

**SẢN PHẨM ĐỀ KIỂM TRA
CUỐI HK1 LỚP 12**

**KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ 1 – LỚP 12
Bài thi môn: TOÁN**

(Đề gồm có 04 trang)

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1 (TD1.2). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2		2

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R}$.

Câu 2 (TD1.2). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên $[-1; 3]$ như hình sau.

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 3]$. Chọn khẳng định đúng:

- A. $M = f(-1)$ B. $M = f(3)$ C. $M = f(2)$ D. $M = f(0)$

Câu 3 (TD1.2). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 14)$ B. $(3; 8)$ C. $(12; 20)$ D. $(-7; 8)$

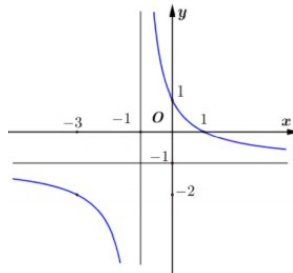
Câu 4 (TD1.2). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 2$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 5 (TD2.1). Đồ thị bên dưới là của hàm số nào sau đây?



A. $y = \frac{-x}{x+1}$

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$

C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$

Câu 6 (TD1.2). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

A. $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$

B. $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$

C. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$

D. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$

Câu 7 (TD1.2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector $\overrightarrow{AO} = 3(\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}) - 2\overrightarrow{k} + 5\overrightarrow{j}$. Tọa độ của điểm A là:

A. $(3; 17; -2)$

B. $(-3; -17; 2)$

C. $(-3; 17; 2)$

D. $(3; 5; -2)$

Câu 8 (TD2.3). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\overrightarrow{a} = (-3; 1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (0; -4; 5)$. Giá trị của $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ bằng:

A. 10

B. -14

C. 6

D. 3

Câu 9 (TD1.1). Thống kê chỉ số chất lượng không khí tại một địa điểm vào các ngày trong tháng 6/2024 được cho trong bảng sau:

Chỉ số AQI	$[0; 50)$	$[50; 100)$	$[100; 150)$	$[150; 200)$	$[200; 250)$
Số ngày	5	11	7	4	3

Khoảng biến thiên R của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

A. $R = 250$

B. $R = 50$

C. $R = 150$

D. $R = 8$

Câu 10 (TD1.2). Đo chiều cao của 500 học sinh trong một trường THPT ta thu được kết quả như sau:

Chiều cao	$[150; 154)$	$[154; 158)$	$[158; 162)$	$[162; 166)$	$[166; 170)$
Tần số	25	50	200	175	50

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là:

A. $s_x = 161,4$

B. $s_x = 14,48$

C. $s_x = 8,2$

D. $s_x = 3,85$

Câu 11 (GQ1.2). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 12 (GQ1.2). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1 (GQ2.1). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$.

- a) $y' = 3x^2 + 6x - m$.
b) Với $m = 9$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
c) Với $m = -3$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi $m \leq -3$.

Câu 2 (GQ2.1). Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) và A, B là hai điểm cực trị của (C) .

- a) $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.
b) A và B nằm ở hai phía của trục tung.
c) Đường thẳng AB có phương trình là $y = 2x + 1$.
d) A và B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ có phương trình là $x + 2y + 4 = 0$.

Câu 3 (GQ2.1). Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 1; 0), B(-1; 0; 1), C(1; -2; 3)$.

- a) Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{6}$.
b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(3; -1; 2)$.
c) Biết $E \in Oy$, khi đó tam giác BCE vuông tại E thì $E(0; -6; 0)$.

- d) M là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ thì độ dài OM bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4 (GQ1.4). Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu về số tiền mà 60 khách hàng mua trà sữa ở một cửa hàng trong một buổi sáng.

Nhóm	$[30; 40)$	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$	$[70; 80)$
Số khách hàng	5	8	25	20	2

- a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là 56.
b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 50.
c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 12,7.
d) Phương sai của mẫu số liệu trên lớn hơn 93.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

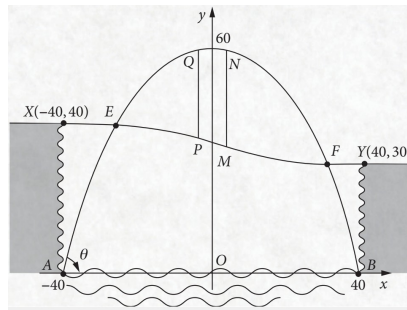
Câu 1 (MH2.1). Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km . Vận tốc dòng nước là 6 km/h .

Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(\text{km/h})$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Câu 2 (MH2.1). Ông An muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng 100 m^2 để làm khu vườn. Để chi phí xây dựng bờ rào xung quanh khu vườn là ít tốn kém nhất thì ông An đã mua mảnh đất có kích thước $a(m) \times b(m)$ (với a là chiều dài, b là chiều rộng của khu vườn). Khi đó, kết quả của $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Câu 3 (MH2.1). Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 150x + 900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của t .

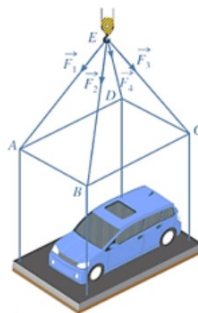
Câu 4 (MH2.1). Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m , một bên cao 40 m và một bên cao 30 m . Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$.

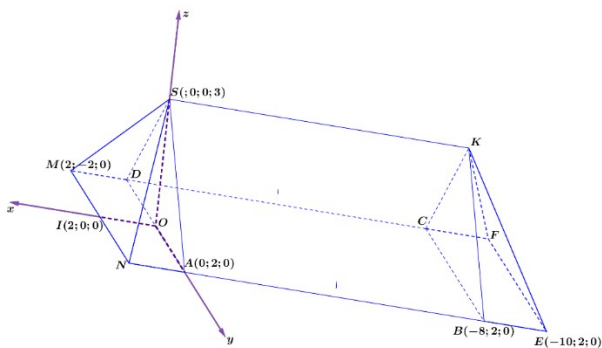
Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ , biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 5 (MH1.1). Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp $EA; EB; EC; ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Biết các lực căng $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4800 N , trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $7200\sqrt{6}\text{ N}$. Tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 6 (MH2.1). Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



ĐÁP ÁN ĐỀ THI

PHẦN I (Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,25 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	C	D	C	B	B	B	B	C	A	D	C	B

PHẦN II

Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm.

- ✧ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm.
- ✧ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,25 điểm.
- ✧ Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,50 điểm.
- ✧ Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được 1 điểm.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) S	b) S	b) Đ	b) Đ
c) S	c) S	c) S	c) Đ
d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S

PHẦN III. (Mỗi câu trả lời Đúng thí sinh được 0,5 Điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	(6;9)	30	150	49,5	0,92	64

LỜI GIẢI CHI TIẾT

II. PHẦN II

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$.

- a) $y' = 3x^2 + 6x - m$.
- b) Với $m = 9$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- c) Với $m = -3$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi $m \leq -3$.

Giải:

a) Ta có $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ nên $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Do đó a) **đúng**.

b) Với $m = 9$ ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

Do đó **b) sai**.

c) Với $m = -3$, ta có $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$.

Suy ra $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó **c) sai**.

d) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0)$$

Xét $g(x) = 3x^2 + 6x, x \in (-\infty; 0)$;

$$g'(x) = 6x + 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty; 0)$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-3	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m \leq g(x), \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq -3$.

Do đó **d) đúng**.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) và A, B là hai điểm cực trị của (C) .

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$$

a)

b) A và B nằm ở hai phía của trục tung.

c) Đường thẳng AB có phương trình là $y = 2x + 1$.

d) A và B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ có phương trình là $x + 2y + 4 = 0$.

Giải:

a) Ta có $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ suy ra $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.

Do đó a) đúng.

$$b) \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$y(-3) = -3, \quad y(-1) = 1$$

Suy ra $A(-3; -3)$ và $B(-1; 1)$

Do $x_A \cdot x_B = 3 > 0$ nên A và B nằm ở cùng một phía của trục tung.

Do đó b) sai.

$$c) \text{ Ta có } \overline{AB} = (2; 4)$$

Suy ra đường thẳng AB có phương trình là $-2(x+1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 3$.

Do đó c) sai.

$$d) \text{ Đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình là } x + 2y + 4 = 0 \text{ nên } \Delta \text{ có vptpt } \overline{n_\Delta} = (1; 2)$$

$\overline{AB} = (2; 4)$. Suy ra $\overline{n_\Delta}$ và $\overline{AB}$ cùng phương với nhau. Do đó $AB \perp \Delta$.

Ta có $I(-2; -1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và $I \in \Delta$.

Vậy A và B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ .

