \text{ không đổi.}$$

d) Gọi I là trung điểm CD .

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân có OI là đường trung bình

$$\Rightarrow S_{ACDB} = \frac{AC+BD}{2} \times AB = OI \cdot AB \geq OM \cdot AB$$

\Rightarrow Diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất khi M trùng I khi OM vuông góc AB .

Bài 5. (0,5 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1} + 2019 - x$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 2$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2A &= 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} + 4038 - 2x = -\left[(x-2) - 2\sqrt{x-2} + 1\right] - \left[(x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4\right] + 4042 \\ &= -(\sqrt{x-2} - 1)^2 - (\sqrt{x+1} - 2)^2 + 4042. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2A \leq 4042 \Leftrightarrow A \leq 2021.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $\max A = 2021$ khi $x = 3$.

ĐÁP ÁN QUẬN BẮC TỪ LIÊM

Bài 1

1) Thay $x=4$ (TMĐK) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{6}{\sqrt{4}(\sqrt{4}-3)} = \frac{6}{-2} = -3$$

Vậy với $x=4$ thì $A=-3$.

$$2) M = A : B = \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} : \left(\frac{2\sqrt{x}}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} \right)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} : \frac{2\sqrt{x}-2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{6} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

$$3) 3\sqrt{x}+5=2M$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+5=2 \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{x}+5) \cdot \sqrt{x} = 2 \cdot (\sqrt{x}+3)$$

$$\Leftrightarrow 3x+5\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+3\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}-\sqrt{x}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \quad (\text{Vì } \sqrt{x}+2 > 0 \forall x \text{ TMĐK})$$

$$\Leftrightarrow x=1(TM)$$

Vậy $x=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 2

a. Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}. \text{ Vậy: } \dots\dots\dots$$

b) Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có:

$$2\sqrt{12x} - 3\sqrt{3x} + 4\sqrt{48x} = 17 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x} - 3\sqrt{3x} + 16\sqrt{3x} = 17$$

$$\Leftrightarrow 17\sqrt{3x} = 17 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} (tm)$$

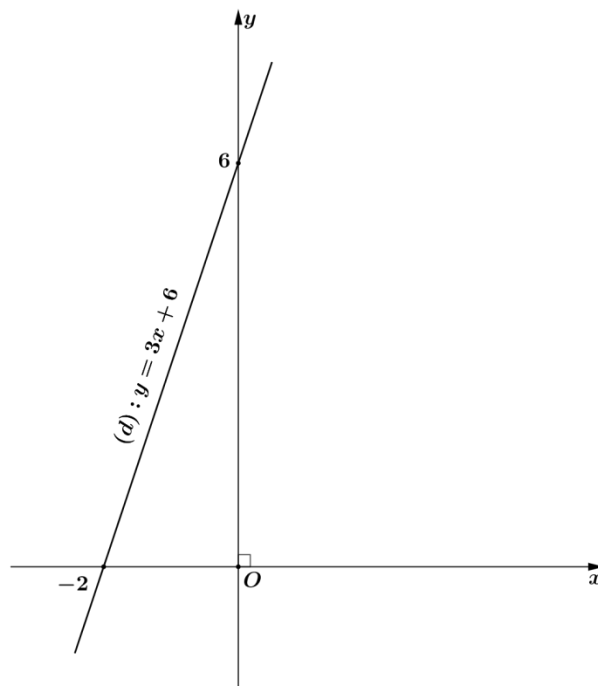
Bài 3:

1) Vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.

Khi $m = 2$, ta có: $y = (2 + 1)x + 6 = 3x + 6$

x	0	-2
$y = 3x + 6$	6	0

Đồ thị hàm số $y = 3x + 6$ là đường thẳng đi qua điểm $(0;6)$ và điểm $(-2;0)$.



2) Gọi đồ thị của hàm số (1) là đường thẳng (d), tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 5x + m - 2$ tại một điểm nằm trên trục tung.

Đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 5x + m - 2$ tại một điểm nằm trên trục tung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ m + 1 \neq 5 \\ m - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 4 \\ m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8$$

Vậy $m = 8$ thì đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 5x + m - 2$ tại một điểm nằm trên trục tung.

3) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $3\sqrt{2}$.

Đồ thị hàm số $y = (m + 1)x + 6$ với $m \neq -1$ là đường thẳng cắt trục Ox tại điểm $A\left(\frac{-6}{m + 1}; 0\right)$

và cắt trục Oy tại điểm $B(0; 6)$

$$\text{Suy ra: } OA = \left| \frac{-6}{m + 1} \right| = \frac{6}{|m + 1|} \text{ và } OB = |6| = 6$$

Kẻ $OH \perp AB$ tại H thì OH chính là khoảng cách từ O đến đường thẳng (d).

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(3\sqrt{2})^2} &= \frac{1}{\frac{36}{(m + 1)^2}} + \frac{1}{36} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{18} &= \frac{(m + 1)^2}{36} + \frac{1}{36} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{18} &= \frac{(m + 1)^2 + 1}{36} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{36} &= \frac{(m + 1)^2 + 1}{36} \\ \Leftrightarrow (m + 1)^2 + 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 + 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow m^2 + 2m + 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0$$

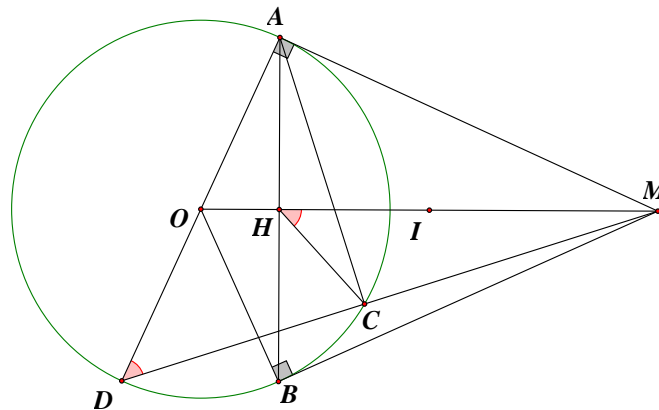
$$\Leftrightarrow m(m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa điều kiện) hoặc } m = -2 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy $m = 0$; $m = -2$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $3\sqrt{2}$.

Bài 4:



a) Gọi I là trung điểm OM

Ta có $\angle MAO = 90^\circ \Rightarrow IO = IA = IM$

Ta có $\angle MBO = 90^\circ \Rightarrow IO = IB = IM$

Vậy M, A, O, B cùng thuộc đường tròn tâm (I, IA)

b) $OA = OB = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB

$MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB

Vậy $MO \perp AB$ tại H .

c) Xét tam giác MAO vuông tại A .

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 \Rightarrow AM = R\sqrt{3}$$

$$\sin \angle AMO = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AMO = 30^\circ \Rightarrow \angle AMB = 60^\circ$$

$$\sin \angle AOM = \frac{AM}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$$

d) Chứng minh tương tự ta có $\angle ACD = 90^\circ$

Xét tam giác MAD vuông tại A , đường cao AC . Ta có $MA^2 = MC \cdot MD$

Xét tam giác MAO vuông tại A , đường cao AH . Ta có $MA^2 = MH \cdot MO$

$$\text{Vậy } MC \cdot MD = MH \cdot MO \Leftrightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$$

Xét hai tam giác MHC và MDO

OMD chung

$$\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$$

Vậy $\triangle MHC \sim \triangle MDO (c - g - c) \Rightarrow MHC = ADC$

Bài 5:

Cách 1: $x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \geq 2$

$$M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow M \geq \frac{5}{2}$$

Giá trị lớn nhất của $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

Cách 2: $x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2}$

$$M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2 + 4xy - 3y^2}{xy} = \frac{(x - 2y)^2}{xy} + 4 - 3 \cdot \frac{y}{x} \geq 0 + 4 - 3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow M \geq \frac{5}{2}$$

Giá trị lớn nhất của $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

Cách 3: $x \geq 2y \Leftrightarrow x - 2y \geq 0$

$$M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{2x^2 - 5xy + 2y^2 + 5xy}{2xy} = \frac{(2x - y)(x - 2y)}{2xy} + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow M \geq \frac{5}{2}$$

Giá trị lớn nhất của $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

Cách 4: $x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2}$

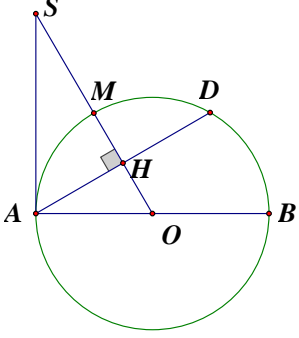
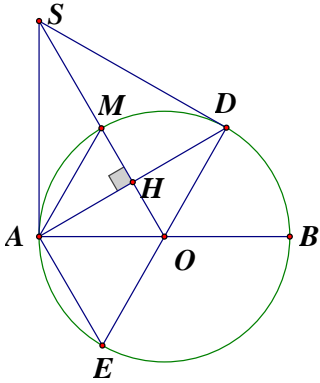
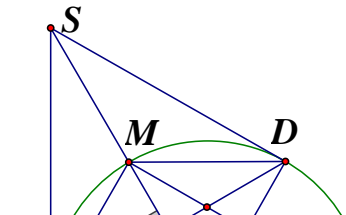
$$M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + 4y^2 - 3y^2}{xy} = \frac{x^2 + 4y^2}{xy} - 3 \cdot \frac{y}{x} \geq \frac{2\sqrt{x^2 \cdot 4y^2}}{xy} - 3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow M \geq \frac{5}{2}$$

Giá trị lớn nhất của $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

ĐÁP ÁN: QUẬN HOÀNG MAI

BÀI	Ý	Nội dung	Điểm
I			2,5 đ
	1)	Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$	1 đ
		$x = 16$ (tmdk)	0,25 đ
		Thay được $x = 16$ vào biểu thức A	0,25đ
		Tính được $A = \frac{-25}{2}$	0,25 đ
		Kết luận	0,25đ
	2)	Rút gọn biểu thức B	1 đ
		$B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$	0,25 đ
		$B = \frac{x + (\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25 đ
		$B = \frac{-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25 đ
		$B = \frac{-1}{\sqrt{x}-2}$ hay $B = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$	0,25 đ
	3)	Tìm x để biểu thức $M = A : B$ thỏa mãn $M - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0$	0,5 đ
		Biến đổi được $M = (\sqrt{x}+1)^2$ $M - 8\sqrt{x} + 8 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 \leq 0$	0,25 đ
		Lập luận : $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn đkxd Tìm được : $x = 9$ (tmdk) Kết luận:	0,25 đ
II			2,5đ
	a)	Vẽ đường thẳng (d) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.	1đ
		Lập luận đường thẳng (d) đi qua (0;-2) và (2;0). Vẽ đồ thị	0,5đ

	b)	<p>Xác định hệ số $a; b$ của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ biết đồ thị hàm số này là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -5)$ và song song với đường thẳng (d).</p> <p>* Lập luận, tìm được $a = 1$ và $b = -2$.</p> <p>* Thay $x = 1; y = -5$ vào công thức $y = ax + b$.</p> <p>* Tính được $b = -6$ (thỏa mãn).</p> <p>Vậy $a = 1; b = -6$.</p>	<p>0,75đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
	c)	<p>Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = (m - 3)x + 5$ (với m là tham số và $m \neq 3$) cắt đường thẳng (d) tại một điểm nằm bên phải trục tung.</p> <p>Đường thẳng (d) và đường thẳng $y = (m - 3)x + 5$ cắt nhau $\Leftrightarrow m \neq 4$.</p> <p>Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là $x - 2 = (m - 3)x + 5$.</p> <p>Tìm được $x = \frac{7}{4 - m}$.</p> <p>Lập luận $x > 0$</p> <p>Tìm được $m < 4; m \neq 3$ và trả lời.</p>	<p>0,75đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
III		<p>Học sinh vẽ tam giác vuông DEF</p> <p>Giả sử DF là chiều cao cột đèn điện, DE là bóng của cột đèn trên mặt đất. Góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là góc E</p> <p>Lập luận $DF = DE \cdot \tan E$</p> <p>Tính được $DF = 7,2 \cdot \tan 42^\circ$ và kết luận $DF \approx 6,48(m)$</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
IV			3,5đ
1	Chứng minh $OH \cdot OS = R^2$		1đ
		Vẽ đúng hình đến câu a	0,25đ
		Chứng minh $\angle SAO = 90^\circ \Rightarrow \Delta SAO$ vuông tại A.	0,25đ

