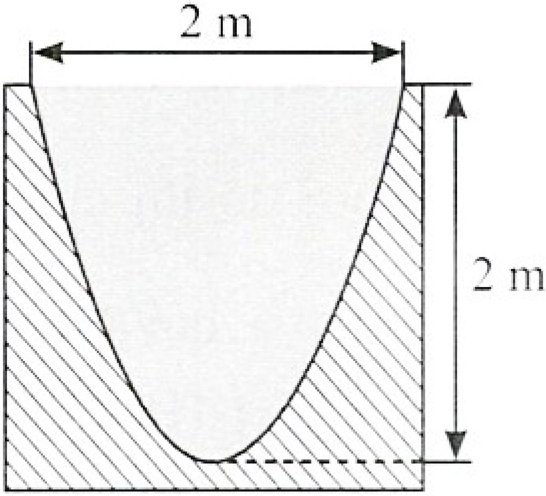
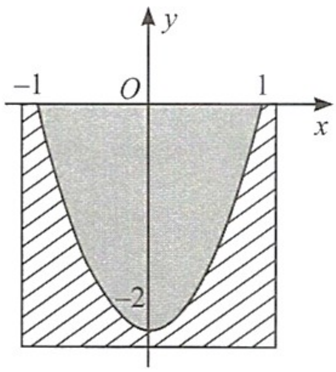
TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Mặt cắt ngang của lòng máng dẫn nước là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như Hình (phần được tô màu xám). Tính diện tích của mặt cắt ngang đó.



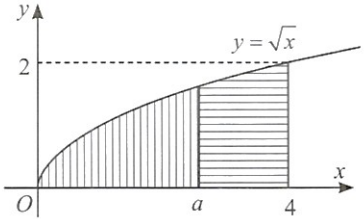
Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy có trục hoành nằm dọc theo cạnh trên của mặt cắt ngang, trục tung đi qua đỉnh của parabol như hình bên. Khi đó, đường parabol có phương trình dạng $y = ax^2 - 2$ $(a > 0)$.



Theo giả thiết, ta có $y(1) = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Suy ra phương trình của parabol là $y = 2x^2 - 2$. Diện tích của phần lòng máng là $S = \int_{-1}^{1}\left(2 - 2x^2\right)dx = \left.\left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\left(m^2\right)$

Câu 2. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Đường thẳng $x = a(0 < a < 4)$ chia D thành hai phần có diện tích bằng nhau (hình)



Tính giá trị của a.

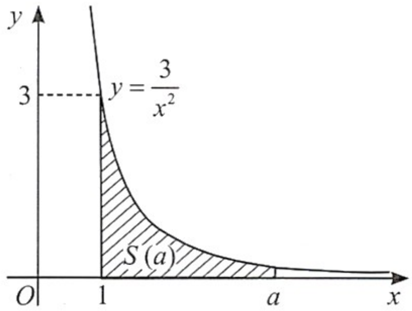
Lời giải

$$S=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$$

$$S_1=\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^a=\frac{2}{3}\sqrt{a^3}.$$

$$S_1=\frac{S}{2}\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{a^3}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow \sqrt{a^3}=4\Leftrightarrow a^3=16\Leftrightarrow a=2\sqrt[3]{2}.$$

Câu 3. Kí hiệu $S(a)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\frac{3}{x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=a$ với $a>1$ (Hình). Tính giới hạn $\lim\limits_{a\to+\infty} S(a)$

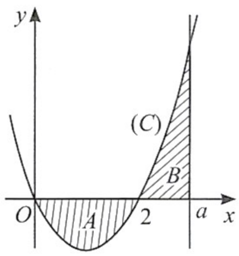


Lời giải

$$S(a)=\int_1^a \frac{3}{x^2}dx=3\int_1^a x^{-2}dx=\frac{-3}{x}\Big|_1^a=3\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

$$\lim_{a\to+\infty} S(a)=\lim_{a\to+\infty} 3\left(1-\frac{1}{a}\right)=3\left(1-\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\right)=3(1-0)=3.$$

Câu 4. Cho hàm số $y=x^2-2x$ có đồ thị (C). Kí hiệu A là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2; B$ là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=2$, $x=a(a>2)$.



Tìm giá trị của a để A và B có diện tích bằng nhau.

Lời giải

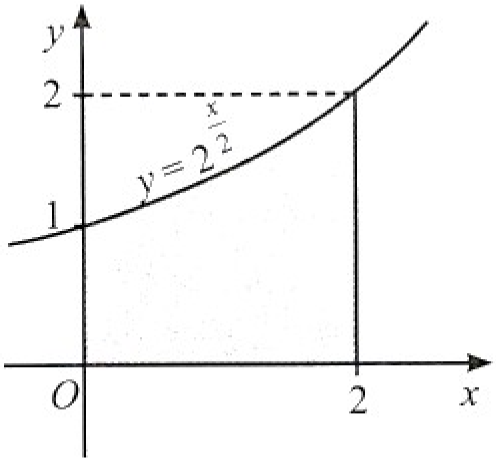
Gọi S_A, S_B lần lượt là diện tích của hình phẳng A, B. Ta có:

$$S_A=\int_0^2 (2x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

$$S_B=\int_2^a (x^2-2x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^a=\frac{a^3}{3}-a^2+\frac{4}{3}.$$

Theo đề bài, ta có $S_A = S_B \Leftrightarrow \frac{a^3}{3} - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = 3$. Vì $a > 2$ nên $a = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = 2^{\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được tô màu như Hình.



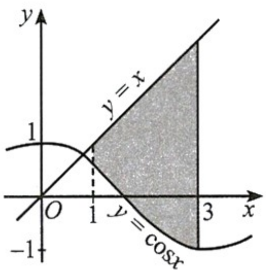
Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào? Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Hình phẳng đã cho ở Hình được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^{\frac{x}{2}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$. Khi đó, diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_0^2 2^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x dx = \left.\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x}{\ln 2^{\frac{1}{2}}}\right|_0^2 = \frac{2}{\ln 2} \approx 2,89.$$

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ và hình phẳng được tô màu như Hình. Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



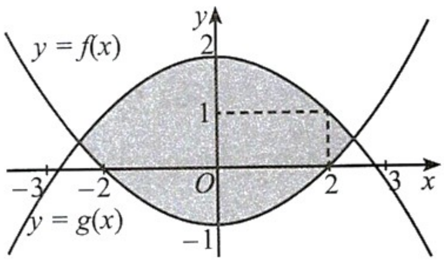
Lời giải

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \cos x, y = x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Khi đó, diện tích hình phẳng được tính theo công thức

$S=\int_1^3 |\cos x - x|\,dx$. Vì $x \geq \cos x, \forall x \in [1;3]$ nên ta có:

$S=\int_1^3 (x-\cos x)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)\Big|_1^3 = 4-\sin 3+\sin 1 \approx 4,7.$

Câu 7. Bạn Hải nhận thiết kế logo hình con mắt (phần được tô đậm) cho một cơ sở y tế. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y=f(x)$ và $y=g(x)$ như Hình (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét). Bạn Hải cần tính diện tích của logo để báo giá cho cơ sở y tế đó trước khi kí hợp đồng. Diện tích của logo là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

- Gọi parabol $y=f(x)$ có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$. Parabol $y=f(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên ta có $\frac{-b}{2a}=0 \Leftrightarrow b=0$. Lại có đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(0;-1)$ và điểm $(2;0)$ nên $a=\frac{1}{4}, c=-1$.

Vậy parabol $y=f(x)=\frac{1}{4}x^2-1$.

- Tương tự, ta cũng có parabol $y=g(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$ là:

$\frac{1}{4}x^2-1=-\frac{1}{4}x^2+2 \Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ ho?c $x=-\sqrt{6}.$

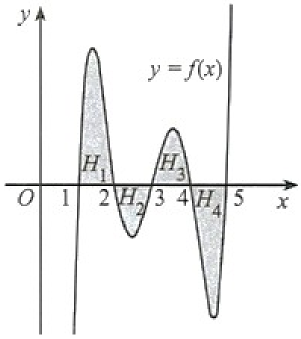
Khi đó, diện tích của logo là:

$$S=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left[\left(-\frac{1}{4}x^2+2\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right]dx$$

$$=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left(3-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(3x-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}=4\sqrt{6}\approx 9,8\left(dm^2\right).$$

Đáp số: 9,8 .

Câu 8. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 là các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y = f(x)$ và trục hoành với x lần lượt thuộc các đoạn $[1;2],[2;3],[3;4],[4;5]$ (Hình). Biết rằng, các hình H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt có diện tích bằng $\frac{9}{4}, \frac{11}{12}, \frac{11}{12}$ và $\frac{9}{4}$. Giá trị $\int_1^5 f(x)dx$ bằng bao nhiêu?



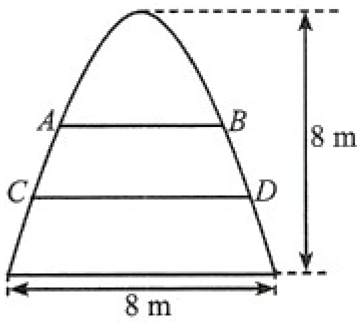
Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx \\ &= \int_1^2 |f(x)|\,dx - \int_2^3 |f(x)|\,dx + \int_3^4 |f(x)|\,dx - \int_4^5 |f(x)|\,dx \\ &= S_{H_1} - S_{H_2} + S_{H_3} - S_{H_4} = \frac{9}{4} - \frac{11}{12} + \frac{11}{12} - \frac{9}{4} = 0.\end{aligned}$$

Đáp số: 0.

