**BÀI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN**

**LÊ QUÝ ĐÔN KHÁNH HÒA NĂM 2022-2023**

**(Biên soạn: Nguyễn Bá Vinh; Đặng Mai Quốc Khánh; Lưu Xuân Thắng)**

|  |
| --- |
| **Bài 1** (2.00 điểm):   1. Rút gọn biểu thức 2. Cho các số thực a; b; c thỏa , , Tính giá trị của biểu thức |

**Lời giải:**

a) 

b) 

Lấy (1) + (2) – (3) vế theo vế, ta được: 



Khi đó, 

Từ đó suy ra 

|  |
| --- |
| **Bài 2 (2 điểm)**   1. Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng  (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt trục hoành tại điểm A, trục tung tại điểm B và tạo thành tam giác OAB có diện tích bằng 2 (O là gốc tọa độ). 2. Giải hệ phương trình |

**Lời giải:**

a)

Trường hợp 1: 

Dễ dàng kiểm tra không thỏa yêu cầu bài toán

Trường hợp 2: 

d cắt trục hoành tại điểm A 

d cắt trục tung tại điểm B 





Vậy  là những giá trị cần tìm.

b) Hệ phương trình .

Điều kiện: 

Vì , phương trình  trở thành 



Đặt  thì phương trình trở thành 



Do đó 

Thay vào phương trình , ta được 









Đặt  với điều kiện 

Phương trình trở thành 



Với 



Nên 

Với 



 nên phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  hoặc 

|  |
| --- |
| **Bài 3 (1,50 điểm)**  a) Chứng minh  với mọi số thực .  b) Cho các số thực không âm  thỏa . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức . |

**Lời giải**

a) Chứng minh  với mọi số thực .

Ta có 



Mà  nên .

Do đó .

Hay 

b) Cho các số thực không âm  thỏa . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Cách 1.**

Ta có:

;  và ****

****

Mặt khác  ( câu a) nên 

Suy ra 





Vậy  khi 

**Cách 2.**

+) Xét 



+) Áp dụng BĐT AM-GM ta có:



 Tương tự:  và 

+) Cộng theo vế các bất đẳng thức với nhau ta được



Do đó 

Dấu “=” xảy ra khi 

|  |
| --- |
| **Bài 4:** (2,50 điểm) Cho tam giác nhọn  không cân đỉnh C nội tiếp trong đường tròn . Gọi  và  tương ứng là tiếp tuyến của đường tròn  tại  và , các tiếp tuyến này cắt nhau tại . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên đường thẳng .  a) Chứng minh rằng năm điểm  cùng thuộc một đường tròn.  b) Một đường thẳng  qua  và song song với  cắt  tại . Chứng minh rằng tam giác  đồng dạng với tam giác .  c) Goi  là trung điểm của. Chứng minh ba điểm  và  thẳng hàng. |

**Lời giải**



a) Chứng minh rằng năm điểm  cùng thuộc một đường tròn.

Xét tứ giác AOBD có: 

Tứ giác AOBD nội tiếp đường tròn đường kính OD.

4 điểm A, O, B, D cùng thuộc đường tròn đường kính OD.

Mặt khác: ( vì )

E thuộc đường tròn đường kính OD.

Vậy 5 điểm A, O, E, B, D cùng thuộc đường tròn đường kính OD.

**b) Một đường thẳng  qua  và song song với  cắt  tại . Chứng minh rằng tam giác  đồng dạng với tam giác .**

Cách 1:

Trong đường tròn đường kinh OD ta có:  ( góc nội tiếp cùng chắn )

Mặt khác:  (cùng phụ với )

Do vậy  , mà (đồng vị) nên 

Xét và ta có:

 chung

(cmt)

Do đó (g – g)



Xét và ta có:

 chung



Do đó (c – g – c)

Cách 2:

 cân tại D (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) 

Vì A, O, E, B, D cùng thuộc đường tròn đường kính OD nên  (các góc nội tiếp chắn 2 cung AD, BD bằng nhau)

Mặt khác,  (đồng vị, )

Suy ra, 

Do đó, AECF là tứ giác nội tiếp

Suy ra  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE) hay 

Xét và có:  chung, 

Do đó (g – g)

**c) Goi  là trung điểm của. Chứng minh ba điểm  và  thẳng hàng.**

Gọi N là giao điểm của CD và (O).

Khi đó KE // AN ( vì KE là đường trung bình của )

Mặt khác ta có  (vì )

Tứ giác FAEC nội tiếp.

nên ( góc nội tiếp cùng chắn )

mà ( góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn )

Do đó FE // AN ( đồng vị)

Qua E ta có KE // AN và FE // AN nên theo tiên đề Ơclit ta suy ra 3 điểm E, K, F thẳng hàng.

|  |
| --- |
| **Bài 5:** (2,00 điểm)  a) Bên trong một tam giác đều cạnh bẳng 4 cho năm điểm. Chừng minh rằng trong năm điểm đó có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.  b) Cho các số tự nhiên  thỏa . Chứng minh rằng  đều chia hết cho 6.  c) Một tập hợp  được gọi là có tính chất  nếu  có đúng bốn phần tử và với mọi phần tử  của  thì ít nhất một trong hai phần từ  hoặc  cũng thuộc .  Cho tập hợp . Tính số tất cả các tập con có tính chất  (nêu trên) của tập. |

**Lời giải**

*a) Bên trong một tam giác đều cạnh bẳng 4 cho năm điểm. Chứng minh rằng trong năm điểm đó có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.*



Gọi  lần lượt là trung điểm của ba cạnh .

Rõ ràng ta có 4 tam giác đều cạnh bằng 2 là , , , .

Khi cho 5 điểm cho vào 4 tam giác, theo nguyên lý Dirchlet có ít nhất 2 điểm nằm trong một tam giác đều nói trên.

Hai điểm này nằm trong một tam giác đều cạnh là 2 nên khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.

Vậy tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2.

**b)** *Cho các số tự nhiên  thỏa . Chứng minh rằng  đều chia hết cho 6.*

Ta có:(\*)

Từ (\*) suy ra 3b3 chẵn  b3 chẵn b chẵn b2 b38 4c4 – 3b3 4 2a24 a22 a 2

Do đó 2a28 4c4 8 c 2

Giả sử c không chia hết cho 3.

Khí đó  (vô lý vì số chính phương khi chia 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1)

Vậy c  3 4c4 - 3b3 3 2a23 a23 a3 4c4 – 2a2 9 3b3 9 b3 3 b 3

Mà (2, 3) = 1

Vậy a, b, c đều chia hết cho 6.

*c) Một tập hợp  được gọi là có tính chất  nếu  có đúng bốn phần tử và với mọi*  *thuộc  thì ít nhất một trong hai phần từ  hoặc  cũng thuộc .*

Cho tập hợp . Tính số tất cả các tập con có tính chất  (nêu trên) của tập.

Ta xét một tập hợp *S* gồm . Không mất tính tổng quát, giả sử *a < b < c < d* thì

*b = a + 1* và *d = c + 1*

Ta chỉ cần chọn a, c thì b, d cũng xác định nên ta chỉ cần đếm số bộ (a, c) sao cho

*, c > a + 1*

Với có *2021 – (k + 2) + 1 = 2020 – k*

Cho k chạy từ 1 đến 2019 rồi cộng lại thì số cách chọn *S* của X thỏa tính chất *T* là:

2019 + 2018 + … + 1 = 