		Chứng minh $OH.OS = OA^2$	0,25đ
		Suy ra $OH.OS = R^2$	0,25đ
2	Chứng minh: SD là tiếp tuyến của đường tròn (O)		1đ
		Chứng minh OH là phân giác AOD	0,25đ
		Chứng minh $\Delta SAO = \Delta SDO$	0,25đ
		Chứng minh SD là tiếp tuyến của đường tròn (O)	0,5đ
3	Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp ΔSAD và tính độ dài đoạn thẳng AE theo R và r		1đ
	Chứng minh SO là phân giác của ΔSAD		0,25đ
	Chứng minh ΔOAM cân tại O $\Rightarrow OMA = OAM$		
	Chứng minh $\Rightarrow SAM = MAH$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow AM$ là phân giác của ΔSAD		0,25đ
	Lập luận, suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp ΔSAD		0,25đ
	Suy ra được $MH = r$ và $OH = R - r$		
	Chứng minh $OH = \frac{AE}{2}$		0,25đ
	Tính được $AE = 2(R - r)$		
4	Chứng minh $\frac{MD^2}{2} = KH.KD$		0,5đ
		- Chứng minh tứ giác AMDO là hình thoi. - Chứng minh K là trọng tâm ΔMOD . - Chứng minh được $KD = \frac{2}{3}HD$, $KH = \frac{1}{3}HD$ $\Rightarrow KH.HD = \frac{2}{9}HD^2$	0,25đ

		<p>Tính được $HD = MD \cdot \sin 60^\circ = R \frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>$= \frac{2}{9} HD^2 = \frac{R^2}{6}$</p> <p>Kết luận</p>	0,25đ
V	<p>Áp dụng BDT Cô si ta chứng minh được</p> $x^2 + \frac{1}{4x} = x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{4}} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4}$ <p>Suy ra được</p> $x^2 + \frac{1}{4x} \geq 1 - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow -3x^2 - \frac{3}{4x} \leq -\frac{9}{4} \quad (1)$ <p>Ta có $4y + \frac{1}{y} \geq 2 \cdot \sqrt{4y \cdot \frac{1}{y}} = 2 \cdot 2 = 4$</p> $x + y \leq 1 \Rightarrow 4x + 4y \leq 4 \Rightarrow 4x - \frac{1}{y} \leq 0$ $\Leftrightarrow 4x^2 - \frac{x}{y} \leq 0 \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.</p>		

ĐÁP ÁN: QUẬN NAM TỪ LIÊM

Bài I (2 điểm):

1. Tính:

$$a) \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{5}{\sqrt{5}+1}$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} - \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Giải

$$a) \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{5}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{5 \cdot (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}+5-5\sqrt{5}+5}{5-1}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$b) \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} - \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= |\sqrt{5}-3| - \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= 3 - \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= 3 - \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

2. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x-1} + \sqrt{9x-9} + \sqrt{4x-4} = 12 \quad (\text{ĐK : } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} = 12$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-1} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad (\text{TM})$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{5\}$

b) $\sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x - 5} = 0$ (ĐK: $x \geq 5$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x \cdot (x - 5)} - \sqrt{x - 5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 5} \cdot (\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 5} = 0 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (TM)} \\ x = 1 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{5\}$

Bài II (2 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{7\sqrt{x+3}}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính A khi $x = 25$

b) Chứng minh: $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A \cdot B$

Hướng dẫn giải

a) $x = 25$ (TMĐK) $\Rightarrow \sqrt{x} = 5$

Thay $x = 25$ và $\sqrt{x} = 5$ vào A ta có: $A = \frac{32}{15}$

Vậy $x = 25$ thì $A = \frac{32}{15}$

b) Chứng minh: $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

Giải: $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{7\sqrt{x+3}}{9-x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})}$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + (\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) - 7\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} = \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x+3} - 7\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})}$$

$$= \frac{3x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \text{ (đpcm).}$$

$$c) P = A.B = \frac{x+7}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$$

Với $x > 0, x \neq 9$ thì $\sqrt{x} + 3 > 0 \Rightarrow \frac{16}{\sqrt{x} + 3} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $\sqrt{x} + 3$ và $\frac{16}{\sqrt{x} + 3}$ ta có:

$$\sqrt{x} + 3 + \frac{16}{\sqrt{x} + 3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 3) \cdot \frac{16}{\sqrt{x} + 3}} = 8$$

Suy ra $\sqrt{x} + 3 + \frac{16}{\sqrt{x} + 3} - 6 \geq 2$

Nên $P \geq 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2

Dấu “=” xảy ra khi

$$\sqrt{x} + 3 = \frac{16}{\sqrt{x} + 3}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 1 (TM) \\ \sqrt{x} + 3 = -4 (L) \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm): Cho đường thẳng $(d_1): y = 2x + 2$

a) Vẽ đường thẳng (d_1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và $(d_2): y = x - 3$

c) Cho đường thẳng $(d_3): y = mx + 5$. Tìm giá trị của m để ba đường thẳng $(d_1); (d_2); (d_3)$ cắt nhau tại một điểm

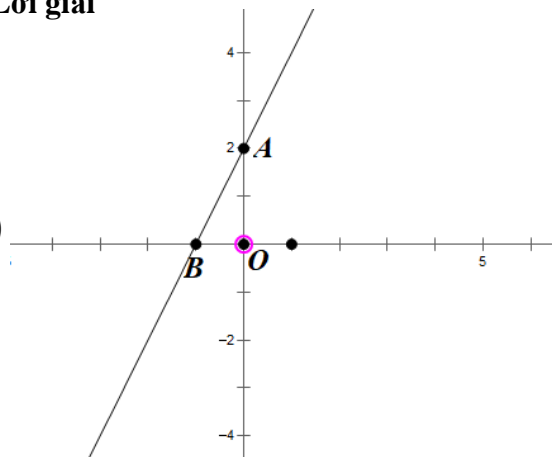
Lời giải

a) Ta có: $(d_1) y = 2x + 2$

+ Với $x = 0$ thì $y = 2 \Rightarrow (d_1)$ đi qua điểm $A(0; 2)$.

+ Với $y = 0$ thì $x = -1 \Rightarrow (d_1)$ đi qua điểm $B(-1; 0)$

Vậy đường thẳng (d_1) đi qua hai điểm A; B



b) Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$2x + 2 = x - 3 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow y = -8$$

Vậy tọa độ giao điểm của $(d_1); (d_2)$ là $C(-5; -8)$

c) Ta có $(d_1) \cap (d_2) = C$ nên để ba đường thẳng cùng đi qua một điểm thì $C \in (d_3)$

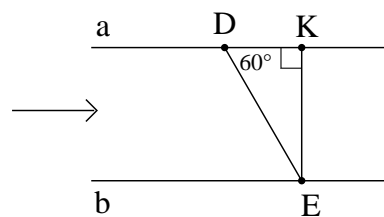
$$\Rightarrow -8 = m \cdot (-5) + 5 \Leftrightarrow m = \frac{13}{5}$$

Vậy với $m = \frac{13}{5}$ thì $(d_1); (d_2); (d_3)$ cùng đi qua một điểm.

Bài IV (3,5 điểm):

1. Một con thuyền ở địa điểm D di chuyển từ bờ sông a sang bờ sông b với vận tốc trung bình là 2km/h, vượt qua khúc sông nước chảy mạnh trong 20 phút. Biết đường đi con thuyền là DE, tạo với bờ sông một góc 60° . Tính chiều rộng khúc sông

Lời giải



$$\text{Đổi } 20 \text{ phút} = \frac{1}{3} (h)$$

$$\text{Quãng đường } DE \text{ dài là: } 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} (km)$$

Qua E kẻ $EK \perp a \Rightarrow \angle DKE = 90^\circ$.

Xét $\triangle KDE$ vuông tại K có:

$$EK = DE \cdot \sin \angle EDK = \frac{2}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,577 (km)$$

Vậy chiều rộng khúc sông là $0,577 (km)$.

2. Lấy điểm A trên $(O; R)$, vẽ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy điểm B, trên $(O; R)$ lấy điểm C sao cho $BC = AB$.

a) Chứng minh rằng: CB là tiếp tuyến của (O) .

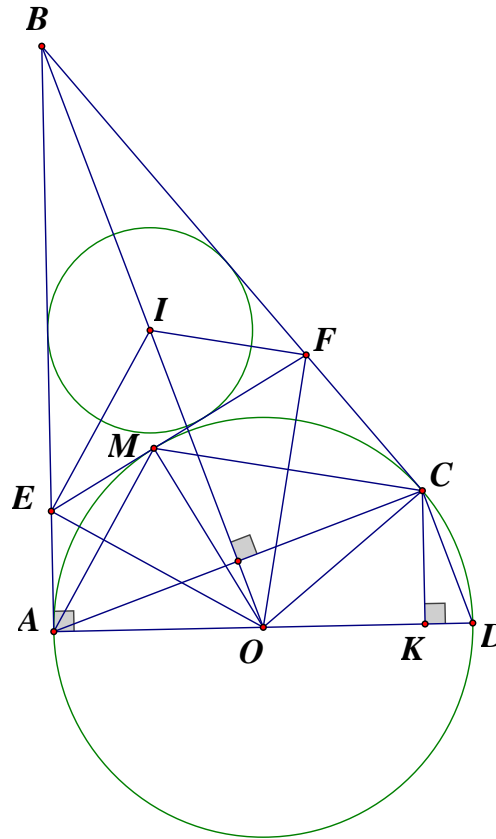
b) Vẽ đường kính AD của (O) , kẻ đường CK vuông góc với AD.

Chứng minh rằng $CD // OB$ và $BC \cdot DC = CK \cdot OB$.

c) Lấy điểm M trên cung nhỏ AC của (O) , vẽ tiếp tuyến tại M cắt AB, BC lần lượt tại E, F .

Vẽ đường tròn tâm I nội tiếp tam giác BFE . Chứng minh rằng $\triangle MAC \sim \triangle IFE$

Lời giải



a) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COB$, có:

$$AB = BC \text{ (gt)}$$

OB chung

$$OA = OC \text{ (=R)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COB \text{ (c-c-c)}$$

Suy ra $\angle BAO = \angle BCO = 90^\circ$

Nên BC là tiếp tuyến của (O)

b) Ta có $\triangle ACD$ nội tiếp (O) , AD là đường kính $\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$ hay $CD \perp AC$

Lại có $OB \perp AC$ (O và B cách đều A và C)

Suy ra $CD // OB$ (Từ vuông góc đến song song).

Ta có: $KCD = CAO$ (cùng phụ góc KDC).

Mà $CAO = ACO$ ($OA = OC = R$).

Nên $KCD = ACO$ (Tính chất bắt cầu).

Suy ra $BOC = CDK$ (cùng phụ với ACO, KCD)

(Cách khác: Ta có $BOC = OCD$ (SLT), mà $OCD = ODC$ (do $OC = CD = R$) nên

$BOC = CDK$ (Tính chất bắt cầu).

Xét $\triangle BCO$ và $\triangle CKD$, có

$$BOC = CDK \text{ (cmt)}$$

$$BCO = CKD \text{ (= } 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle BCO \sim \triangle CKD \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CK} = \frac{BO}{CD} \Rightarrow BC \cdot DC = CK \cdot OB.$$

c) Ta có EI là tia phân giác của góc BEF (gt)

và EO là tia phân giác của góc AEM (định lý)

Suy ra $EI \perp EO$. Mà $AM \perp EO$ nên $EI \parallel AM$.

Chứng minh tương tự ta được $OF \perp IF$ và $IF \parallel MC$.

Từ đó: $IEF = EMA$ (slt) và $IFE = FMC$ (slt).