Câu 9. Một cổng có dạng hình parabol với chiều cao $8m$, chiều rộng chân đế $8m$ (Hình). Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang, đồng thời chia cổng thành ba phần sao cho hai phần ở phía trên có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\frac{CD}{AB}$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Gắn hệ trục toạ độ Oxy vào cổng parabol như hình bên với trục Oy trùng với đường đối xứng của parabol, gốc O nằm ở đỉnh của parabol, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khi đó, phương trình parabol có dạng $y = ax^2$.

Vì parabol đi qua điểm có toạ độ $(-4;-8)$ nên $a = -\frac{1}{2}$. Suy ra phương trình parabol là $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Giả sử B có hoành độ x_1, D có hoành độ x_2. Khi đó, phương trình đường thẳng AB là $y = -\frac{1}{2}x_1^2$, phương trình đường thẳng CD là $y = -\frac{1}{2}x_2^2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng AB là:

$$S_1 = 2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]dx = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x_1^2}{2}x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3\left(m^2\right).$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng CD là:

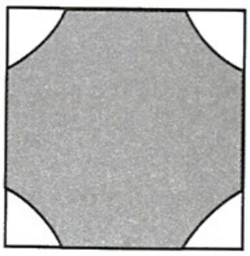
$$S_2 = 2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]dx = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x_2^2}{2}x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3\left(m^2\right).$$

Theo giả thiết, ta có: $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

Khi đó, $\frac{CD}{AB} = \frac{2x_2}{2x_1} \approx 1,26$.

Đáp số: 1,26 .

Câu 10. Người ta thiết kế một mẫu gạch lát nền nhà có dạng hình vuông cạnh $4dm$. Bốn góc viên gạch màu trắng, phần ở giữa màu xanh (Hình).

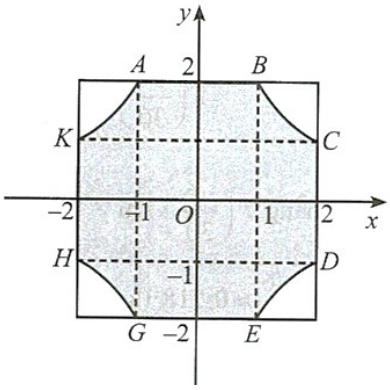


Đường viền của phần màu xanh bao gồm bốn đoạn thẳng nằm trên các cạnh hình vuông và bốn đường cong có tính chất: Tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường cong đó đến hai trục đối xứng của viên gạch (hai đường thẳng đi qua tâm viên gạch và lần lượt song song với hai cạnh vuông góc) bằng $2dm^2$.

Hãy cho biết phần màu xanh có diện tích bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

Gắn trục toạ độ Oxy vào viên gạch sao cho hai trục trùng với hai đường đối xứng, gốc O ở tâm hình vuông như hình dưới.



Giả sử toạ độ một điểm nằm trên đường viền cong là $(x;y)$. Theo giả thiết, ta có: $|xy|=2$. Suy ra $y=\frac{2}{x}$ hoặc $y=\frac{-2}{x}$. Ứng với hình bên, ta có các đường viền cong AK, DE là một phần của đồ thị hàm số $y=\frac{-2}{x}$; các đường viền cong BC, GH là một phần của đồ thị hàm số $y=\frac{2}{x}$.

Khi đó, diện tích phần màu xanh bằng:

$$\int_{-2}^{-1}\left|\frac{-2}{x}-\frac{2}{x}\right|dx+\int_{1}^{2}\left|\frac{2}{x}-\frac{-2}{x}\right|dx+S_{ABEG}$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{x}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{-2}{x}\right)dx+4.2$$

$$=-4\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}+4\ln|x|\Big|_{1}^{2}+8\approx 13,5\left(dm^2\right)$$

Đáp số : 13,5.

Câu 11. Lượng mưa theo giờ, tính bằng inch/giờ, ở hai địa điểm khác nhau sau t giờ khi bão đổ bộ, được cho bởi các hàm số $f(t)=0,73t^3-2t^2+t+0,6$ và $g(t)=0,17t^2-0,5t+1,1$. Thông qua diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đã cho và hai đường thẳng $t=0,t=2$, ta tính được sự chênh lệch lượng mưa ở hai địa điểm khác nhau sau 2 giờ. Hãy tìm sự chênh lệch đó bằng bao nhiêu inch. (làm tròn kết quả đến hàng phầm trăm)

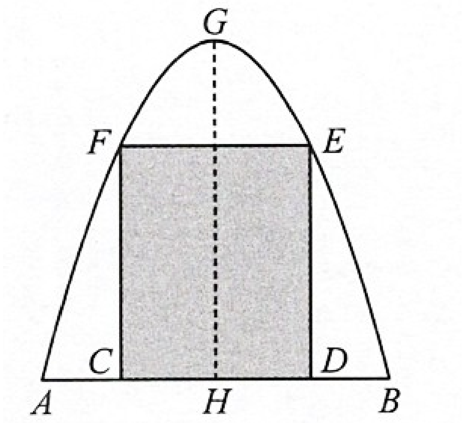
Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f(t)=0,73t^3-2t^2+t+0,6$; $g(t)=0,17t^2-0,5t+1,1$ và hai đường thẳng $t=0,t=2$ là

$$\int_0^2|f(t)-g(t)|\,dt=\int_0^2\left|0,73t^3-2,17t^2+1,5t-0,5\right|dt=\frac{13}{15}.$$

Kết quả trên thể hiện sự chênh lệch lượng mưa ở hai địa điểm khác nhau sau 2 giờ là $\frac{13}{15}\approx 0,87$ inch.

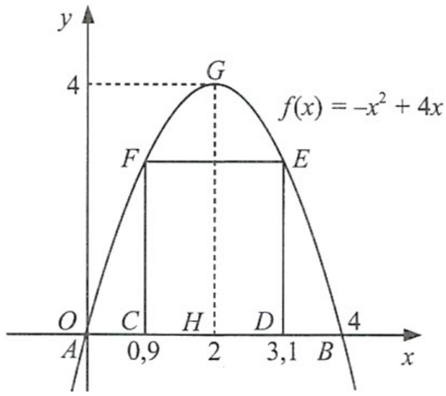
Câu 12. Một cánh cổng của một toà nhà có dạng parabol gồm hai phần: phần hai cánh cửa hình chữ nhật $CDEF$, còn lại là phần xiên hoa trang trí (Hình).



Biết rằng $GH = 4m, AB = 4m$ và $AC = BD = 0,9m$. Diện tích phần cổng làm xiên hoa trang trí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu mét vuông?

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O. Khi đó parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua gốc toạ độ.



Giả sử parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$. Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên phương trình của parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cánh cổng là

$$S = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}\left(m^2\right)$$

Chiều cao của cửa là $CF = DE = f(0,9) = 2,79 (m)$; chiều rộng của cửa là $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 (m)$.

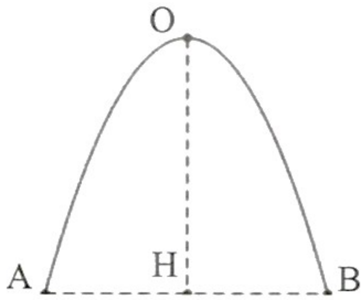
Diện tích phần hai cánh cửa là

$$S_{CDEF} = CD \cdot CF = 2,79 \cdot 2,2 = 6,138 \left(m^2\right).$$

Diện tích phần xiên hoa trang trí là

$$S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,138 = \frac{6793}{1500} \approx 4,53 \left(m^2\right).$$

Câu 13. Mặt cắt đứng của một cái cổng có dạng một đường parabol với chiều cao $OH = 4m$ và khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 4m$ (hình bên). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu mét vuông? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

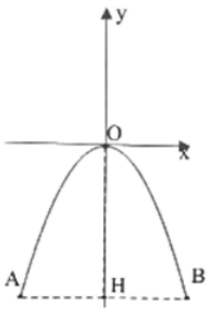


Lời giải

Đáp số: 10,7.

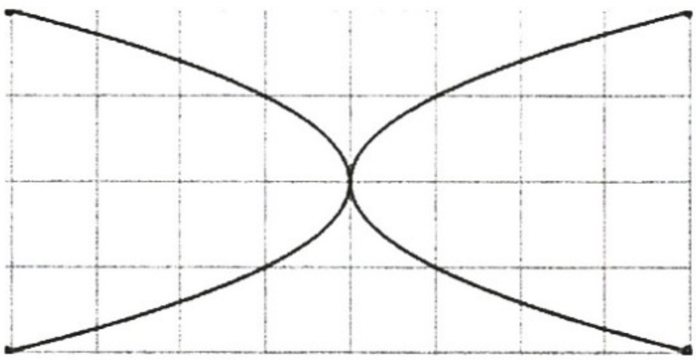
Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình bên với đơn vị của hai trục là mét, đường parabol có phương trình $y = ax^2$ và đi qua các điểm $A(-2;-4), B(2;-4)$. Suy ra $a = -1$.