Do đó d) đúng.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 1; 0), B(-1; 0; 1), C(1; -2; 3)$.

a) Độ dài đoạn thẳng AB là $\sqrt{6}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(3; -1; 2)$.

c) Biết $E \in Oy$, khi đó tam giác BCE vuông tại E thì $E(0; -6; 0)$.

d) M là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ thì độ dài OM bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Giải:

a) Đúng

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (-2; -1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

b) Đúng

$$\text{Gọi } D(x; y; z)$$

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (-2; -1; 1), \overline{DC} = (1-x; -2-y; 3-z)$$

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -2 \\ -2-y = -1 \\ 3-z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ . Vậy } D(3; -1; 2)$$

$ABCD$ là hình bình hành khi

c) Sai

$$\text{Gọi } E(0; m; 0) \in Oy$$

$$\text{Tam giác } BCE \text{ vuông tại } E \text{ thì } \overline{EB} \cdot \overline{EC} = 0. (1)$$

Ta có: $\overrightarrow{EB} = (-1; -m; 1), \overrightarrow{EC} = (1; -m-2; 3)$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow m^2 + 2m + 2 = 0$ (VN).

Vậy không có điểm E thỏa mãn.

d) Đúng

Điểm M thuộc đoạn thẳng AB và $MA = 2MB$

Nên $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = -2(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = -2(y_B - y_M) \\ z_A - z_M = -2(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_M = -2(-1 - x_M) \\ 1 - y_M = -2(-y_M) \\ -z_M = -2(1 - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = -1 \\ 3y_M = 1 \\ 3z_M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{1}{3} \\ y_M = \frac{1}{3} \\ z_M = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Độ dài đoạn thẳng $OM = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 4. Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu về số tiền mà 60 khách hàng mua trà sữa ở một cửa hàng trong một buổi sáng.

Nhóm	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$
Số khách hàng	5	8	25	20	2

- a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là 56.
- b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 50.
- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 12,7.
- d) Phương sai của mẫu số liệu trên lớn hơn 93.

Giải:

Ta có bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
$[30;40)$	35	5	5
$[40;50)$	45	8	13
$[50;60)$	55	25	38
$[60;70)$	65	20	58
$[70;80)$	75	2	60
		$n = 60$	

- a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

$$\bar{x} = \frac{35.5 + 45.8 + 55.25 + 65.20 + 75.2}{60} = 56 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

- b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là: $80 - 30 = 50$ (nghìn đồng).

c) Nhóm $[50; 60)$ là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{60}{4}$, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là:

$$Q_1 = 50 + \frac{\frac{60}{4} - 13}{25} \cdot 10 = 50,8 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Nhóm $[60; 70)$ là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3.60}{4}$, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là:

$$Q_3 = 60 + \frac{\frac{3.60}{4} - 38}{20} \cdot 10 = 63,5 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 63,5 - 50,8 = 12,7$ (nghìn đồng).

d) Phương sai của mẫu số liệu trên là:

$$s^2 = \frac{5(35 - 56)^2 + 8(45 - 56)^2 + 25(55 - 56)^2 + 20(65 - 56)^2 + 2(75 - 56)^2}{60} = \frac{277}{3} \approx 92,3 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

III. PHẦN III

Câu 1. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km . Vận tốc dòng nước là 6 km/h . Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v \text{ (km/h)}$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3 t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

Giải:

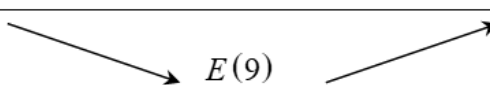
Khi bơi ngược dòng, vận tốc của cá là: $v - 6 \text{ (km/h)}$.

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t = \frac{300}{v - 6} \text{ (v > 6)}$.

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300 km là $E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v - 6} = 300c \cdot \frac{v^3}{v - 6}$.

$$E'(v) = 600cv^2 \cdot \frac{v - 9}{(v - 6)^2}, \quad E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$$

Bảng biến thiên

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$	—	0	+
$E(v)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6; 9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

Đáp số: $(6; 9)$.

Câu 2. Ông An muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng $100m^2$ để làm khu vườn. Để chi phí xây dựng bờ rào xung quanh khu vườn là ít tốn kém nhất thì ông An đã mua mảnh đất có kích thước $a(m) \times b(m)$ (với a là chiều dài, b là chiều rộng của khu vườn). Khi đó, kết quả của $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Giải:

Để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất thì chu vi mảnh đất phải bé nhất.

Gọi x là chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ($x > 0$).

Suy ra, chiều rộng là $\frac{100}{x}$.

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là $C(x) = 2x + \frac{200}{x}$

Ta có: $C'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
$C'(x)$	-	0	+
$C(x)$	$+\infty$	40	$+\infty$

$$\min C(x) = C(10) = 40$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $(0; +\infty)$

Suy ra chu vi mảnh đất hình chữ nhật bé nhất khi chiều dài bằng $10m$, chiều rộng bằng $10m$

Vậy $a + 2b = 30$.