Lại có: $IEF + IFE = 180^\circ - EIF$

$$EMA + FMC = 180^\circ - AMC$$

Suy ra $EIF = AMC$ (1)

$$\text{Ta có: } IFE + IBF = \frac{1}{2}(EBF + EFB) = \frac{1}{2}(180^\circ - BEF)$$

Lại có:

$$BEF + MEA = 180^\circ \Rightarrow MOA = BEF$$

$$MOA + MEA = 180^\circ$$

Suy ra

$$IFE + IBF = \frac{1}{2}(180^\circ - MOA) = \frac{1}{2}(MAO + AMO) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot MAO = MAO$$

$$\Rightarrow IFE = MAO - IBF$$

Lại có $IBC = KCD$ (vì $\triangle BCO \sim \triangle CKD$ (cmt))

$$\text{nên } \Rightarrow IFE = MAO - KCD = MAO - KAC = MAC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $\triangle MAC \sim \triangle IFE$ (g.g).

Bài V (0,5 điểm) : Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 3xyz$.

$$\text{Tính giá trị nhỏ nhất của: } A = \frac{x^2}{z(z^2 + x^2)} + \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)} + \frac{z^2}{y(y^2 + z^2)}$$

Lời giải:

$$\text{Từ } xy + yz + zx = 3xyz \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3.$$

Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$ ta được $a + b + c = 3$ và $a, b, c > 0$

$$\text{Lúc đó } \frac{x^2}{z(z^2 + x^2)} = \frac{c^3}{a^2 + c^2}; \quad \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)} = \frac{a^3}{a^2 + b^2}; \quad \frac{z^2}{y(y^2 + z^2)} = \frac{b^3}{b^2 + c^2}$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{a^2 + c^2}$$

$$\text{Xét: } \frac{a^3}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Ta có } \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{b}{2} \Leftrightarrow b(a - b)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a, b > 0, \text{ Dấu bằng } \Leftrightarrow a = b.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^3}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \geq a - \frac{b}{2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự với } a, b, c > 0 \text{ ta được: } \frac{b^3}{b^2 + c^2} \geq b - \frac{c}{2} \quad (2); \quad \frac{c^3}{a^2 + c^2} \geq c - \frac{a}{2} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có: } A = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{a^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu bằng } \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = \frac{3}{2} \text{ khi } x = y = z = 1.$$

ĐÁP ÁN : QUẬN LONG BIÊN

Bài 1 (1,5điểm). Thực hiện phép tính.

a) $-3\sqrt{80} + 7\sqrt{45} - \sqrt{500}$ b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{19+8\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} - \frac{5}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{28}-2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Lời giải

a) $-3\sqrt{80} + 7\sqrt{45} - \sqrt{500}$
 $= -12\sqrt{5} + 21\sqrt{5} - 10\sqrt{5}$
 $= -\sqrt{5}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{19+8\sqrt{3}}$
 $= |\sqrt{3}-2| + \sqrt{(4+\sqrt{3})^2}$
 $= 2-\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 6$

c) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} - \frac{5}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{28}-2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$
 $= \sqrt{2} - \frac{5(1-\sqrt{2})}{1-2} + \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$
 $= \sqrt{2} + 5 - 5\sqrt{2} + 2 = 7 - 4\sqrt{2}$

Bài 2 (2 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}\right)$

Lời giải

a) Rút gọn P:

$$P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}\right)$$

$$= \left(\frac{x+\sqrt{x}-x-2}{\sqrt{x+1}}\right) : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}) + \sqrt{x-4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}} : \frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}} : \frac{x-4}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$$

b) Tính giá trị của P với $x = 4 - 2\sqrt{3}$. ĐKXĐ $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

Với $x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$ (thỏa mãn ĐKXĐ) $\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}-1$.

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{3}-1$ vào P, ta có :

$$P = \frac{\sqrt{3}-1-1}{\sqrt{3}-1+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{3-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2}{2} = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $P = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$ tại $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

c) Tìm số nguyên x để biểu thức P có giá trị nguyên.

$$P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 : \sqrt{x}+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+2 \in U_{(3)} = \{1; 3\} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy không có giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 3. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = -0,5x$ có đồ thị là (d_1) và hàm số $y = x + 2$ có đồ thị là (d_2)

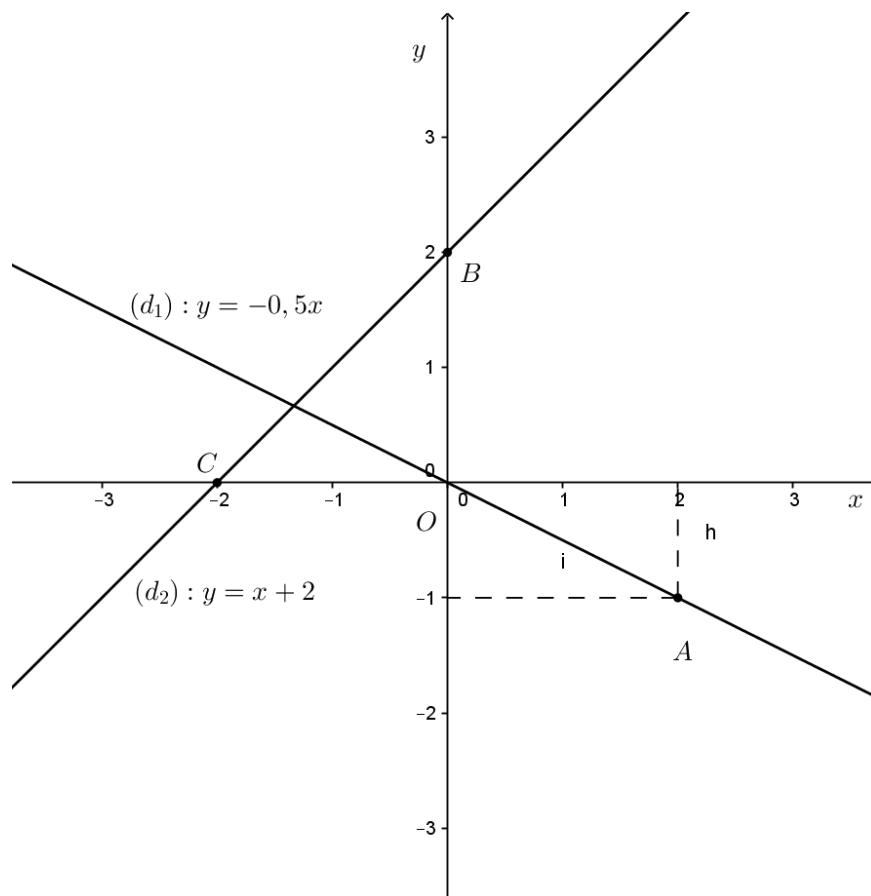
a) Vẽ đồ thị (d_1) và (d_2) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Xác định hệ số a, b của đường thẳng $(d): y = ax + b$ biết rằng (d) song song với (d_1) và (d) cắt (d_2) tại một điểm có tung độ bằng -3 .

Lời giải

a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -0,5x$: $O(0; 0)$ và $A(2; -1)$

Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = x + 2$: $B(0; 2)$ và $C(-2; 0)$



b) Ta có: (d) song song với $(d_1) \Rightarrow \begin{cases} a = -0,5 \\ b \neq 0 \end{cases}$. Khi đó $(d): y = -0,5x + b$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm của (d) cắt (d_2)

Ta có: (d) cắt (d_2) tại một điểm có tung độ bằng $-3 \Rightarrow y_0 = -3$

$M(x_0; y_0) \in (d_2) \Rightarrow y_0 = x_0 + 2 \Rightarrow x_0 = y_0 - 2 \Rightarrow x_0 = -3 - 2 \Rightarrow x_0 = -5$

$\Rightarrow (d)$ cắt (d_2) tại điểm có tọa độ $M(-5; -3)$

$\Rightarrow M(-5; -3)$ thuộc (d)

$\Rightarrow -3 = -0,5 \cdot (-5) + b \Rightarrow b = -5,5$

Bài 4 (4,0 điểm).

1) (1,0 điểm) Cho tam giác ABC đường cao AH biết $BC = 5\text{cm}$, $AH = 2\text{cm}$, độ lớn góc $ACB = 30^\circ$. Tìm độ dài AB.

2) (3,0 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B và C là 2 tiếp điểm.)

a) Chứng minh: Bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn và $AO \perp BC$.

b) Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M bất kì ($M \neq B$, $M \neq C$, $M \notin AO$). Tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh: Chu vi $\triangle ADE$ bằng $2AB$.

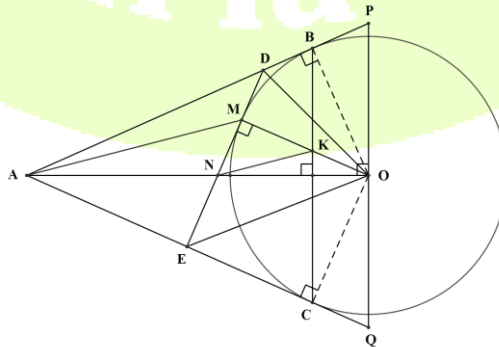
c) Đường thẳng vuông góc với AO tại O cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh: $4PD \cdot QE = PQ^2$.

Giải

1) Tính được $HC = 2\sqrt{3}\text{cm}$; $BH = 5 - 2\sqrt{3}\text{cm}$

$AB = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}} \approx 2,52\text{cm}$

2)



a) Gọi N là trung điểm của AO.

$$\text{suy được: } NB = NA = NO = NC$$

Vậy A, B, O, C cùng thuộc đường tròn tâm N, đường kính AO

- Lập luận được AO là trung trực của đoạn BC.

Suy được: AO vuông góc BC.

b) Chu vi $\triangle ADE = AD + DE + AE$

Mà: $DM = DB$ (tiếp tuyến MD và DB cắt nhau tại D)

$ME = CE$ (tiếp tuyến ME và CE cắt nhau tại E)

Suy được

$$\text{Chu vi } \triangle ADE = AD + DB + AE + EC = AB + AC = 2 AB.$$

c) Theo tính chất của hai tiếp tuyến của đường tròn, ta có:

$$DOM = \frac{1}{2} BOM, \quad MOE = \frac{1}{2} MOC$$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$DOE = \frac{1}{2} BOC$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2} BOC = AOC = OQE \quad (\text{Vì } AOC \text{ và } OQE \text{ cùng phụ với } QAO)$$

$$\text{Nên } DOE = OQE$$

Xét tam giác ODE và tam giác QOE, ta có:

$$DOE = OQE \quad (\text{cmt})$$

$$OED = OEQ \quad (\text{tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau})$$

$$\Rightarrow \triangle ODE \sim \triangle QOE \quad (\text{g,g})$$

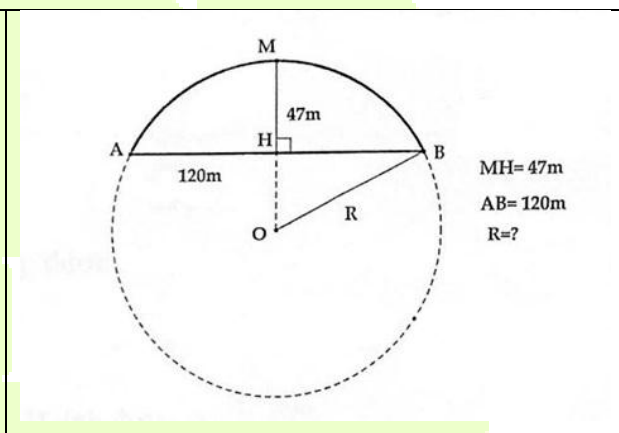
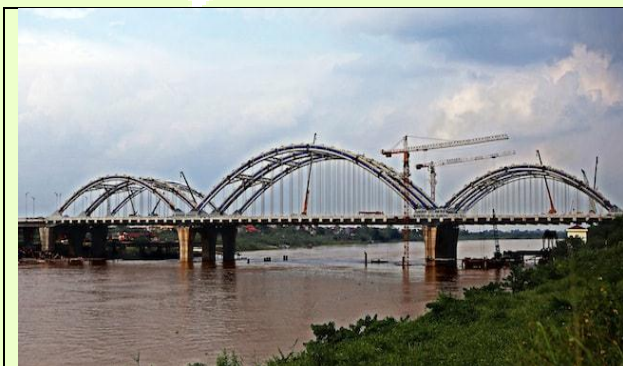
$$\text{Cm tương tự } \Rightarrow \triangle ODE \sim \triangle PDO$$

$$\Rightarrow \triangle QOE \sim \triangle PDO \quad (\text{tc bắc cầu})$$

$$\Rightarrow \frac{QO}{PD} = \frac{QE}{PO} \Rightarrow PD \cdot QE = PO \cdot QO = \frac{PQ}{2} \cdot \frac{PQ}{2} = \frac{PQ^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4PD \cdot QE = PQ^2$$