Phương trình đường thẳng AB là $y = -4$.



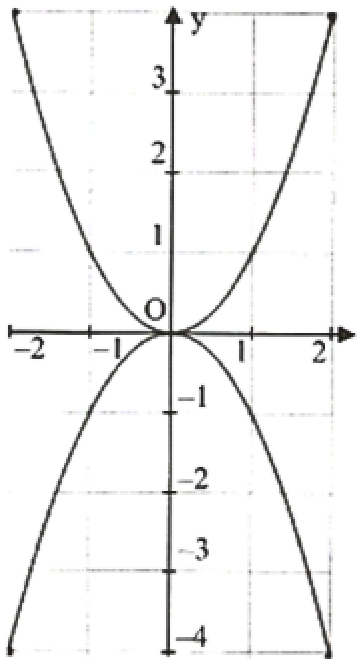
$$S = \int_{-2}^{2} \left| (-x^2) - (-4) \right| dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \approx 10,7 \left(m^2 \right).$$

Câu 14. Một nhà thiết kế cần làm một cái logo có dạng hình chữ nhật kích thước $40cm \times 80cm$. Trong logo đó có hai đường parabol chung đỉnh, cùng trục đối xứng chứa đường trung bình của hình chữ nhật và hai parabol đi qua đỉnh của hình chữ nhật (hình bên). Nhà thiết kế có kế hoạch làm màu nền là màu xanh phần phía trên của cả hai đường parabol và phần phía dưới của cả hai đường parabol, phần còn lại là màu khác. Diện tích phần màu xanh là bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp số: 10,7.



Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình bên với đơn vị của hai trục là dm.

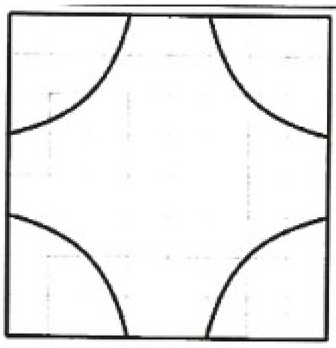
Đường parabol phía trên có phương trình $y = ax^2$ và đi qua các điểm $(-2;4),(2;4)$. Suy ra $a = 1$.

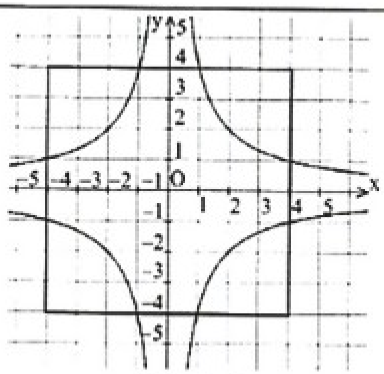
Đường parabol phía dưới có phương trình $y = a'x^2$ và đi qua các điểm $(-2;-4),(2;-4)$. Suy ra a' $= -1$.

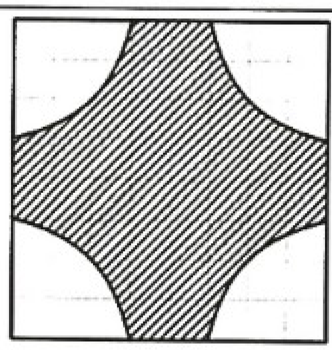
Diện tích của hình chữ nhật là $4.8 = 32\left(dm^2\right)$. Diện tích phần màu xanh bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol $y = x^2$, $y = -x^2$ và các đường thẳng $x = -2, x = 2$. Ta có

$$S = \int_{-2}^{2}\left|x^2 - \left(-x^2\right)\right|dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \approx 10,7\left(dm^2\right)$$

Câu 15. Hoạ sĩ vẽ thiết kế một loại gạch trang trí có dạng như Hình 1 , gạch có dạng hình vuông cạnh 8 dm . Khi đặt bản vẽ trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị của mỗi trục là 1 dm thì mỗi nét cong phía trong thuộc một trong hai đường hypebol $y = -\frac{4}{x}, y = \frac{4}{x}$ (Hình 2); các cạnh của viên gạch lần lượt thuộc 4 đường thẳng $x = -4, x = 4, y = -4, y = 4$. Người ta sơn màu hồng vào phần hình được gạch chéo như Hinh 3. Diện tích phần sơn màu hồng là bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?


Hình 1


Hình 2


Hình 3

Lời giải

Đáp số: 38,2 .

Diện tích hình vuông cạnh 8 dm là $64dm^2$.

Diện tích một góc viên gạch phần không sơn hồng là $\int_1^4 \left|\frac{-4}{x} - (-4)\right| dx \left(dm^2\right)$. Diện tích phần sơn màu hồng là: $64 - 4\int_1^4 \left|\frac{-4}{x} - (-4)\right| dx \approx 38,2\left(dm^2\right)$.

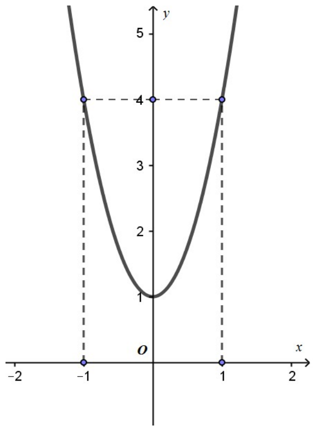
Câu 16. **(SGD&ĐT CẦN THƠ - HKII - 2018)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = m$ $(m > 1)$ bằng $\frac{20}{3}$. Giá trị của m bằng ?

Lời giải

Ta có: $S = \int_1^m \left|x^2 - 2x + 3\right| \mathrm{d}x = \int_1^m \left(x^2 - 2x + 3\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_1^m = \frac{m^3}{3} - m^2 + 3m - \frac{7}{3}$

$S = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{m^3}{3} - m^2 + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 17. **(THPT HẬU LỘC 2 - TH - 2018)** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?



Lời giải

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1$.

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = 4$, $x = 2$.

Ta có $S=\int_2^4 (3x^2+1)\mathrm{dx}=58$.

Lại có: $S=\int_2^4 f'(x)\mathrm{dx}=f(x)\Big|_2^4=f(4)-f(2)$.

Do đó: $H=f(4)-f(2)=58$.

Câu 18. **(Mã 103 - 2022)** Biết $F(x);\, G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x); y=G(x); x=0; x=4.$ Khi $S=8$ thì a bằng?

Lời giải

Đặt $F(x)=G(x)+c$

$S=\int_0^4 |F(x)-G(x)|dx \Rightarrow |F(x)-G(x)|=2\ hay\ |c|=2$

$\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a$

$\Leftrightarrow F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+a$

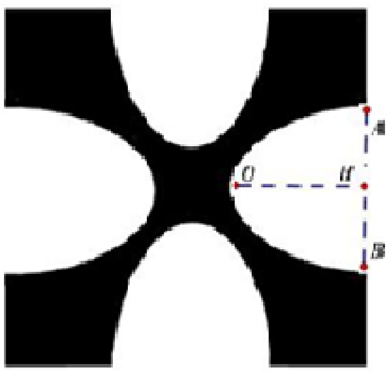
$\Leftrightarrow -G(0)-c=-G(0)+a$

$\Leftrightarrow a=-c$

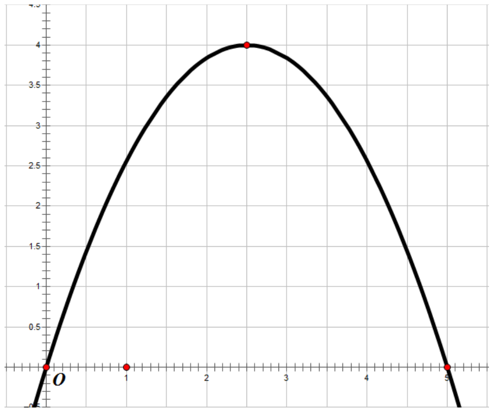
$\Rightarrow a=\pm 2$

Mà $a>0 \Rightarrow a=2$

Câu 19. **(THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018)** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5$ cm, $OH=4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) \mathrm{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}$ cm^2.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100\ \text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \approx 47\ \text{cm}^2$.

Câu 20. **(SGD - ĐÀ NẴNG - LẦN 1 - 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx$ với $m \neq 0$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là : $x^2 = mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \end{array} \right.$

Do đó diện tích hình phẳng (H) là: $S = \int_0^m \left| x^2 - mx \right| \mathrm{d}x = \int_0^m \left(mx - x^2 \right) \mathrm{d}x = \left(m\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^3}{6}$

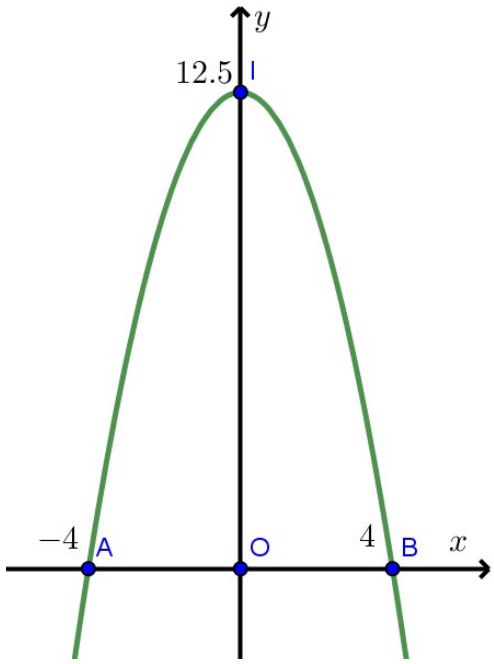
Theo đề bài: $S < 20 \Leftrightarrow \frac{m^3}{6} < 20 \Leftrightarrow m^3 < 120 \Leftrightarrow m < 4.9324...$

Do m là số nguyên dương nên $m = \{1; 2; 3; 4\}$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn.