Đáp số: 30.

Câu 3. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 150x + 900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của t .

Giải:

Chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{150x + 900}{x}$.

Ta có $f'(x) = \frac{-900}{x^2} < 0, \forall x > 0$

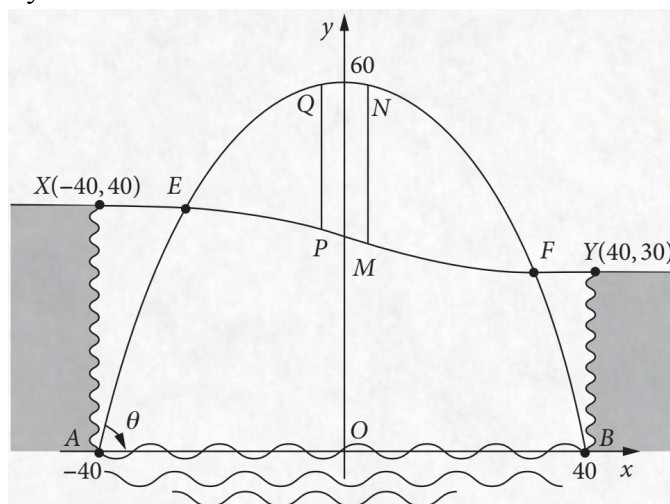
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{150x + 900}{x} = 150$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty \rightarrow 150$	

Vậy khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 150 nghìn đồng.

Đáp án: 150

Câu 4. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang $80m$, một bên cao $40m$ và một bên cao $30m$. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$.

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ , biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Giải:

Theo đề bài, ta có phương trình của Parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \text{ với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$$

Xét

Bảng biến thiên:

x	-23,71	2,49	27,99
D'(x)	+	0	-
D(x)	0 $\nearrow$ 25,23 $\nwarrow$ 0		

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

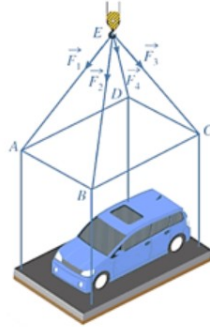
Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

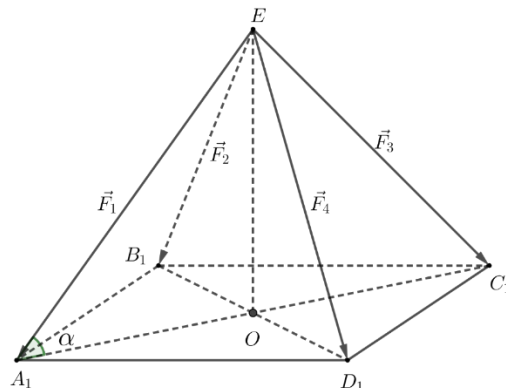
Đáp án: 49,5

Câu 5. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc E của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp $EA; EB; EC; ED$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α . Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Biết các lực căng $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4800 N , trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $7200\sqrt{6}\text{ N}$. Tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải:



Gọi $A_1; B_1; C_1; D_1$ là các điểm thỏa mãn : $\vec{EA_1} = \vec{F_1}; \vec{EB_1} = \vec{F_2}; \vec{EC_1} = \vec{F_3}; \vec{ED_1} = \vec{F_4}$.

Vì $\vec{EA}; \vec{EB}; \vec{EC}; \vec{ED}$ bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc α nên $\vec{EA_1}; \vec{EB_1}; \vec{EC_1}; \vec{ED_1}$ cũng bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc α .

Mặt khác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật có tâm O.

Từ các điều kiện trên ta suy ra $\vec{EO} \perp (A_1B_1C_1D_1)$. Khi đó $\alpha = (\vec{EA_1}; (A_1B_1C_1D_1)) = \angle EA_1O$.

Ta có: $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = |\vec{F_4}| = 4800N$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4800$

Xét tam giác EA_1O vuông tại O nên $EO = EA_1 \cdot \sin \alpha = 4800 \cdot \sin \alpha$.

Ta có: $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{EA_1} + \vec{EB_1} + \vec{EC_1} + \vec{ED_1} = 4\vec{EO}$.

Mặt khác : $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lực tác động lên khung chứa xe ô tô.