Bài 5. (1,0 điểm) Cầu Đông Trù bắc qua sông Đuống, nằm trên quốc lộ 5 kéo dài, nối xã Đông Hội, huyện Đông Anh ở phía Bắc Hà Nội và phường Ngọc Thụy, quận Long Biên ở phía Nam Hà Nội. Nhịp giữa dài 120m được thiết kế bằng vòm thép nhồi bê tông có hình một cung tròn. Khoảng cách điểm cao nhất của mái vòm xuống mặt sàn của cầu là 47m. (được mô phỏng hình vẽ dưới). Hãy tính độ dài bán kính R của đường tròn chứa cung tròn là nhịp giữa của cầu Đông Trù? (Kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



Lời giải

Xét đường tròn $(O; R)$ có OH vuông góc với dây cung AB tại H

$\Rightarrow H$ là trung điểm của AB

$$\Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{120}{2} = 60(m)$$

Ta có MH là khoảng cách từ M đến AB nên $MH \perp AB$. Mà $OH \perp AB \Rightarrow H, O, M$ thẳng hàng $\Rightarrow HO = MO - MH \Rightarrow HO = R - 47(m)$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông OHB , ta có

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$\Rightarrow R^2 = (R - 47)^2 + 60^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{5809}{94} \approx 62,00(m)$$

ĐÁP ÁN: QUẬN THANH XUÂN

Bài 1: (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \cot 75^\circ$

2) Giải phương trình: $\sqrt{25x+5} + \sqrt{45}\sqrt{20x+4} - \sqrt{\frac{5x+1}{16}} = \frac{27\sqrt{5}}{4}$

Lời giải

Bài 1: (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \cot 75^\circ$$

$$= \tan 15^\circ + 1 - \cot 75^\circ = \tan 15^\circ + 1 - \tan 15^\circ = 1$$

2) Giải phương trình: $\sqrt{25x+5} + \sqrt{45}\sqrt{20x+4} - \sqrt{\frac{5x+1}{16}} = \frac{27\sqrt{5}}{4}$ ĐKXD:

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\sqrt{5x+1} + 6\sqrt{5}\sqrt{5x+1} - \frac{\sqrt{5x+1}}{4} = \frac{27\sqrt{5}}{4}$$

$$x \geq -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(7\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{5x+1} = \frac{27\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \left(7\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right)\sqrt{5x+1} = \frac{27\sqrt{5}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x+1} = \frac{27\sqrt{5}}{28\sqrt{5}-1} \Leftrightarrow 5x+1 = \left(\frac{27\sqrt{5}}{28\sqrt{5}-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{27\sqrt{5}}{28\sqrt{5}-1}\right)^2 - 1 \right] \text{ (tm ĐK)}$$

Bài 2: (2,0 điểm)

Cho các biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x}$ và $Q = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$;

(Với $x > 1, x \neq 2, x \neq 3$)

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 16$

2) Chứng minh rằng $Q + \sqrt{2} = \sqrt{x}$

3) Tìm x để $P \cdot Q \geq 0$.

Lời giải

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=16$

Với $x=16$ (thỏa mãn ĐKXD) $\Rightarrow \sqrt{x}=4$.

$$\text{Thay } x=16, \sqrt{x}=4 \text{ vào P, ta có: } P = \frac{2}{\sqrt{2}-4} - \frac{4+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-16} = \frac{4-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-16} = -\frac{4-\sqrt{2}}{4(4-\sqrt{2})} = -\frac{1}{4}$$

2) Chứng minh rằng $Q + \sqrt{2} = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1} - \frac{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{x-1-2} \\ &= \sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2} = \sqrt{x}-\sqrt{2} \Rightarrow Q + \sqrt{2} = \sqrt{x} \end{aligned}$$

3) Tìm x để $P.Q \geq 0$.

$$\begin{aligned} M = P.Q &= \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right) (\sqrt{x}-\sqrt{2}) \\ &= \frac{-2\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{2})} \cdot (\sqrt{x}-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$P.Q \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0 \text{ mà } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Kết hợp ĐKXD: $x > 1, x \neq 2, x \neq 3 \Rightarrow 1 < x < 2$ thì $P.Q \geq 0$.

Bài 3: (2 điểm)

Cho hàm số bậc nhất $y = (m+1)x + 2m$ và $y = (2m+1)x + 3m$

- 1) Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song.
- 2) Tìm giá trị của m để giao điểm của hai đồ thị nằm trên trục hoành.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } m \neq 1; m \neq \frac{-1}{2}$$

$$1) \text{ Hai đường thẳng song song khi } \begin{cases} m+1 = 2m+1 \\ 2m \neq 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2) Để 2 đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm trên trục hoành. Khi đó ta có phương trình hoành độ $(m+1)x + 2m = (2m+1)x + 3m \Leftrightarrow xm = -m$

- Nếu $m = 0$ thì 2 đường thẳng trùng nhau

- Nếu $m \neq 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = (m+1).(-1) + 2m = m-1$

Để điểm cắt nhau nằm trên trục hoành thì $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$ (t/m)

Bài 4 (3,5 điểm):

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C, D là hai điểm di chuyển trên cung tròn sao cho góc COD luôn bằng 90° (C nằm giữa A và D). Tiếp tuyến tại C, D cắt đường thẳng AB lần lượt tại F, G . Gọi E là giao điểm của FC và GD .

1/ Tính chu vi của tam giác $\triangle ECD$ theo R .

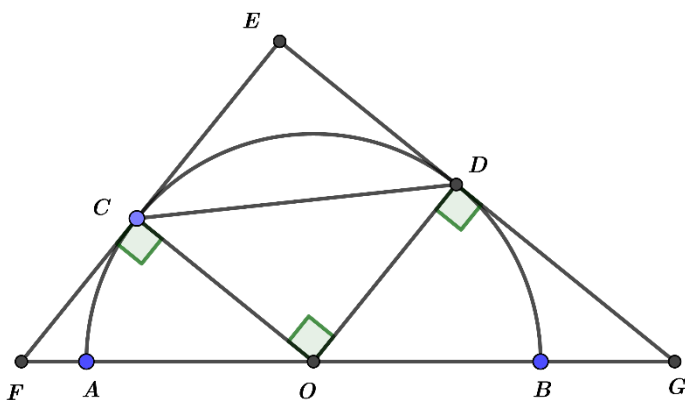
2/ Khi tứ giác $FCDG$ là hình thang cân. Hãy tính tỉ số $\frac{AB}{FG}$.

3/ Chứng minh rằng $FC \cdot DG$ luôn là hằng số.

4/ Tìm vị trí của C, D sao cho tích $AD \cdot BC$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

1/ Xét tứ giác $CODE$ có: $C = O = D = 90^\circ$



Suy ra tứ giác $CODE$ là hình chữ nhật

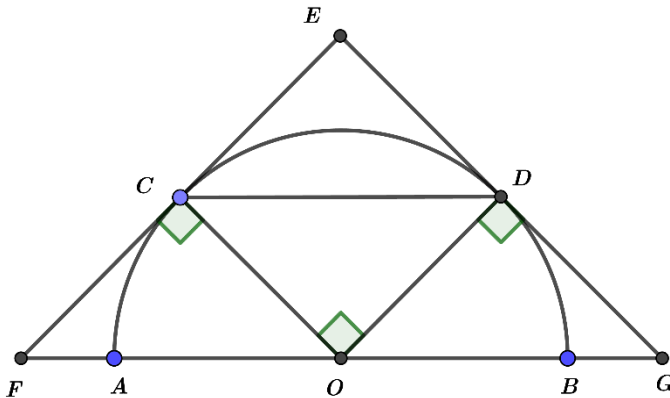
Mà $EC = ED$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Vậy tứ giác $CODE$ là hình vuông $\Rightarrow OC = OD = EC = ED = R$.

Xét $\triangle COD$ vuông tại $O \Rightarrow CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.

Vậy chu vi $\triangle ECD$ là $P_{\triangle ECD} = CD + EC + ED = R\sqrt{2} + R + R = (2 + \sqrt{2})R$.

2/ Hãy tính tỉ số $\frac{AB}{FG}$.



Ta có: $\begin{cases} GD \perp OD \\ OC \perp OD \end{cases} \Rightarrow GD \parallel OC$ và $\begin{cases} FC \perp OC \\ OD \perp OC \end{cases} \Rightarrow FC \parallel OD$

Xét tứ giác $CDGO$ có: $GD \parallel OC$ và $CD \parallel OG$

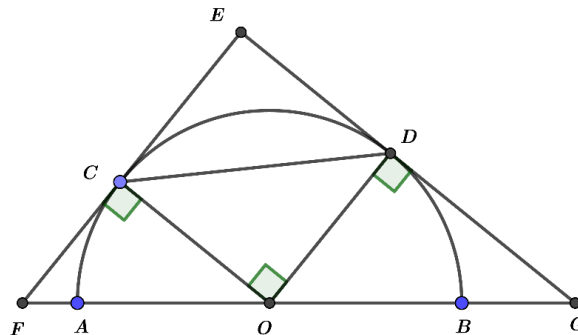
Suy ra tứ giác $CDGO$ là hình bình hành $\Rightarrow CD = OG = R\sqrt{2}$

Xét tứ giác $CDOF$ có: $FC \parallel OD$ và $CD \parallel OF$

Suy ra tứ giác $CDOF$ là hình bình hành $\Rightarrow CD = OF = R\sqrt{2}$

Vậy tỉ số $\frac{AB}{FG} = \frac{AB}{OF + OG} = \frac{2R}{R\sqrt{2} + R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3/ Chứng minh rằng $FC \cdot DG$ luôn là hằng số.



Ta có: $FC \parallel OD \Rightarrow CFO = DOG$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

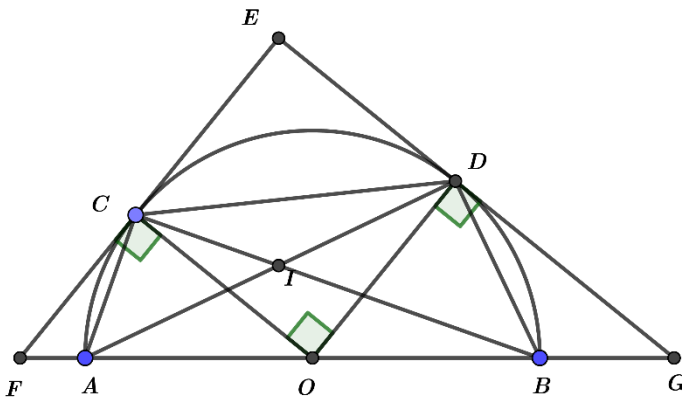
Xét $\triangle CFO$ và $\triangle DOG$ có $CFO = DOG$ và $C = D = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle CFO \sim \triangle DOG$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FC}{OD} = \frac{OC}{DG} \Rightarrow FC \cdot DG = OC \cdot OD = R \cdot R = R^2$$

Vậy $FC \cdot DG$ luôn là hằng số.

4/ Tìm vị trí của C, D sao cho tích $AD \cdot BC$ đạt giá trị lớn nhất.



Gọi giao điểm của CB và AD là I .

Khi đó ta có các tam giác $\triangle ACI; \triangle BDI$ vuông cân tại C, D .

Đặt $AC = x; BD = y$ suy ra $AD \cdot BC = (y + x\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 3xy + (x^2 + y^2)\sqrt{2}$.