Câu 21. **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 3 - 2018)** Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8m$, chiều cao $12,5m$. Tính diện tích của cổng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của Parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

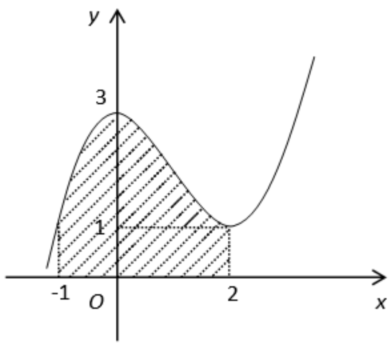
Khi đó Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có $0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32}$. Do đó $(P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$.

Diện tích của cổng là: $S = \int_{-4}^{4}\left| -\frac{25}{32}x^2 + 12,5 \right| dx = \frac{200}{3} \approx 67\left(m^2\right)$.

Câu 22. **(THPT TRẦN QUỐC TUẤN - LẦN 1 - 2018)** Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

- Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và $3 \Rightarrow S_1=3$.

- Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

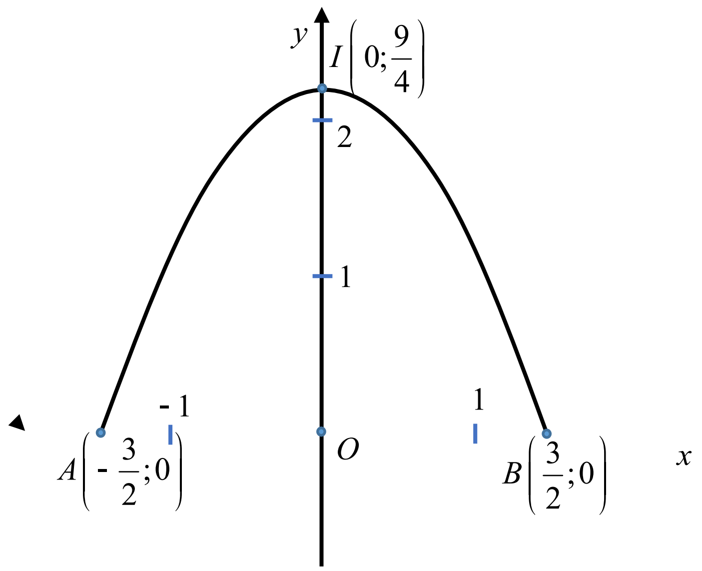
$$\Rightarrow S_2=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{8}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\frac{51}{8}=6,375\approx 6,4$.

Câu 23. (TT DIỆU HIỀN - CẦN THƠ - 2018) Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy bác Năm phải trả bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi phương trình parabol $(P): y=ax^2+bx+c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I\in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \dfrac{9}{4}a - \dfrac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

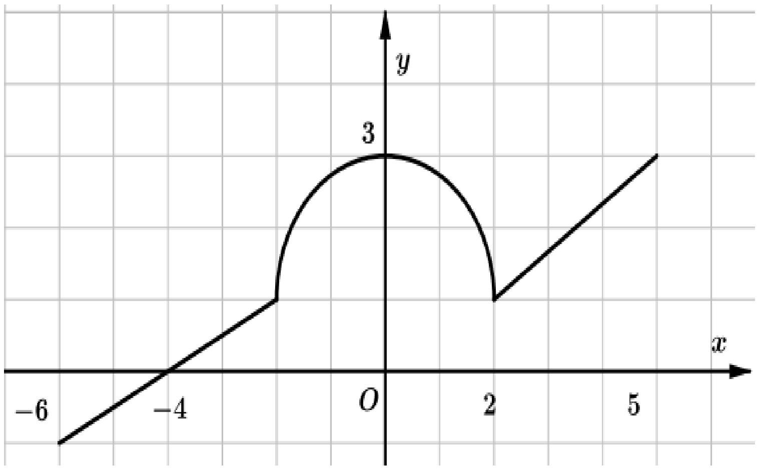
Vậy $(P): y = -x^2 + \dfrac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

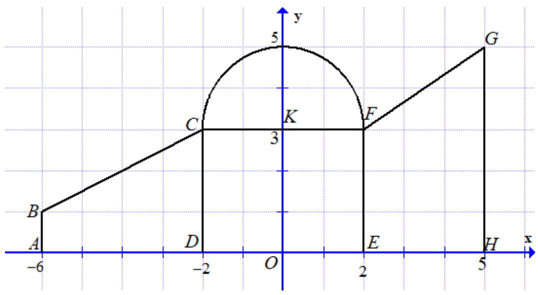
$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2\int_{0}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Bigg|_0^{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2} \text{m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\dfrac{9}{2}.1500000 = 6750$ nghìn đồng.

Câu 24. **(THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - LẦN 3 - 2018)** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính được giá trị $I = \int_{-6}^{5} [f(x) + 2]\, dx = a + 2\pi$. Tìm a?



Lời giải



$I = \int_{-6}^{5} [f(x) + 2]\, dx = \int_{-6}^{5} g(x) dx$ với $g(x) = f(x) + 2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ trong đó:

S_1 là diện tích hình thang vuông $ABCD$ $\Rightarrow S_1 = \dfrac{(AB+CD).AD}{2} = \dfrac{(1+3).4}{2} = 8$,

S_2 là diện tích hình chữ nhật $CDEF$ $\Rightarrow S_2 = 3.4 = 12$,

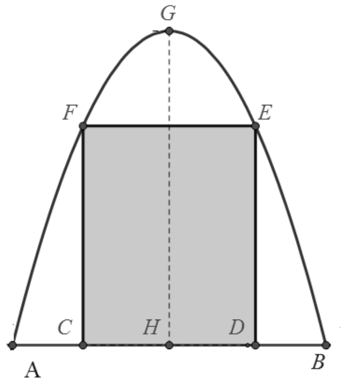
S_3 là diện tích hình tròn tâm I, bán kính $R = 2$ $\Rightarrow S_3 = \dfrac{\pi.2^2}{2} = 2\pi$,

S_4 là diện tích hình thang vuông $EFGH$ $\Rightarrow S_4 = \dfrac{(EF+GH).EH}{2} = \dfrac{(5+3).3}{2} = 12$.

Suy ra $I = 8 + 12 + 2\pi + 12 = 2\pi + 32$.

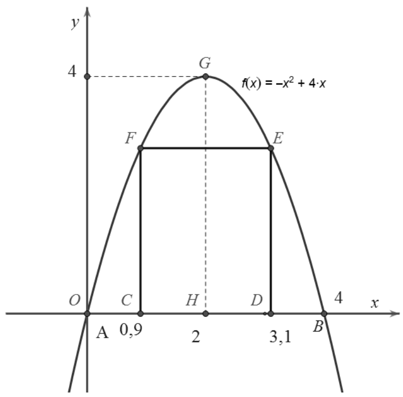
Vậy $a = 32$

Câu 25. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ *Oxy* sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 = \dfrac{32}{3}\ (\mathrm{m}^2)$.

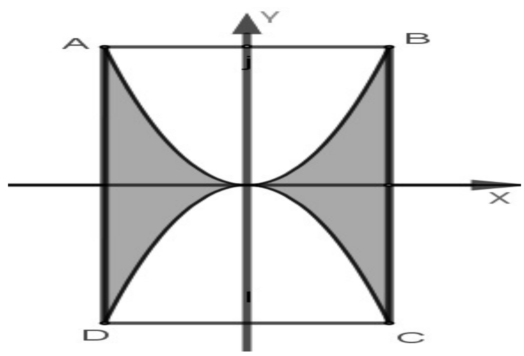
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\mathrm{m})$; $CD = 4 - 2.0,9 = 2,2\ (\mathrm{m})$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138\ (\mathrm{m}^2)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - 6,14 = \dfrac{6793}{1500}\ (\mathrm{m}^2)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \dfrac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng, tức khoảng $11,4$ triệu đồng

Câu 26. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành

$500.000 \text{đ}/\mathrm{m}^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm; BC = 8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần bao nhiêu triệu đồng? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Vì $AB = 4dm; BC = 8dm. \Rightarrow A(-2;4), \mathrm{B}(2;4), \mathrm{C}(2;-4), \mathrm{D}(-2;-4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

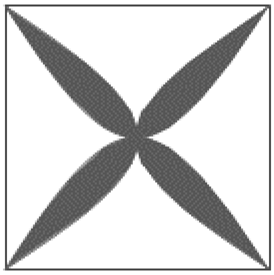
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\int_0^2 x^2 dx = \dfrac{32}{3}\ \ (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32\ \ (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{64}{3}\ \ (dm^2)$

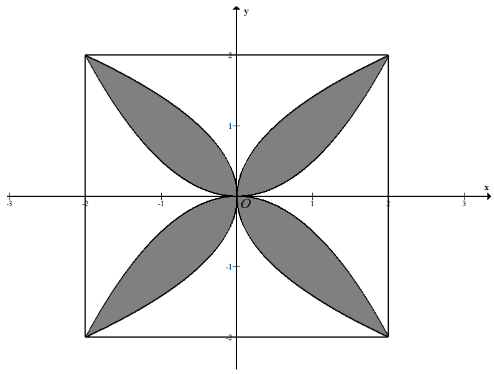
Tổng chi phí trang chí là: $T = \left(\dfrac{32}{3}.5000 + \dfrac{64}{3}.2500\right).1000 \approx 107$ (triệu đồng)

Câu 27. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Tính diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = -\dfrac{x^2}{2}$, $x = -\dfrac{y^2}{2}$, $x = \dfrac{y^2}{2}$.