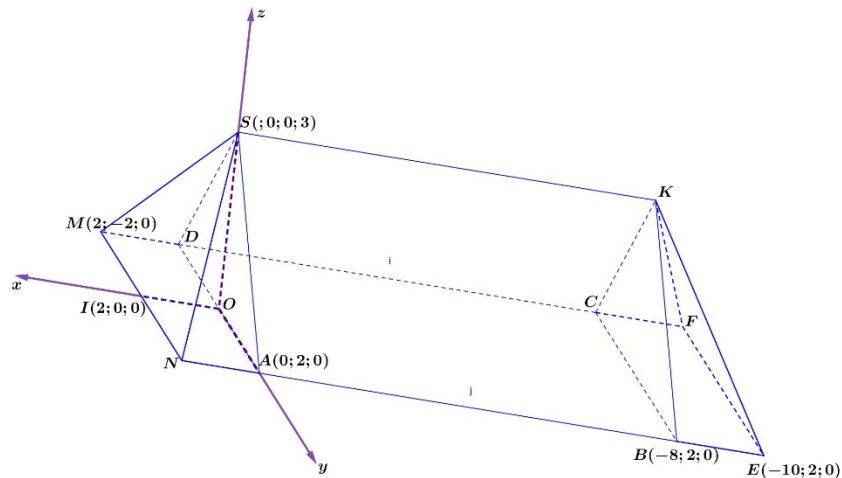
Suy ra: $\vec{P} = 4\vec{EO}$.

Trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là $|\vec{P}| = 4EO = 19200 \cdot \sin \alpha \quad (N)$.

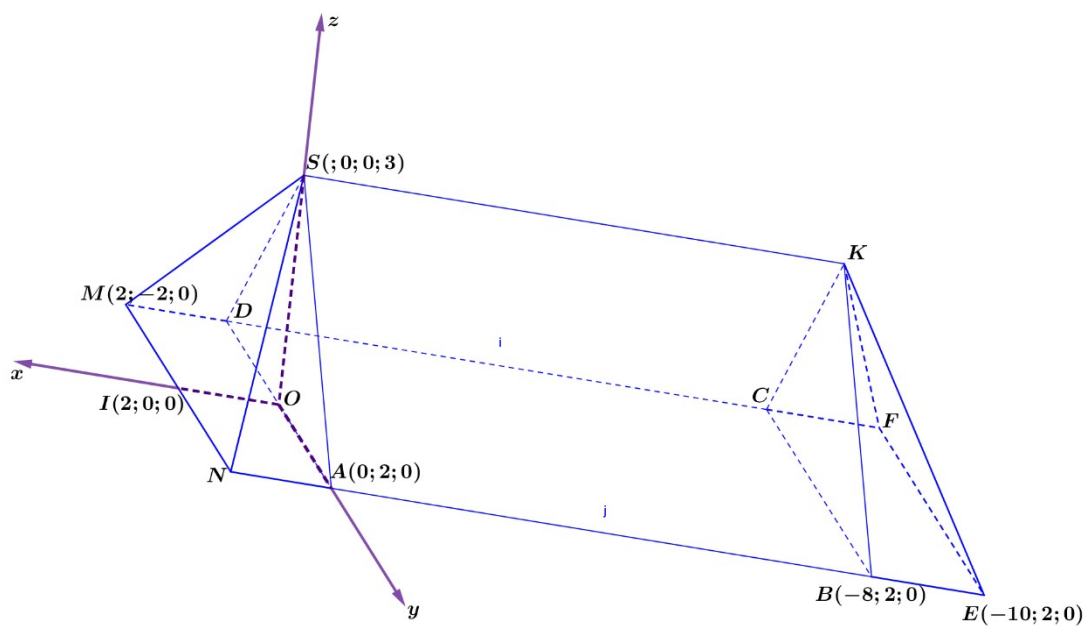
Theo bài ra ta có: $19200 \cdot \sin \alpha = 7200\sqrt{6} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{8} \approx 0,92$

Đáp án: 0,92.

Câu 6. Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



Giải:



Khối đa diện tạo ra mái nhà được tách thành 3 khối là 2 khối chóp có đáy là hình chữ nhật và khối lăng trụ đứng tam giác nên

$$V = V_{S.ADMN} + V_{SAD.KBC} + V_{K.BCFE}$$

$$\text{Mà } V_{S.ADMN} = V_{K.BCFE}$$

Theo hình vẽ hệ trục có $N(2; 2; 0)$ suy ra $\begin{cases} MN = 4 \\ AN = 2 \\ AB = 8 \end{cases}$

$$\text{Khi đó, } V = 2V_{S.ADMN} + V_{SAD.KBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 = 64 \quad (\text{đvtt}).$$

Đáp án: $V = 64$