Ta có: $AC^2 + CB^2 + BD^2 + AD^2 = 8R^2$

$$\Rightarrow 4(x^2 + y^2) + 4xy\sqrt{2} = 8R^2 \geq 8xy + 4xy\sqrt{2} \Leftrightarrow xy \leq \frac{8R^2}{8 + 4\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Ta có $2\sqrt{2}AD \cdot BC - 8R^2 = 2xy\sqrt{2}$. Vậy để tích $AD \cdot BC$ lớn nhất thì $x = y$ khi đó C, D là điểm chính giữa của các cung phần tư thứ nhất và thứ hai trên nửa đường tròn đã cho.

Câu 5: (0,5 điểm)

Với hai số x, y dương thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(y+1)^2}} + \frac{4}{(x+1)(y+1)}$$

Lời giải

Với $a > 0$ ta có $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = \left| 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right| = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

$$\Rightarrow T = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(y+1)^2}} + \frac{4}{(x+1)(y+1)}$$

$$T = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{4}{(x+1)(y+1)}$$

$$T = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Giả sử $M > 0$ là giá trị lớn nhất của T.

Khi đó nếu chọn $\frac{1}{x} = M + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{M+1} \in (0;1)$; $y = 2 - \frac{1}{M+1} > 0$ khi đó x, y vừa chọn thỏa mãn là các số dương $x + y = 2$. Với bộ x, y vừa chọn ta có

$T = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 2 + M + 1 > M$. Vậy không tồn tại giá trị lớn nhất của T.

ĐÁP ÁN QUẬN HOÀN KIẾM

Câu 1. (2 điểm)

1. Tính giá trị của $P = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$

2. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 2$ với x là ẩn số thực

Lời giải

1. Ta có: $P = \frac{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2-1} - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow P = 4 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P = 3$$

Vậy $P = 3$

2. Giải phương trình

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$

Với điều kiện xác định trên, phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 2(\sqrt{x} - 1)$$

Biến đổi ta được $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm $x = 9$

Câu 2. (2 điểm)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1. Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{4}$

2. Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$

3. Tìm x để biểu thức $P \geq 1$

Lời giải

1. Tính giá trị của A

Ta có $x = \frac{1}{4}$ (TMĐK)

Thay vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-1}}{\frac{1}{4}-1} = \frac{2}{3}$

2. Rút gọn P

Ta có $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}-1}{x-1}$

Từ đó $P = \frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

3. Tìm x để biểu thức $P \geq 1$

Xét $P-1 = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - 1 = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Với $x=0$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 0 \Rightarrow P=1$ (đúng)

Với $x>0$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Kết hợp với điều kiện xác định $P \geq 1 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x > 1$

Bài 3. Cho hàm số bậc nhất $y = (m-2)x + m + 1$ với m là tham số có đồ thị là đường thẳng (d) .

4. Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -1)$. Vẽ (d) với m vừa tìm được.
5. Với giá trị nào của m thì (d) và đường thẳng (d') : $y = 1 - 3x$ song song với nhau?
6. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.

Lời giải

1. Vì (d) đi qua $A(1; -1)$ nên thay tọa độ của A vào (d) ta được $-1 = (m-2) \cdot 1 + m + 1$. Từ đó tìm được $m = 0$ (thỏa mãn)
2. Tìm m để (d) song song với (d')

Ta có $(d) // (d') \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = -3 \\ m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn)

3. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.

Ta có (d) cắt Oy tại điểm $Bm(0; m+1)$ và (d) cắt Ox tại điểm $C\left(\frac{-m-1}{m-2}; 0\right)$

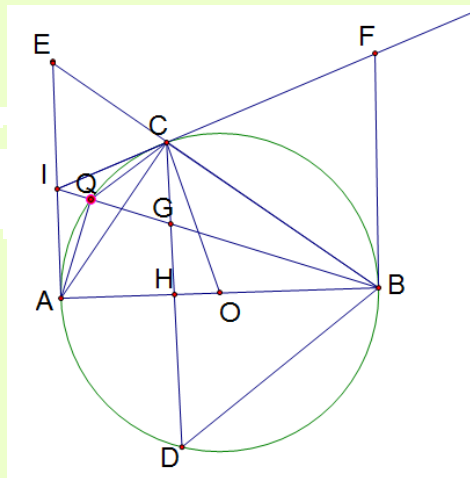
Kẻ OH vuông góc với (d) . Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Giải ra tìm được $m = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Bài 4 (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; 4\text{cm})$, đường kính AB . Lấy điểm H thuộc đoạn AO sao cho $OH = 1\text{cm}$. Kẻ dây cung DC vuông góc với AB tại H

1. Chứng minh: $\triangle ABC$ vuông và tính độ dài AC
2. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại E . Chứng minh $\triangle CBD$ cân và $\frac{EC}{DH} = \frac{EA}{DB}$
3. Gọi I là trung điểm của EA , đoạn IB cắt (O) tại Q . Chứng minh CI là tiếp tuyến của (O) và từ đó suy ra $ICQ = CBI$
4. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt IC tại F . Chứng minh ba đường thẳng IB, HC, AF đồng quy

Lời giải



- a) $\triangle ABC$ nội tiếp (O)
 AB là đường kính
 $\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C
 $\Rightarrow AC^2 = AH \cdot AB = 3 \cdot 8 = 24$
 $\Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$
- b) Xét (O) có
 $AB \perp CD = \{H\}$
 $\Rightarrow H$ là trung điểm của CD
 $\triangle CBD$ có BH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến $\Rightarrow \triangle CBD$ cân
 Có $EA \parallel CD \Rightarrow \angle AEC = \angle DCB$ Mà $\angle BDC = \angle DCB \Rightarrow \angle AEC = \angle CDB$

Xét $\triangle CAE$ và $\triangle HBD$ có

$$AEC = HDB$$

$$ACE = DHB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CAE \sim \triangle HBD$$

$$\Rightarrow \frac{EC}{DH} = \frac{EA}{DB}$$

3) Chứng minh $\triangle IEC$ cân và $\triangle COB$ cân

$$\Rightarrow \angle ECI + \angle OCB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow IC \perp OC$$

Vậy IC là tiếp tuyến của (O)

Chứng minh được $IC=IA$ và $\triangle IQC \sim \triangle ICB \Rightarrow ICQ = CBI$

4) Gọi G là giao điểm của IB và HC

$$\text{Có } CG \parallel BF \Rightarrow \frac{IC}{CF} = \frac{IG}{GB} \Rightarrow \frac{IA}{BF} = \frac{IG}{GB}$$

$$\text{Mà } IGA = GBF \Rightarrow \triangle AIG \sim \triangle FBG \Rightarrow IGA = BGF$$

$$\Rightarrow A, G, F \text{ thẳng hàng}$$

Vậy AF, IB, CH đồng quy tại G

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5} \\ &= \sqrt{6(x^2 + xy + yz + zx)} + \sqrt{6(y^2 + xy + yz + zx)} + \sqrt{z^2 + xy + yz + zx} \\ &= \sqrt{6(x+y)(x+z)} + \sqrt{6(y+z)(y+x)} + \sqrt{(z+x)(z+y)} \\ &\leq \frac{3(x+y) + 2(x+z)}{2} + \frac{3(x+y) + 2(y+z)}{2} + \frac{(z+x) + (z+y)}{2} \\ &\leq \frac{9x + 9y + 6z}{2} = \frac{3}{2}(3x + 3y + 2z) \\ P &= \frac{3x + 3y + 2z}{\sqrt{6(x^2 + 5)} + \sqrt{6(y^2 + 5)} + \sqrt{z^2 + 5}} \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1; z = 2$. Vậy $P_{\min} = \frac{2}{3}$

ĐÁP ÁN: QUẬN HÀ ĐÔNG

Bài 1: (1,5 điểm). Tìm x , biết

$$1) 2\sqrt{x} + \sqrt{81x} - \sqrt{x} = 20 (x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 9\sqrt{x} - \sqrt{x} = 20$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 (\text{tmdk})$$

$$S = \{4\}$$

$$2) \sqrt[3]{x-4} = 3$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 31$$

$$S = \{31\}$$

Bài 2: (2,5 điểm). Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} \text{ và } B = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{4-\sqrt{x}} - \frac{x-6\sqrt{x}}{x-7\sqrt{x}+12} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9; x \neq 16$$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$.

$$x = 25 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 (tm)$$

$$\text{Thay } \sqrt{x} = 5 (tm) \text{ vào } A, \text{ ta có } A = \frac{5+1}{5-4} = \frac{6}{1} = 6$$

Vậy $A = 6$ khi $x = 25$

2) Rút gọn B.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{4-\sqrt{x}} - \frac{x-6\sqrt{x}}{x-7\sqrt{x}+12} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4} - \frac{x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} - \frac{x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-4} \end{aligned}$$

3) Đặt $P = 2(\sqrt{x} - 2)B : A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

$$\begin{aligned} P &= 2(\sqrt{x} - 2) \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 4} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} + 1} \\ &= 2 - \frac{6}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$\forall \sqrt{x} \geq 0, \forall x \in \text{dkxd} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-6}{\sqrt{x} + 1} \geq -6 \Leftrightarrow 2 - \frac{6}{\sqrt{x} + 1} \geq -4$$

Min $P = -4$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 (tm)$

Bài 3. (2,0 điểm)

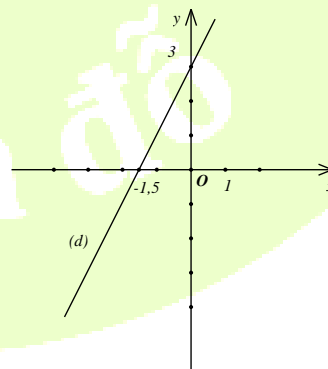
Cho hàm số $y = (m^2 + 1)x + m + 2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d .

- 1) Vẽ đồ thị hàm số trên với $m = 1$.
- 2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng (-3)
- 3) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d_1): $y = 2x + 3$

Giải

Ta có hàm số $y = (m^2 + 1)x + m + 2$
(m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d .

- 1) Với $m = 1$ ta có: (d): $y = 2x + 3$



x	0	$-\frac{3}{2}$
$y = 2x + 3$	3	0

2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng (-3)

Để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $(-3) \Leftrightarrow m+2 = -3 \Leftrightarrow m = -5$

Vậy $m = -5$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng (-3)

3) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_1): y = 2x + 3$

Để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_1): y = 2x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 = 2 \\ m + 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

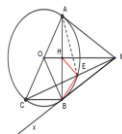
Vậy $m = -1$ thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_1): y = 2x + 3$

Bài 4.

Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với $(O; R)$ (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của AB và OM .

- C/m: 4 điểm A, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.
- Tính tỉ số $\frac{OH}{OM}$
- Gọi E là giao điểm của CM và đường tròn (O) . Chứng minh: $HE \perp BE$

Giải :



a) Ta có:

$$+ MAO = 90^0 \text{ (MA là tiếp tuyến của (O))}$$

$\Rightarrow A \in$ thuộc đường tròn đường kính MO.

$$+ MBO = 90^0 \text{ (MB là tiếp tuyến của (O))}$$

$\Rightarrow B \in$ thuộc đường tròn đường kính MO.

Suy ra: 4 điểm A , O , B , M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO.

b) ta có: $MA = MB$ (T/c hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R$

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại H.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOM, đường cao AH có:

$$OH \cdot OM = OA^2 \Rightarrow OH = \frac{OA^2}{OM} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OM} = \frac{\frac{R}{2}}{2R} = \frac{1}{4}$$

c) Vẽ tia Bx là tia đối của tia BM.

Vì ΔAEC nội tiếp đường tròn (O) đường kính là AC $\Rightarrow \Delta AEC$ vuông tại E.