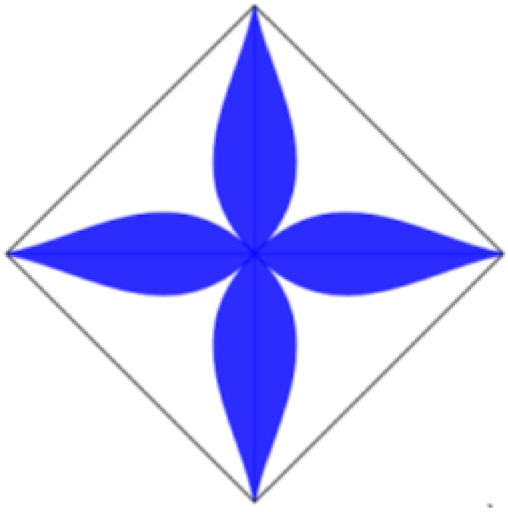
Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng $\displaystyle\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}(\text{dm}^2) = \frac{400}{3}(\text{cm}^2) = \frac{4}{3}(\text{dm}^2) = \frac{400}{3} \approx 133(\text{cm}^2).$$

Câu 28. **(THPT Bùi Thị Xuân – Huế - 2022)** Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo.

Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập $2/3$, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $20a + 20b$



Lời giải

Ta có nửa đường chéo hình vuông có độ dài là 4, cạnh hình vuông sẽ là $4\sqrt{2}$ và diện tích hình vuông là 32, khi đó ta có được diện tích phần tô màu là $\frac{64}{5}$.

Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 - x$ là hàm số bậc ba biểu diễn đường cong trên logo.

Ta có $x = 4$ là nghiệm của phương trình nên $64a + 16b - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a + b = 1$ (1).

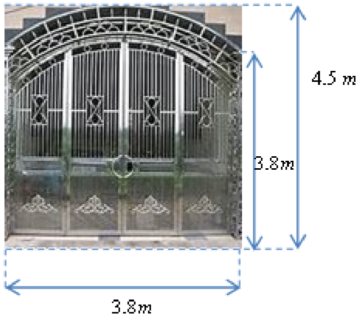
Ta có phương trình phương trình $f(x) = 0$ sẽ có các nghiệm là 0,4 và $a > 4$ vì $4a > 0$

Nên $S = \int_0^4 \left|ax^3 + bx^2 - x\right| dx = -\int_0^4 \left(ax^3 + bx^2 - x\right) dx$

$$= -\left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = -64a - \frac{64}{3}b + 8 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow -64a - \frac{64}{3}b = \frac{-32}{5}$$

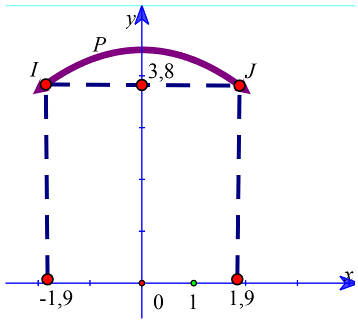
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a + b = 1 \\ -64a - \frac{64}{3}b = \frac{-32}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{20} \\ b = \frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow 20a + 20b = 8$.

Câu 29. **(Sở KonTum 2022)** Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol, chất liệu làm là inox. Giá $1m^2$ vật tư và công làm là $1.300.000$ đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu triệu đồng để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $I\left(-\frac{19}{10};\frac{19}{5}\right)$, $J\left(\frac{19}{10};\frac{19}{5}\right)$.

Đường cong phía trên là một Parabol có phương trình dạng $y=ax^2+b$, với $a;b\in\mathbb{R}$.

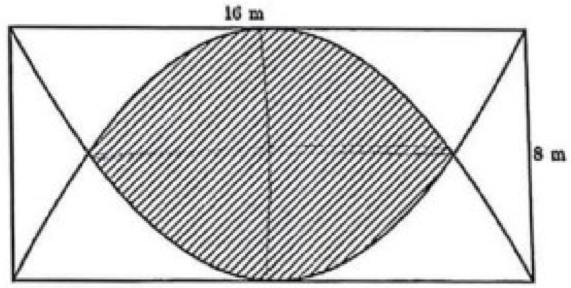
Do Parabol đi qua các điểm I,J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2}m$ nên có $y=-\frac{70}{361}x^2+\frac{9}{2}$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\frac{70}{361}x^2+\frac{9}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-\frac{19}{10}$; $x=\frac{19}{10}$.

Ta có $S=\int\limits_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}}\left(-\frac{70}{361}x^2+\frac{9}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1216}{75}$.

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là: $\frac{1216}{75}\times 1.300.000\approx 21$ (triệu đồng).

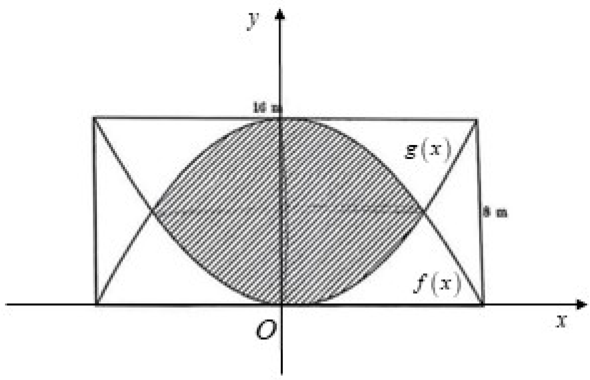
Câu 30. **(Sở Cần Thơ 2022)** Ông Năm có một khu đất dạng hình chữ nhật với chiều dài là $16m$ và chiều rộng là $8m$. Ông Năm trồng rau sạch trên một mảnh vườn được giới hạn bởi hai parabol. Biết rằng mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của cạnh dài và đi qua hai điểm đầu mút của cạnh dài đối diện (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa).



Biết chi phí để trồng rau là 45000 đồng$/m^2$. Hỏi ông Năm cần bao nhiêu triệu đồng để trồng rau trên phần mảnh vườn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Ta chọn hệ tọa độ như hình vẽ sau



Parabol có phương trình $y=f(x)$ có đỉnh là $(0;8)$ và đi qua điểm $(8;0)$ suy ra $f(x)=-\frac{1}{8}x^2+8$.

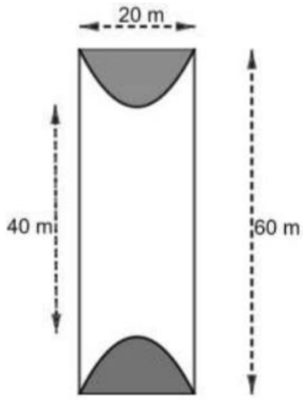
Parabol có phương trình $y=g(x)$ có đỉnh là $(0;0)$ và đi qua điểm $(8;8)$ suy ra $g(x)=\frac{1}{8}x^2$.

Xét phương trình $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=\pm 4\sqrt{2}$.

Diện tích mảnh vườn là $S=\int_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4}x^2+8\right)dx$.

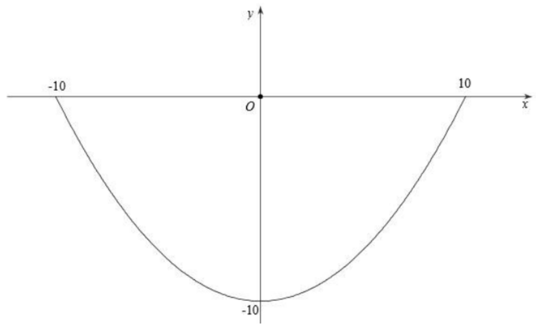
Vậy số tiền ông Năm cần là $S.45000\approx 2,7$ (triệu đồng).

Câu 31. **(Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình 2023)** Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài $60m$, chiều rộng $20m$. Người ta muốn trồng cỏ ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường Parabol có hai đỉnh cách nhau $40m$ (như hình vẽ bên). Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch với chi phí là 200.000 đồng $/m^2$. Hỏi cần tổng bao nhiêu triệu đồng để lát gạch (làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Từ giả thiết, ta suy ra chiều cao của một vùng mảnh đất trồng cỏ là $10m$. Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình parabol có dạng $y = a(x-10)(x+10)$.

Do điểm $(0;-10)$ thuộc đồ thị nên ta có $a = \dfrac{1}{10}$.

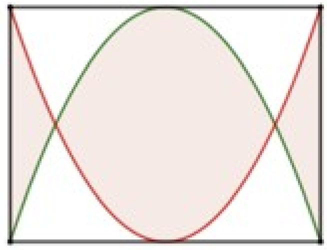
Suy ra $y = \dfrac{1}{10}(x-10)(x+10)$.

Diện tích phần trồng cỏ là $S_1 = 2\cdot\left|\displaystyle\int_{-10}^{10}\frac{1}{10}(x-10)(x+10)dx\right| = \dfrac{800}{3}\left(m^2\right)$.

Diện tích phần lát gạch là $S = 60.20 - S_1 = \dfrac{2800}{3}\left(m^2\right)$.

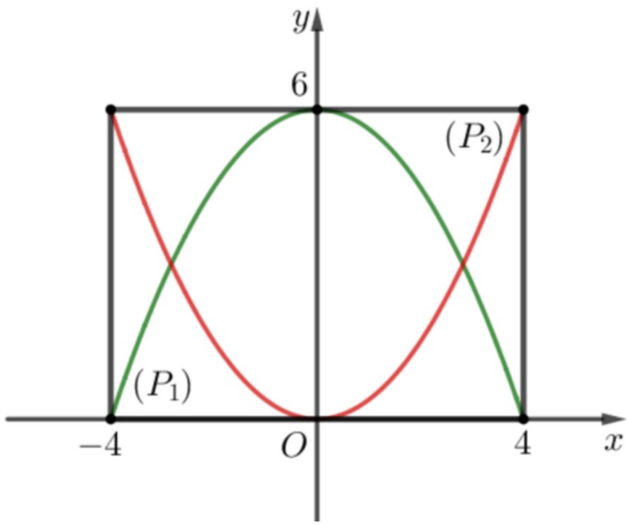
Tổng số tiền để lát gạch $T = S_1 \cdot 200000 \approx 187$ triệu đồng.

Câu 32. **(Liên trường Nghệ An -Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Thái Hòa 2023)** Ông A trồng hoa cảnh trên khuôn viên đất ở trong vườn là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol và hình chữ nhật có chiều rộng $6m$ và chiều dài $8m$ (phần tô đậm trong hình vẽ dưới), các đỉnh của parabol là điểm chính giữa các cạnh chiều dài hình chữ nhật. Biết chi phí trồng hoa cảnh xong là 500000 đồng $1m^2$. Tổng chi phí mà ông A phải trả để trồng xong vườn hoa cảnh bằng bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ:

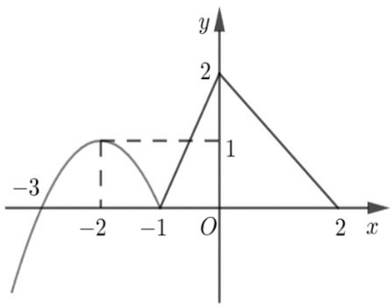


Phương trình các đường parabol là $(P_1): y = -\frac{6}{16}(x+4)(x-4); (P_2): y = \frac{6}{16}x^2$

Diện tích trồng hoa là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = \frac{6}{16}x^2; y = -\frac{6}{16}(x^2-16)$ nằm giữa hai đường thẳng $x = -4; x = 4$.

Chi phí trồng hoa là $F = 500000S = 500000\int_{-4}^{4}\left|\frac{6}{16}x^2 + \frac{6}{16}(x^2-16)\right|dx \approx 14,6$ triệu đồng.

Câu 33. **(Phú Thọ -2019)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$.)



Biết $f(-3) = 0,$ tính giá trị của $f(-1) + f(1)$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 3.$$

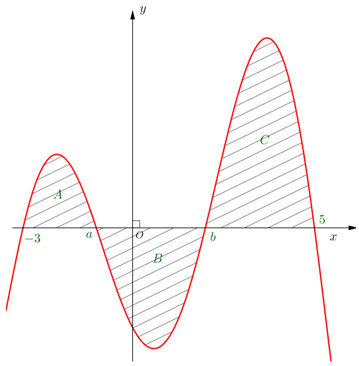
Do $f(-3) = 0$ nên $f(-1) + f(1) = [f(1) - f(0)] + [f(0) - f(-1)] + 2[f(-1) - f(-3)]$

$$= \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x + 2\int_{-3}^{-1}(-x^2 - 4x - 3)\mathrm{d}x$$

$$= S_1 + S_2 + 2\int_{-3}^{-1}(-x^2 - 4x - 3)\mathrm{d}x = 1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6} \approx 5.$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$ và $x = 0, x = 1$. Dễ thấy $S_1 = 1;\ S_2 = \dfrac{3}{2}$.

Câu 34. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[-3;5]$ như hình bên.



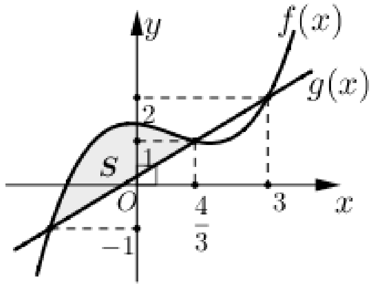
Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là $S_A = 188, S_B = \dfrac{1377}{4}, S_C = \dfrac{2673}{4}$. Khi đó $\int_{-3}^{5}[f(x) + 1]dx$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\int_{-3}^{5}[f(x)+1]dx = \int_{-3}^{5} f(x)dx + \int_{-3}^{5} dx = \int_{-3}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{5} f(x)dx + 8 = S_A - S_B + S_C + 8$$

$$= 188 - \frac{1377}{4} + \frac{2673}{4} + 8 = 520$$

Câu 35. **(Trung Tâm Thanh Tường - 2021)** Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$. (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3};1\right)$ và $B(3;2)$ nên $g(x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Với $y=-1 \Rightarrow \frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=-1 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow C(-2;-1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

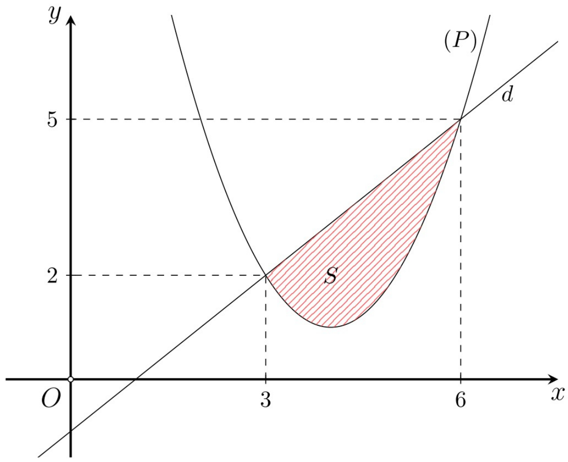
Do đó $f(x)-g(x)=a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)$.

Lại có $S=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{250}{81}=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow a=\frac{3}{20}$.

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3) \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\right]dx=\frac{34}{15}\approx 2,3$.

Câu 36. **(Mã 103 - 2023)** Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên dưới. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{9}{2}$.



Tính tích phân $\int_3^6 (2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Gọi đường thẳng $d: y = ax + b$. Vì đường thẳng d đi qua hai điểm $(3;2)$ và $(6;5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 6a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $d: y = x - 1$.

Gọi parapol $(P): y = mx^2 + nx + p$. Vì (P) đi qua hai điểm $(3;2)$ và $(6;5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 9m + 3n + p = 2 & (1) \\ 36m + 6n + p = 5 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác ta lại có hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \frac{9}{2}$ nên ta có

$$S = \int_3^6 \left(x - 1 - mx^2 - nx - p\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \int_3^6 \left(-mx^2 - (n-1)x - (p+1)\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{mx^3}{3} - \frac{(n-1)x^2}{2} - (p+1)x \right]\Bigg|_3^6 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow -63m - \frac{27}{2}n - 3p = -6 \quad (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 9m + 3n + p = 2 \\ 36m + 6n + p = 5 \\ -63m - \frac{27}{2}n - 3p = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -8 \\ p = 17 \end{cases}.$$

Suy ra $y = f(x) = x^2 - 8x + 17$ và $f'(x) = 2x - 8$.

Vậy $\int_3^6 (2x - 3)f'(x)\mathrm{d}x = \int_3^6 (2x - 3)(2x - 8)\mathrm{d}x = 27.$

Câu 37. **(Mã 102-2021-Lần 2)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + mx^2 - x$ với $a,b,c,m,n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2;3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 3; g'(x) = 3mx^2 + 2nx - 1$

Khi đó: $f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + (3b - 3m)x^2 + (2c - 2n)x + 4$

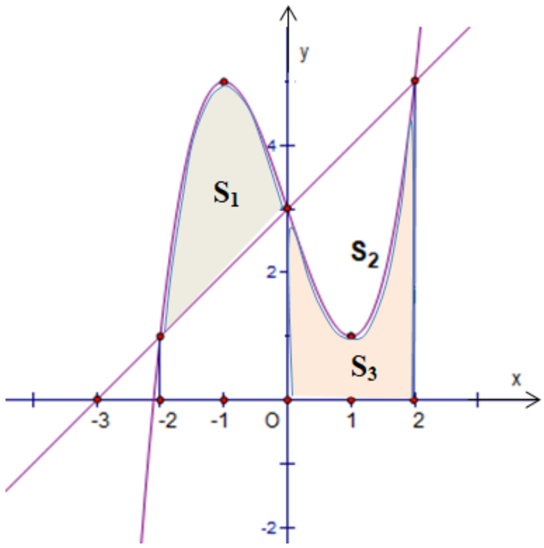
Do hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1;2;3$ nên ta suy ra $a \neq 0$ và $f'(x) - g'(x) = 4a(x+1)(x-2)(x-3)$

Ta có: $f'(0)-g'(0)=24a=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{6}$. Suy ra $f'(x)-g'(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

$$S=\int_{-1}^{3}\left|\frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|dx=\frac{71}{9}\approx 7,9.$$

Câu 38. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và đường thẳng $d:g(x)=mx+n$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1,S_2,S_3 lần lượt là diện tích của các phần giới hạn như hình bên. Nếu $S_1=4$ thì tỷ số $\dfrac{S_2}{S_3}$ bằng?