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông AMO và ΔAMC có:

$$MH \cdot MO = ME \cdot MC = MA^2 = MB^2 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{MH}{ME} = \frac{MC}{MO}$$

Suy ra: $\Delta MHE \sim \Delta MCO$ (c.g.c) $\Rightarrow HEC = AOH$ (1)

Tương tự, ta có: $\Delta MEB \sim \Delta MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow CEB = CBx$

Mà: $CBx = OBA$ (cùng phụ với OBC) $\Rightarrow CBE = OBH$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế tương ứng, ta có:

$$\begin{aligned} \Rightarrow HEC + CBE &= AOH + OBH \\ &= AOH + OAH \quad (\text{vì } OBH = OAH) \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

Suy ra: $HE \perp BE$

Bài 5. (0,5 điểm) Với x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 2x^2 - y^2 + x + \frac{1}{x} + 2020$

Giải

Có x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1 \Rightarrow 0 < x, y < 1; y = 1 - x$

$$Q = 2x^2 - y^2 + x + \frac{1}{x} + 2020$$

$$Q = 2x^2 - (1-x)^2 + x + \frac{1}{x} + 2020$$

$$Q = x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 2019$$

$$Q = x^2 - x + \frac{1}{4} + 4x + \frac{1}{x} + \frac{8075}{4}$$

$$Q = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \frac{8075}{4}$$

$$\text{Mà } Q = 4x + \frac{1}{x} \geq 2; Q = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\text{Suy ra } Q \geq 2 + \frac{8075}{4} = \frac{8083}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{8083}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

ĐÁP ÁN: QUẬN BA ĐÌNH

Bài 1:

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{12}}{2} + \sqrt{3}$

b) Một chiếc thang dài 3,5m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc an toàn là 75° (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

a) $A = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{3-4} + \frac{2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = -4$

b) Gọi AB là khoảng cách của chân thang với tường.

BC là chiều dài của thang.

Trong tam giác ABC vuông tại A có:

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 3,5 \cdot \cos 75^\circ \approx 0,9 \text{m}$$

Bài 2: (2 điểm)

$$A = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}; \quad B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25$$

a) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 0

b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $P=B:A$. So sánh P với 1

LỜI GIẢI

$$A = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+5\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

d)



$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{2x+6\sqrt{x} - x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}
 \end{aligned}$$

c)

$$P = B : A$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{8}{\sqrt{x}+3} < 1
 \end{aligned}$$

Bài 3. (2,0 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m-1)x - m$ (với m là tham số).

- Vẽ đường thẳng (d) khi $m=3$;
- Tìm m để (d) đi qua điểm $A(-1;-3)$;
- Tìm m để (d) cùng với hai đường thẳng $(d_1): y = x - \frac{2}{3}$ và $(d_2): y = -x + 1$ đồng quy.

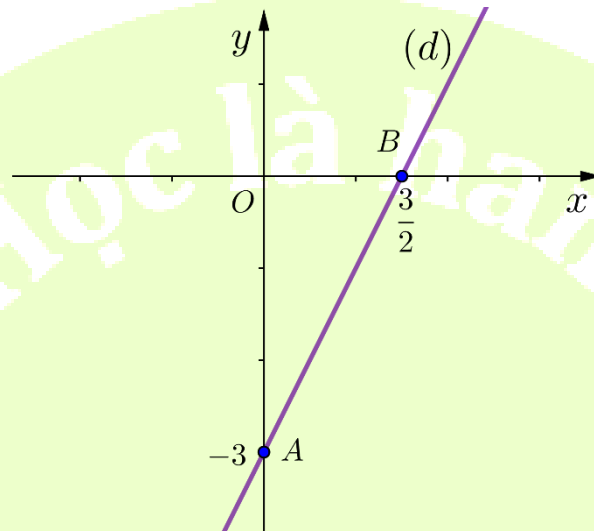
Lời giải

- Với $m=3 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A(0; -3) \in (d)$

- Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}; 0\right) \in (d)$

Nối A với B ta được đồ thị đường thẳng (d) .



b) Để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; -3)$

$$\Leftrightarrow x = -1; y = -3 \text{ thỏa mãn phương trình đường thẳng } (d)$$

$$\Leftrightarrow (m-1) \cdot (-1) - m = -3 \Leftrightarrow -2m = -4 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; -3)$

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) ta có:

$$\Leftrightarrow x - \frac{2}{3} = -x + 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

Với $x = \frac{5}{6}$ thay vào phương trình đường thẳng $(d_1) \Rightarrow y = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow C\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right) \text{ là giao điểm của } (d_1) \text{ và } (d_2)$$

Để 3 đường thẳng (d) , (d_1) , (d_2) đồng quy $\Leftrightarrow C\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right) \in (d)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6}; y = \frac{1}{6} \text{ thỏa mãn phương trình đường thẳng } (d)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = (m-1)\frac{5}{6} - m \Leftrightarrow \frac{1}{6}m = -1 \Leftrightarrow m = -6$$

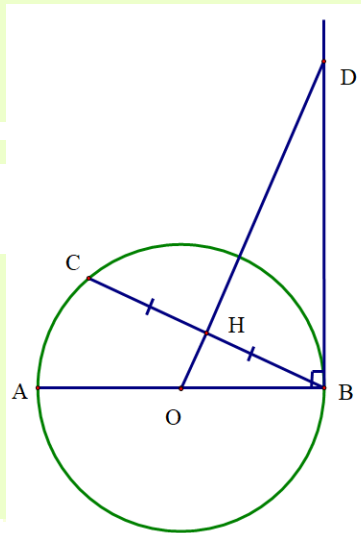
Vậy với $m = -6$ thì 3 đường thẳng (d) , (d_1) , (d_2) đồng quy.

Bài 4.(3,5 điểm) Cho điểm C thuộc đường tròn tâm O đường kính AB , ($AC < BC$). Gọi H là trung điểm BC . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia OH tại D .

- e) Chứng minh rằng: $DH \cdot DO = DB^2$;
 f) Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
 g) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại E . Gọi M là trung điểm của AE . Chứng minh bốn điểm D, B, M, C cùng thuộc một đường tròn.
 h) Gọi I là trung điểm của DH , BI cắt (O) tại F . Chứng minh ba điểm A, H, F thẳng hàng.

Lời giải

a)



Xét (O) có:

H là trung điểm của dây $BC \Rightarrow OH \perp BC$ mà $H \in OD \Rightarrow OD \perp BC$ tại H

Ta có OD cắt tiếp tuyến kẻ từ B của (O) tại B

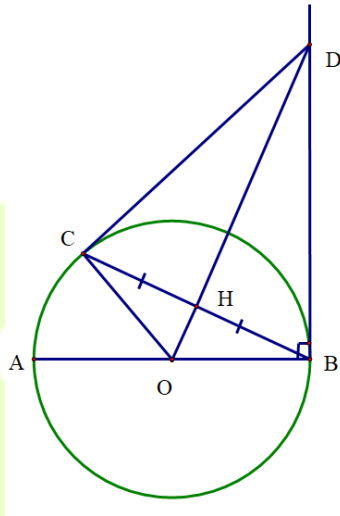
$\Rightarrow DB \perp OB \Rightarrow \angle OBD = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle OBD$ vuông tại B .

Xét tam giác vuông OBD có BH là đường cao

$\Rightarrow BD^2 = OH \cdot OD$ (hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền).

b)



Ta có $OB = OC = R \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại O

mà H là trung điểm của $BC \Rightarrow OH$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow OH$ là đồng thời là đường phân giác

$\Rightarrow \angle BOH = \angle COH \Rightarrow \angle BOD = \angle COD$

Xét tam giác OBD và tam giác OCD có:

OD là cạnh chung

$\angle BOD = \angle COD$ (cmt)

$OB = OC$

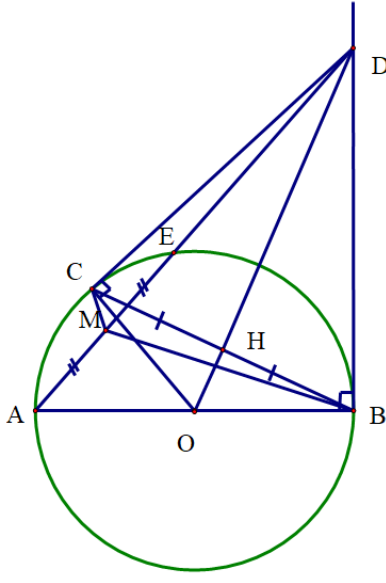
$\Rightarrow \triangle OBD = \triangle OCD$ (c - g - c)

$\Rightarrow \angle OBD = \angle OCD = 90^\circ$

$\Rightarrow DC \perp OC$, mà $C \in (O)$

$\Rightarrow DC$ là tiếp tuyến của (O) .

c)



Xét (O) có :

M là trung điểm của dây $AE \Rightarrow OM \perp AE$ tại M

$\Rightarrow \triangle OMD$ vuông tại $M \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OD (1)

Ta lại có: $DC \perp OC$ tại C

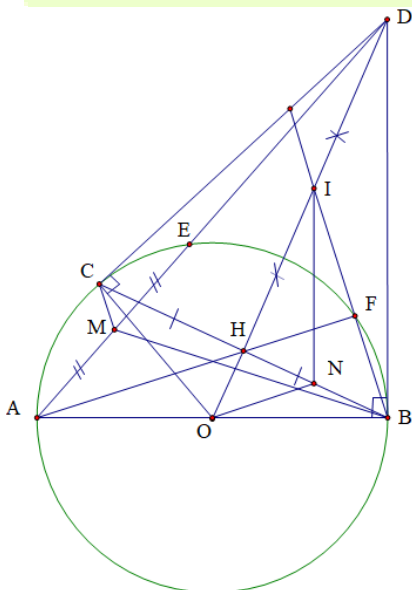
$\Rightarrow \triangle OCD$ vuông tại C

$\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính OD (2)

Mặt khác, tam giác OBD vuông tại B

$\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính OD (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra bốn điểm D, B, M, C cùng thuộc đường tròn đường kính OD .



d)

Gọi N là trung điểm của HB .

Xét tam giác HBD có N là trung điểm của HB , I là trung điểm của HD

$\Rightarrow IN$ là đường trung bình của tam giác HBD

$\Rightarrow IN // DB$ mà $DB \perp OB$

$\Rightarrow IN \perp OB$

Xét tam giác OBI có $BH \perp OI, NI \perp OB$ mà $BH \cap OI = \{N\}$

$\Rightarrow N$ là trực tâm của tam giác IOB

$\Rightarrow ON \perp IB$

Xét tam giác BAH có N là trung điểm của HB , O là trung điểm của AB

$\Rightarrow NO$ là đường trung bình của tam giác BAH .

$\Rightarrow NO // AH$ mà $NO \perp BI$

$\Rightarrow AH \perp BI$ (5)

Xét tam giác AFB có: AB là đường kính, $F \in (O)$

$\Rightarrow \triangle AFB$ vuông tại F .

$AF \perp BF$ mà B, I, F thẳng hàng

$\Rightarrow AF \perp BI$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra đường thẳng AH và đường thẳng AF trùng nhau

$\Rightarrow A, H, F$ thẳng hàng.

Bài 5. (0,5 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{2}(x^2 + 8) = 5\sqrt{x^3 + 8}$ (1)

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -2$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}(x^2 + 8) = 5\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x + 2 \\ b = x^2 - 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = x^2 + 8$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}(2a + b) = 5\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 2(2a + b)^2 = 25ab$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 - 17ab + 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (8a-b)(a-2b)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a-b=0 \\ a-2b=0 \end{cases}$$

$$\text{TH1 : } 8a-b=0$$

$$\Leftrightarrow 8(x+2)=x^2-2x+4$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x-12=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+25-37=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2=37$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=\sqrt{37} \\ x-5=-\sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+\sqrt{37} \\ x=5-\sqrt{37} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2 : } a-2b=0$$

$$\Leftrightarrow x+2=2(x^2-2x+4)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+6=0 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vì } 2x^2-5x+6=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{23}{8}>0$$

$$\text{Vậy } S = \{5-\sqrt{37}; 5+\sqrt{37}\}$$

ĐÁP ÁN: QUẬN ĐÔNG ĐA

Bài I (2 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức $T = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} \right) \cdot \sqrt{2}$

Ta có

$$T = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} \right) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{1} + \sqrt{9} + \sqrt{25} = 1 + 3 + 5 = 9$$

2) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1 = 5$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = 6 \Leftrightarrow |x-3| = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=6 \\ x-3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 9$; $x = -3$.