Lời giải:

• Dựa vào đồ thị như hình vẽ, ta có: $f(x)-g(x)=k.x(x+2)(x-2)$.

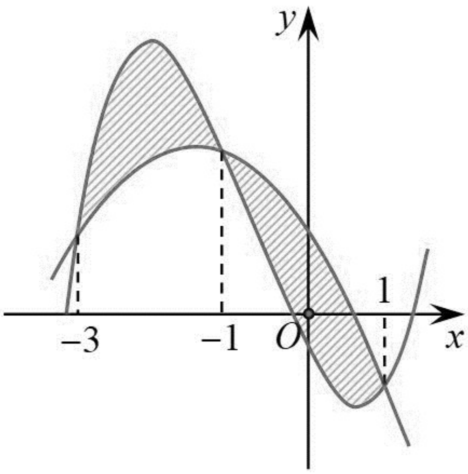
$g(x)=x+3$

$$S_1=S_2=\int_{-2}^{0}kx(x+2)(x-2)dx=4k$$

$$S_2+S_3=\frac{\left(|g(0)|+|g(2)|\right).2}{2}=\frac{(3+5).2}{2}=8$$

Vì $S_1=4\Rightarrow S_2=4\Rightarrow S_3=8-4=4$. Vậy $\dfrac{S_2}{S_3}=1$.

Câu 39. **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



Lời giải

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\ a=\frac{1}{2}\\ c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng $S=\int_{-3}^{-1}(f(x)-g(x))dx+\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx$

$$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]dx+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]dx$

$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)dx$ $=4$.

Câu 40. **(Cụm trường Ninh Thuận - Ninh Thuận 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x)-f(x)=2x^3-3x^2, \forall x\in\mathbb{R}$, biết $f(1)=2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=f'(x)$

Lời giải

$$xf'(x)-f(x)=2x^3-3x^2\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x-3\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=2x-3\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=x^2-3x+C$$

Vì $f(1)=2$ nên suy ra $C=4 f(x)=x^3-3x^2+4x; f'(x)=3x^2-6x+4$.

Ta có $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow x^3-6x^2+10x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Diện tích cần tính là $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\left|x^3-6x^2+10x-4\right|dx=2$.

Câu 41. **(Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-6x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Ta có $f(x)+xf'(x)=4x^3-6x^2\Rightarrow(xf(x))'=4x^3-6x^2\Rightarrow xf(x)=x^4-2x^3+C$.

Cho $x=0\Rightarrow C=0$, khi đó $f(x)=x^3-2x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x$.

Xét phương trình $x^3-2x^2=3x^2-4x\Leftrightarrow x^3-5x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy diện tích $S=\int_0^4\left|x^3-5x^2+4x\right|dx=\int_0^1\left|x^3-5x^2+4x\right|dx+\int_1^4\left|x^3-5x^2+4x\right|dx=\frac{71}{6}\approx 11,8$.

Câu 42. **(Sở Bắc Giang 2023)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0)=0$, $\left(x^2+1\right)f'(x)-xf(x)=-x^3-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và đường thẳng $x=3$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Ta có: $\left(x^2+1\right)f'(x)-xf(x)=-x^3-x, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}f'(x)-\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}f(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}f(x)\right]'=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}f(x)=-\sqrt{x^2+1}+C \quad (*).$$

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=1$; Thế vào $(*)$ ta được $f(x)=-(x^2+1)+\sqrt{x^2+1}$.

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow -(x^2+1)+\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$.

Khi đó $S=\int_0^3|f(x)|\,dx=S=\int_0^3\left|-(x^2+1)+\sqrt{x^2+1}\right|dx\approx 6,3$.

Câu 43. **(Sở Sơn La 2023)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x^3+2x^2+x}{\sqrt{x^2+3}},\ \forall x\in(-1;+\infty)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;x=1$. (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

$$2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x^3+2x^2+x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\underbrace{\frac{2}{x^2-1}}_{p(x)}f'(x)=\frac{x(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2+3}}(*)$$

Tổng quát: $e^{\int p(x)dx}\left(f'(x)+p(x)f(x)\right)=\left[e^{\int p(x)}\cdot f(x)\right]'$

$$\int p(x)dx=\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}dx=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Rightarrow e^{\int p(x)dx}=\frac{x-1}{x+1}$$

Nhân 2 vế của (*) với $\frac{x-1}{x+1}$ ta được:

$$\left[\frac{x-1}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}\cdot f(x)=\sqrt{x^2+3}+C$$

Thay $x=1\Rightarrow c+2=0\Leftrightarrow C=-2\Rightarrow \frac{x-1}{x+1}\cdot f(x)=\sqrt{x^2+3}-2$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}f(x)=\frac{x^2+3-4}{\sqrt{x^2+3}+2}\Rightarrow \frac{f(x)}{x+1}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}\cdot \text{Ta có } S=\int_0^1|f(x)|\,dx\approx 0,6$$

Câu 44. **(THPT Liên Trường, Nghệ An 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1, f(x)>0$ với mọi $x\geq 0$ và $f(x)-f'(x)=e^{-2x}\cdot f^2(x)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0, x=0, x=1$ gần bằng với số nào sau nhất? (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai)

Lời giải

Ta có $f(x)-f'(x)=e^{-2x}\cdot f^2(x)\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f'(x)}{f^2(x)}=e^{-2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^x\cdot f(x)-e^x\cdot f'(x)}{f^2(x)}=e^{-x}\Leftrightarrow \left(\dfrac{e^x}{f(x)}\right)'=e^{-x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^x}{f(x)}=-e^{-x}+C$.

Vì $f(0)=1$ nên suy ra $C=2$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{-e^{-x}+2}$.

Do đó $S=\left|\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^x}{-e^{-x}+2}dx\right|=1,23$.

Câu 45. **(Sở Sóc Trăng 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $f(x)+f'(x)=\sin x+x\cdot\sin x+x\cdot\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành, trục tung và $x=\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải

Ta có $f(x)+f'(x)=\sin x+x\cdot\sin x+x\cdot\cos x$

$\Leftrightarrow e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=(\sin x+x\cdot\sin x+x\cdot\cos x)e^x$

$\Leftrightarrow \left[e^x\cdot f(x)\right]'=\left(e^x\sin x+e^x x\cdot\sin x+e^x x\cdot\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left[e^x\cdot f(x)\right]'=\left(e^x\cdot x\cdot\sin x\right)'$.

Suy ra $\int\left[e^x\cdot f(x)\right]'dx=\int\left(e^x x\cdot\sin x\right)'dx\Leftrightarrow e^x\cdot f(x)=e^x x\cdot\sin x+C$.

Do $f(0)=0$ suy ra $C=0$. Khi đó $e^x.f(x)=e^x x\cdot\sin x\Leftrightarrow f(x)=x\cdot\sin x$.

Suy ra $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x\sin x|\,dx=1$.

Câu 46. **(Sở Hà Tĩnh 2023)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+xf'(x)+f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

Lời giải

Ta có

$f(x)+xf'(x)+f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4$

$\Leftrightarrow f(x)+(x+1)f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4(*)$

$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)]'=4x^3-6x^2-2x+4$

mà $\int(4x^3-6x^2-2x+4)dx=x^4-2x^3-x^2+4x+C$ nên $(x+1)f(x)=x^4-2x^3-x^2+4x+C_1$.

Cho $x=-1$ thì $0=-2+C_1$ suy ra $C_1=2$, ta được $(x+1)f(x)=x^4-2x^3-x^2+4x+2$.

- Với $x=-1$ thay vào $(*)$ thì $f(-1)=-4$;

- Với $x\neq-1$ thì $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$,

Do đó, $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)=3x^2-6x+2$.

Xét phương trình $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x+2=3x^2-6x+2$.