Bài II. (2 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x + 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x > 0$

1) Tính giá trị của A khi $x = 9$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tính giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

Giải

1) Thay $x = 9$ (TMDKXD) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{9 - 2\sqrt{9} + 2}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

Vậy khi $x = 9$ thì giá trị của biểu thức $A = \frac{5}{3}$

2)

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x + 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \\
 &= \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{2x + \sqrt{x} - 4 - x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

3) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tính giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

$$\text{Ta có: } P = \frac{A}{B} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + 1}{\sqrt{x} - 2} < 0$$

Mà $(\sqrt{x} - 1)^2 + 1 > 0$ nên $\sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Kết hợp điều kiện: $x > 0 \Rightarrow 0 < x < 4$, x nguyên, suy ra $x \in \{1; 2; 3\}$

Vậy với $x \in \{1; 2; 3\}$ thì P có giá trị âm.

Bài III. (2 điểm) Cho hai hàm số: $y = -x + 2(d)$ và $y = x + 4(d')$

- 1) Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.
- 2) (d) cắt (d') tại điểm M . Tìm tọa độ điểm M .
- 3) (d) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B; (d') cắt Ox tại C, cắt Oy tại D. Tính diện tích tam giác BCM.

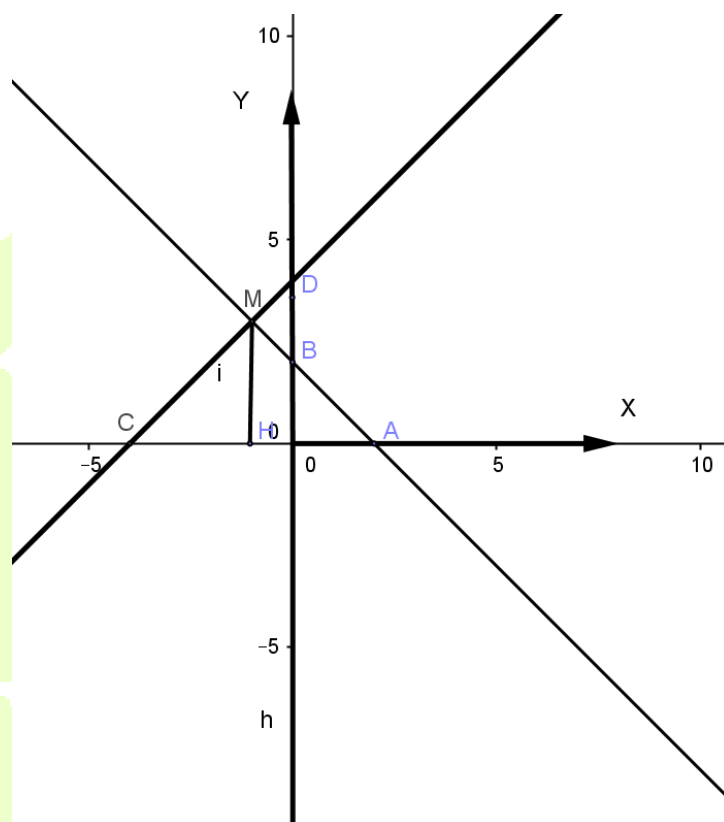
Giải

1) Đồ thị hàm số $y = -x + 2(d)$ là đường thẳng đi qua 2 điểm:

x	0	2
y	2	0

Đồ thị hàm số $y = x + 4(d')$ là đường thẳng đi qua 2 điểm:

x	0	-4
y	4	0



2) Hoành độ điểm M là nghiệm của phương trình:

$$x + 4 = -x + 2 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

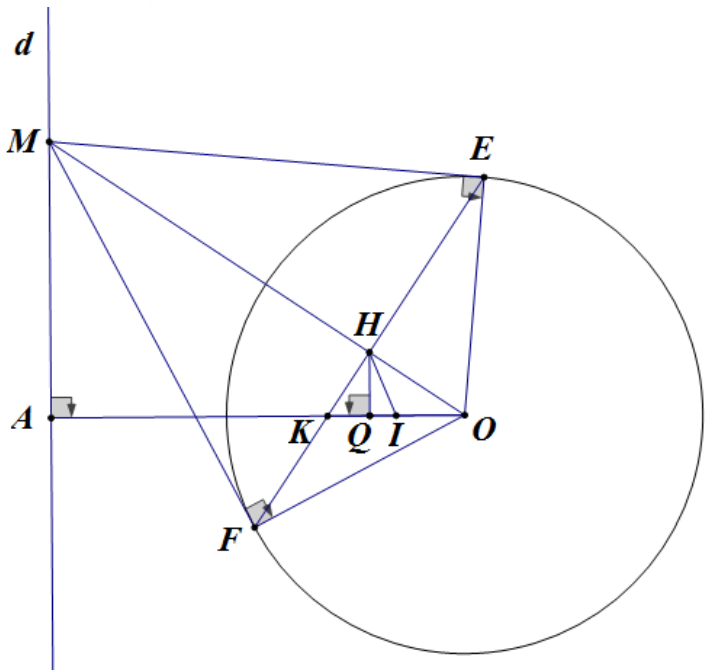
Thay $x = -1$ vào $y = x + 4$ ta được $y = 3$.

Vậy tọa độ điểm M $(-1; 3)$

3) Kẻ $MH \perp Ox$, Ta có

$$\begin{aligned} S_{BCM} &= S_{MAC} - S_{BAC} = \frac{1}{2}MH.AC - \frac{1}{2}BO.AC \\ &= \frac{1}{2}.3.6 - \frac{1}{2}.2.6 = 3(\text{dvd}) \end{aligned}$$

Bài 4:



a) Chứng minh rằng H là trung điểm của EF

ME, MF là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow ME = MF$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OE = OF = R$

b) Chứng minh rằng bốn điểm O, M, A, F cùng thuộc một đường tròn

Ta có: $AM \perp OA$ (gt)

$\Rightarrow \triangle OAM$ vuông tại A

$\Rightarrow \triangle OAM$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow O, A, M$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM

$OF \perp MF$ (MF là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \triangle OFM$ vuông tại F

$\triangle OFM$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow O, F, M$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM

c) Chứng minh rằng : $OK \cdot OA = R^2$

$\triangle OHK$ đồng dạng $\triangle OAM$

Suy ra $OK \cdot OA = OH \cdot OM$

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OEM: $OH \cdot OM = OE^2 = R^2$

d) Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng d để tam giác OHK có diện tích lớn nhất.

HQ, HI lần lượt là đường cao và trung tuyến ΔOHK , $S_{OHK} = \frac{1}{2} HQ \cdot OK$

Ta có $HQ < HI = \frac{OK}{2}$ mà $OK = \frac{R^2}{OA}$ không đổi nên $S_{OHK \max} = \frac{OK^2}{4}$

Bài 5: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y \geq 1$ và $x > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = y^2 + \frac{8x^2 + y}{4x}$

$$M = y^2 + \frac{8x^2 + y}{4x} \geq \frac{8x^2 + 1 - x}{4x} = x + \frac{1}{4x} + x + y + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$M \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

ĐÁP ÁN: QUẬN ĐÔNG ANH

Bài I: (1 điểm) Rút gọn biểu thức:

$$a) (\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -15$$

$$b) \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+2}{1} = 0$$

Bài II: (2 điểm): Giải phương trình:

$$a) \sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{ĐK: } x \geq 1)$$

$$\Rightarrow x-1 = (2-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x-1 = 7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 8-4\sqrt{3} (tm)$$

Vậy PT có nghiệm $x = 8-4\sqrt{3}$

$$b) \sqrt{4x-8} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-50} = 3\sqrt{x-2} - 1 \quad (\text{ĐK: } x \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 3\sqrt{x-2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} (tm)$$

Vậy PT có nghiệm $x = \frac{9}{4}$

Bài III: (2 điểm) Cho $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ (ĐK: $x \geq 0, x \neq 4$)

a) Thay $x = 36$ (tmđk) vào biểu thức A

$$A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{6+4}{6+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+4}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}$$

$$P = B : A = \frac{\sqrt{x}+4}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+4}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$$

$$c) P > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2-\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$$

Vậy $0 \leq x < 4$

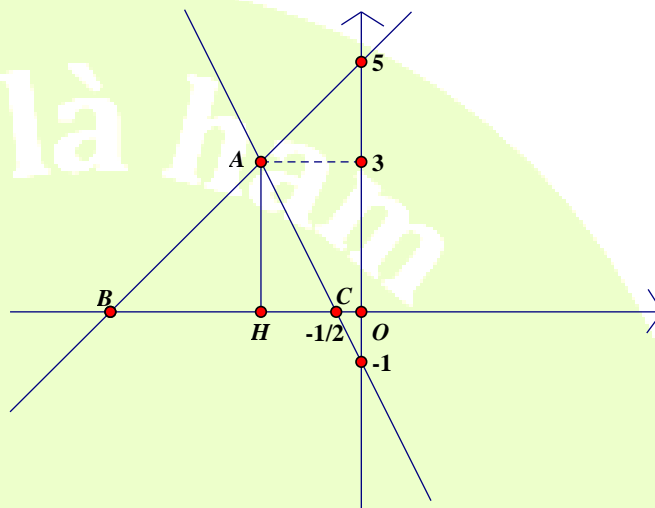
Bài IV: (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = x + 5$ có đồ thị (d_1) và hàm số $y = -2x - 1$ có đồ thị (d_2)

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

x	0	-5
$y = x + 5$	5	0

x	0	$-\frac{1}{2}$
$y = -2x - 1$	-1	0



b) Hoành độ điểm A là nghiệm của phương trình: $x + 5 = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -2$

Thay $x = -2$ vào hàm số $y = x + 5 \Rightarrow y = 3$

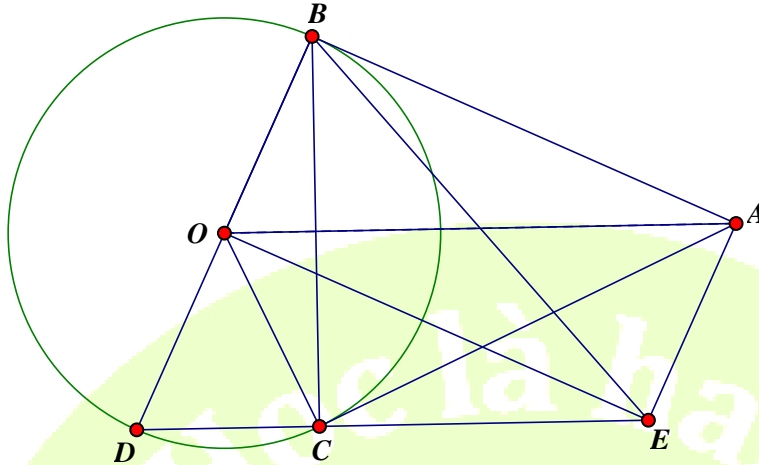
Vậy tọa độ giao điểm A của hai đồ thị hàm số trên là $(-2; 3)$

c) Gọi B và C là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Ox, $AH \perp Ox$ ($H \in Ox$)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,5 = 6,75 \text{ (đvdt)}$$

Vậy diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên và trục hoành là 6,75

Bài V: (3 điểm)



a) Vì AB, AC là các tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$, B và C là các tiếp điểm (gt) nên

$$\angle ABO = 90^\circ; \angle ACO = 90^\circ \text{ (t/c của tiếp tuyến)}$$

$\Rightarrow \triangle ABO$ là vuông tại B nên ba điểm A, B, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (1)

$\triangle ACO$ vuông tại C nên ba điểm A, C, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2), suy ra bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn đường kính AO .

b) Xét $(O; R)$, có:

+) AB, AC là các tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$, B và C là các tiếp điểm (gt) nên $AB = AC$;
 AO là phân giác của các góc BAC và BOC (t/c của hai tiếp tuyến cắt nhau)

+) $\triangle BCD$ có cạnh BD là đường kính của đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle BCD$ (gt) nên $\triangle BCD$ là
 vuông tại $C \Rightarrow \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow DC \perp BC$ (3)

Xét $\triangle BOC$, có:

$$OB = OC = R \Rightarrow \triangle BOC \text{ là tam giác cân tại } O$$

Mà OA là phân giác của $\angle BOC$ (cmt) $\Rightarrow OA$ chứa đường cao kẻ từ đỉnh O của $\triangle BOC$ (t/c của tam giác cân)

$$\Rightarrow OA \perp BC \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4), suy ra: $DC \parallel OA$ (quan hệ từ vuông góc đến song song).

c) Chứng minh tứ giác $OCEA$ là hình thang cân.