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=4\end{array}\right.$$

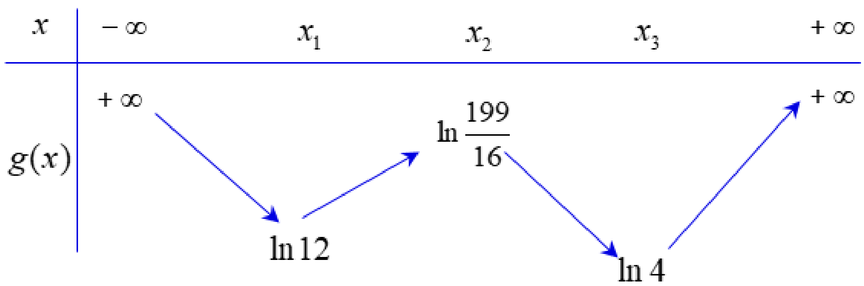
Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là

$$S=\int_0^4|f(x)-f'(x)|dx=\int_0^4|x^3-6x^2+8x|dx$$

$$=\int_0^2|x^3-6x^2+8x|dx+\int_2^4|x^3-6x^2+8x|dx$$

$$=\left|\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx\right|+\left|\int_2^4(x^3-6x^2+8x)dx\right|=8.$$

Câu 47. **(Mã 104-2022)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Từ BBT của $g(x)$ ta có $\ln f(x)\ge\ln 4 \Leftrightarrow f(x)\ge 4;\forall x\in R$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét phương trình $f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\ (*) \\ f(x)=1\ \ (**)\end{array}\right.$

Do $f(x)\ge 4;\ \forall x\in R$ suy ra phương trình $(**)$ vô nghiệm.

Từ đó suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3\end{array}\right.$.

Mặt khác $f'(x)-g'(x)=f'(x).\left[1-\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)-g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

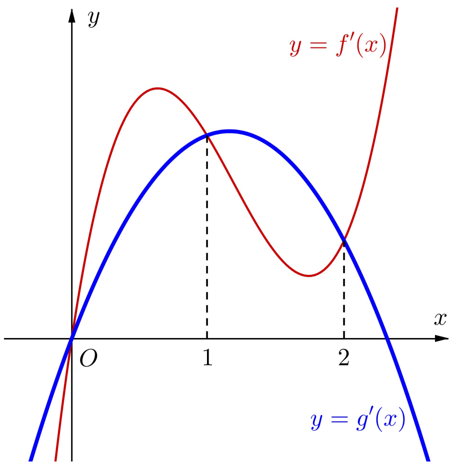
Vậy $S=\int\limits_{x_1}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[f'(x)-g'(x)\right]dx-\int\limits_{x_2}^{x_3}\left[f'(x)-g'(x)\right]dx$

$=\left[f(x)-g(x)\right]\Big|_{x_1}^{x_2}-\left[f(x)-g(x)\right]\Big|_{x_2}^{x_3}$

$=2f(x_2)-f(x_1)-f(x_3)-2\ln f(x_2)+\ln f(x_1)+\ln f(x_3)$

$=2\dfrac{199}{16}-12-4-2\ln\dfrac{199}{16}+\ln 12+\ln 4\approx 7,7$.

Câu 48. **(Cụm Trường Nghệ An - 2022)** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $g'(x)=qx^2+nx+p$ với $a,q\ne 0$ có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng 10 và $f(2)=g(2)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}$ và a,b nguyên tố cùng nhau). Tính $a-b$.



Lời giải

Phương trình $f'(x)=g'(x)$ có ba nghiệm bội lẻ phân biệt là: $0;1;2$.

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=kx(x-1)(x-2)$

Với (H_1) giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f'(x) \\ y=g'(x) \\ x=0;\ x=2 \end{cases}$, ta có: $S_{(H_1)}=\int_0^2 |f'(x)-g'(x)|\mathrm{d}x$

$\Rightarrow k\int_0^2 |x(x-1)(x-2)|\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow k=20$

Do đó: $f'(x)-g'(x)=20x(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=20x(x^2-3x+2)$

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=20x^3-60x^2+40x\ (1)$.

Lấy tích phân hai vế của (1), ta được: $\int [f'(x)-g'(x)]\,\mathrm{d}x=\int (20x^3-60x^2+40x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=5x^4-20x^3+20x^2+C\ (2)$

Thay $x=2$ vào (2), ta được: $f(2)-g(2)=C \Rightarrow C=0$.

Do đó: $f(x)-g(x)=5x^4-20x^3+20x^2$.

Xét: $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-20x^3+20x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Với (H_2) giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x)-g(x) \\ y=0 \\ x=0;\ x=2 \end{cases}$, ta có: $S_{(H_2)}=\int_0^2 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$.

Do đó: $a=16, b=3$. Vậy $a-b=13$.

Câu 49. **(Sở Ninh Bình 2022)** Cho hàm số $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+36$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x), y=f'(x)$ và Ox giao nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 2,3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và Ox bằng $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản với $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính tổng $m+n$?

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $x=2, x=3$ là nghiệm của $f(x)$ và $f'(x)$ nên $f(x)$ có dạng

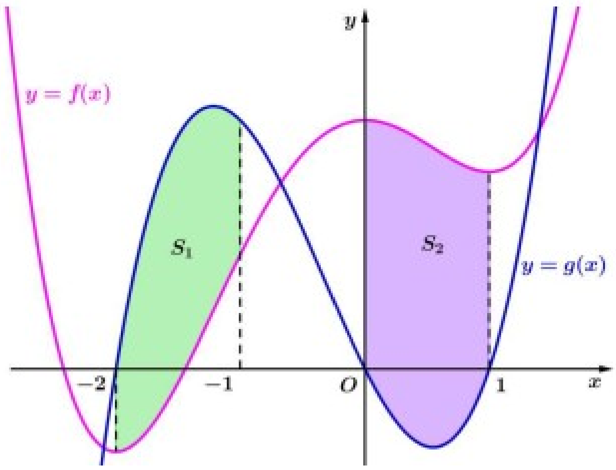
$f(x)=(x-2)^2(x-3)^2(x-k)$.

Mà $f(0)=36$ nên $k=-1$. Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$S=\int_{-1}^{3}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{3}\left|(x-2)^2(x-3)^2(x+1)\right|dx=\frac{832}{15}$

Vậy $m+n=847$

Câu 50. (Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2022) Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+bx+2$ và hàm số $y=g(x)=cx^3+dx^2-2x$ (với $a,b,c,d\in R$) là các hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1,S_2 là diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ, biết $S_1=\frac{97}{60}$. Tính được S_2 bằng $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản với $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính tổng $m-n$?



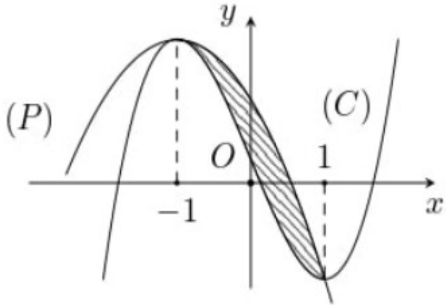
Lời giải

Ta nhận thấy $\begin{cases} g(-2)=g(1)=0 \\ f'(-2)=f'(1)=0 \end{cases}$, Giải 2 hệ ta lần lượt ra được: $\begin{cases} f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+2 \\ g(x)=x^3+x^2-2x \end{cases}$

Suy ra: $S_2=\int_0^1(f(x)-g(x))dx=\int_0^1\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x+2\right)dx=\frac{133}{60}$.

Vậy $m-n=73$

Câu 51. **(THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022)** Cho hai hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c,\ (a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p,\ (m,n,p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) bằng $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản với $m,n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $m - n$?



Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (P) là:

$x^3 + ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p \Leftrightarrow x^3 + (a-m)x^2 + (b-n)x + c - p = 0\ (*)$.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x = -1, x = 1$ (trong đó $x = -1$ là nghiệm bội 2 và $x = 1$ là nghiệm đơn).

Suy ra $x^3 + (a-m)x^2 + (b-n)x + c - p = (x+1)^2(x-1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) là $S = \int_{-1}^{1} \left|(x+1)^2(x-1)\right| dx = \frac{4}{3}$.

Vậy $m - n = 1$

Câu 52. **(Sở Nghệ An 2022)** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx\ (a,b \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f(x) - \frac{2}{3}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 1, x = 3$. Với mỗi t là hằng số tùy ý thuộc đoạn $[0;1]$, gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0, y = f(t), y = f(x)$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1, y = f(t), y = f(x)$. Biểu thức $Q = 12S_1 + 4S_2$ có thể nhận được bao nhiêu giá trị là số nguyên ?

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f'''(x) = 6$

Từ đó ta suy ra: $g'(x) = \frac{1}{3}f'(x) - \frac{2}{3}f''(x) + \frac{1}{2}f'''(x) = \frac{3x^2 + 2ax + b}{3} - \frac{2(6x + 2a)}{3} + 3$

Do hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 1, x = 3$ nên suy ra $\begin{cases} g'(1) = 0 \\ g'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ tức $y = f(x) = x^3$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(t), y = f(x)$ có $x^3 = t^3 \Leftrightarrow x = t$

$$\begin{cases} S_1 = \int_0^1 \left(t^3 - x^3\right) dt = \dfrac{3t^4}{4} \\ S_2 = \int^1 \left(x^3 - t^3\right) dt = \dfrac{3t^4}{4} - t^3 + \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow Q = 12S_1 + 4S_2 = 12t^4 - 4t^3 + 1 = f(t)$$

Xét hàm số $f(t)$ ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = \frac{1}{4}$ với $t = \frac{1}{4}$ là điểm cực tiểu và $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{63}{64}$.

Do $t \in [0;1]$ nên ta suy ra $Q \in \left[\frac{63}{64}; 9\right]$ tức Q có thể nhận 9 giá trị nguyên.