Có $DC \parallel OA$ (cmt) nên $EC \parallel OA \Rightarrow$ tứ giác $OCEA$ là hình thang có hai đáy là OA và CE (5)

Xét $\triangle DOC$, có: $OD = OC = R \Rightarrow \triangle DOC$ là cân tại $O \Rightarrow \angle ODC = \angle OCD$ (t/c của tam giác cân)

$$\text{Mà } \angle AOC = \angle OCD \text{ (slt)} \Rightarrow \angle AOC = \angle ODC \Rightarrow \angle AOC = \angle ODE$$

Có: O là trung điểm của BD (Do BD là đường kính của $(O; R)$), đường trung trực của BD cắt

$$DC \text{ tại } E \text{ (gt)} \Rightarrow OE \perp BD \Rightarrow \angle DOE = 90^\circ$$

Xét $\triangle EOD$ vuông tại O và $\triangle ACO$ vuông tại C , có:

$$\angle AOC = \angle EDO \text{ (cmt)}$$

$$OC = OD = R$$

$$\Rightarrow \triangle EOD = \triangle ACO (g.c.g) \Rightarrow OE = AC \text{ (2 cạnh tương ứng) (6)}$$

Từ (5) và (6), suy ra: Tứ giác OCEA là hình thang cân.

Bài VI:

$$\text{Vì } x, y, z > 0 (gt) \Rightarrow \begin{cases} x+2y > 0 \\ y+2z > 0 \\ z+2x > 0 \end{cases}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Co – Si, có:

$$\sqrt{(x+2y) \cdot 1} \leq \frac{x+2y+1}{2} \text{ . Dấu "=" xảy ra khi } x+2y=1$$

$$\sqrt{(y+2z) \cdot 1} \leq \frac{y+2z+1}{2} \text{ . Dấu "=" xảy ra khi } y+2z=1$$

$$\sqrt{(z+2x) \cdot 1} \leq \frac{z+2x+1}{2} \text{ . Dấu "=" xảy ra khi } z+2x=1$$

$$\Rightarrow VT \leq \frac{3x+3y+3z+3}{2} \leq \frac{3(x+y+z)+3}{2} \leq \frac{3+3}{2} \leq 3$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x+2y = y+2z = z+2x = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Vậy với các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=1$ thì $\sqrt{x+2y} + \sqrt{y+2z} + \sqrt{z+2x} \leq 3$.

ĐÁP ÁN: HUYỆN GIA LÂM

Bài 1: (2,0 điểm)

Câu 1) Rút gọn biểu thức:

$$a) 7\sqrt{3} + \sqrt{363} - \sqrt{48} = 7\sqrt{3} + 11\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 14\sqrt{3}.$$

$$b) 3\sqrt{7} - \sqrt{11-4\sqrt{7}} = 3\sqrt{7} - \sqrt{7-2.2\sqrt{7}+4} = 3\sqrt{7} - \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = 3\sqrt{7} - (\sqrt{7}-2) = 2\sqrt{7} + 2$$

Câu 2) Giải phương trình và hệ phương trình:

$$a) \sqrt{4x+12} - 3\sqrt{3+x} + 7\sqrt{9x+27} = 20 (x \geq -3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4(x+3)} - 3\sqrt{3+x} + 7\sqrt{9(x+3)} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} - 3\sqrt{3+x} + 21\sqrt{x+3} = 20$$

$$\Leftrightarrow 20\sqrt{x+3} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1$$

$$\Rightarrow x+3=1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 (TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$.

$$b) \begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4x - 5 = 9 \\ y = 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ y = 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$

Bài 2: (2,0 điểm)

$$a) A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} (x \geq 0)$$

$$\text{Thay } x = 16 \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ)} \text{ vào biểu thức } A, \text{ ta có: } A = \frac{\sqrt{16}-3}{\sqrt{16}+1} = \frac{1}{5}$$

Vậy $A = \frac{1}{5}$ khi $x = 16$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \quad (\text{Với } x > 0, x \neq 1) \\
 &= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $M = A.B < 0$.

$$M = A.B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

* Có $\sqrt{x} > 0$ nên $M < 0$ thì $\sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow x < 9$

Kết hợp ĐKXD ta có $0 < x < 9; x \neq 1$.

Vậy $0 < x < 9; x \neq 1$ thì $M = A.B < 0$.

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho ba đường thẳng:

$$(d_1): y = x + 2 \quad (d_2): y = 2x + 1 \quad (d_3): y = (m^2 + 1)x + m$$

a) Vẽ $(d_1); (d_2)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy

* $(d_1): y = x + 2$

Cho $x = 0$ thì $y = 2$. Ta được $(0; 2)$ thuộc Oy.

Cho $y = 0$ thì $x = -2$. Ta được $(-2; 0)$ thuộc Ox.

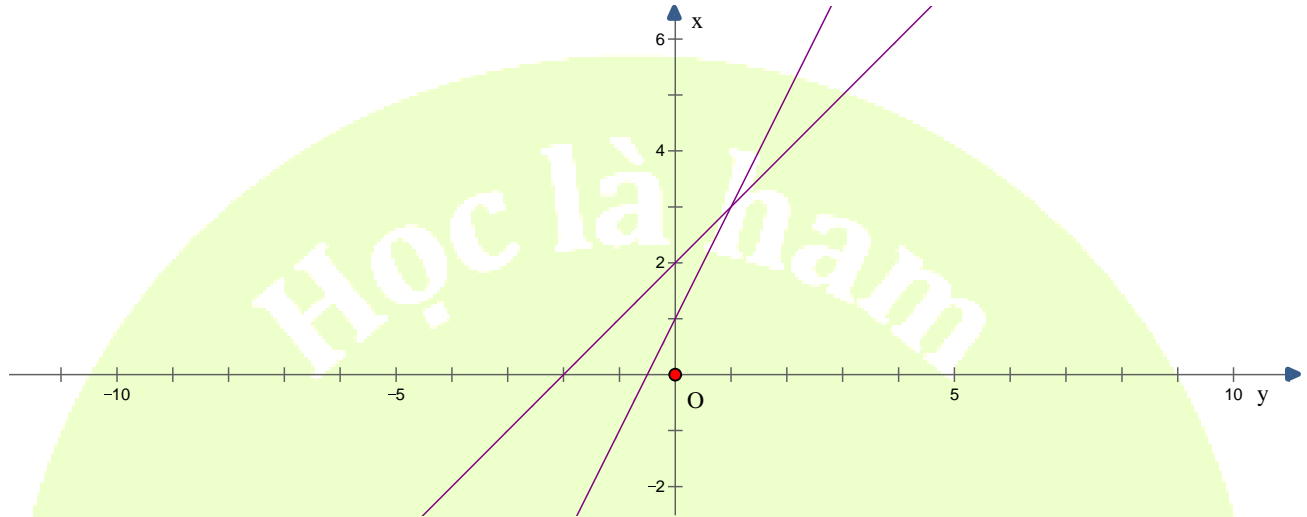
Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được ta có đồ thị hàm số $y = x + 2$.

* $(d_2): y = 2x + 1$

Cho $x = 0$ thì $y = 1$. Ta được $(0; 1)$ thuộc Oy.

Cho $y = 0$ thì $x = \frac{-1}{2}$. Ta được $(\frac{-1}{2}; 0)$ thuộc Ox.

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được ta có đồ thị hàm số $y = 2x + 1$.



b) Xác định m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(d_1); (d_2)$ ta có:

$$2x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào $y = x + 2$ ta có $y = 3$

$(d_1); (d_2)$ cắt nhau tại $(1; 3)$.

Để ba đường thẳng trên đồng quy thì (d_3) đi qua điểm $(1; 3)$.

Thay $x = 1; y = 3$ vào $y = (m^2 + 1)x + m$, ta có:

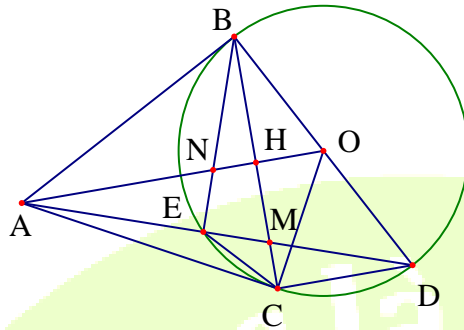
$$3 = (m^2 + 1)1 + m \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 2) = 0$$

$$\Rightarrow m = -2; m = 1$$

Với $m = 1$ thì (d_3) trùng (d_2)

Với $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy $m = -2$ thì ba đường thẳng đồng quy.

Bài 4:

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

Vì AB, AC là các tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$, (B và C là các tiếp điểm) (gt) nên

$$ABO = 90^\circ; ACO = 90^\circ \text{ (t/c của tiếp tuyến)}$$

+) ΔABO là vuông tại B nên ba điểm A, B, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (1)

+) ΔACO vuông tại C nên ba điểm A, C, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2), suy ra: bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn đường kính AO.

b) Chứng minh OA là đường trung trực của BC.

Có:

+) AB, AC là các tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$, (B và C là các tiếp điểm) (gt) nên

$$AB = AC \text{ (t/c của hai tiếp tuyến cắt nhau) } \Rightarrow A \text{ thuộc đường trung trực của BC (định lí)}$$

+) Có $B; C \in (O; R) \Rightarrow OB = OC = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC (định lí)

Vậy OA là đường trung trực của BC.

c) Chứng minh $DE \cdot BA = BD \cdot BE$

Có: $E \in (O; R)$; BD là đường kính của đường tròn $(O; R)$ (gt) $\Rightarrow \Delta BED$ là vuông tại E (định lí)

Xét ΔABD và ΔBED , có:

$$ABD = BED = 90^\circ; EDB \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BED (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{BA}{EB} \Rightarrow DE \cdot BA = BD \cdot BE$$

d) Tính số đo $\angle HEC$

Gọi M là giao điểm của AD với BC; N là giao điểm của AO với BE.

Có: $C \in (O; R)$; BD là đường kính của đường tròn $(O; R)$ (gt) $\Rightarrow \Delta BCD$ là vuông tại C (định lí)

Xét ΔDCM và ΔBEM , có: $\angle DCM = \angle BEM = 90^\circ$; $\angle DMC = \angle BME$ (2 góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \Delta DCM \sim \Delta BEM (g.g) \Rightarrow \frac{DM}{BM} = \frac{MC}{ME} \Rightarrow \frac{ME}{BM} = \frac{MC}{MD}$$

Xét ΔDMB và ΔCME , có: $\frac{ME}{BM} = \frac{MC}{MD}$ (cmt); $\angle DMB = \angle CME$ (2 góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle DMB \simeq \triangle CME (c.g.c) \Rightarrow DBM = CEM \quad (2 \text{ góc tương ứng})$$

$$\text{Chứng minh tương tự, có: } \triangle BNA \simeq \triangle HNE (c.g.c) \Rightarrow NAB = NEH \quad (2 \text{ góc tương ứng})$$

$$\text{Mà } NAB = MBD \quad (\text{cùng phụ với } ABH) \Rightarrow CEM = NEH$$

$$\text{Lại có: } NEH + HEM = 90^\circ \Rightarrow CEM + HEM = 90^\circ \Rightarrow HEC = 90^\circ$$

$$\text{Vậy } HEC = 90^\circ$$

Bài 5: Cho $a+b \geq 1$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Cách 1:

Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= a^2 + b^2 = \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + (a+b) - \frac{1}{4} \\ &\geq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} \geq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{1}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a - \frac{1}{2} = 0 \\ b - \frac{1}{2} = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy với } a+b \geq 1 \text{ thì } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Cách 2:

Áp dụng Bất Cô – Si cho các số dương có:

$$a^2 + \frac{1}{4} \geq a$$

$$b^2 + \frac{1}{4} \geq b$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq a + b - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{1}{4} \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy với } a+b \geq 1 \text{ thì } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$